

TD7 : frottement fluide autour du volant d'inertie

Objectif #1

Utiliser la condition d'incompressibilité d'un fluide.

Objectif #2

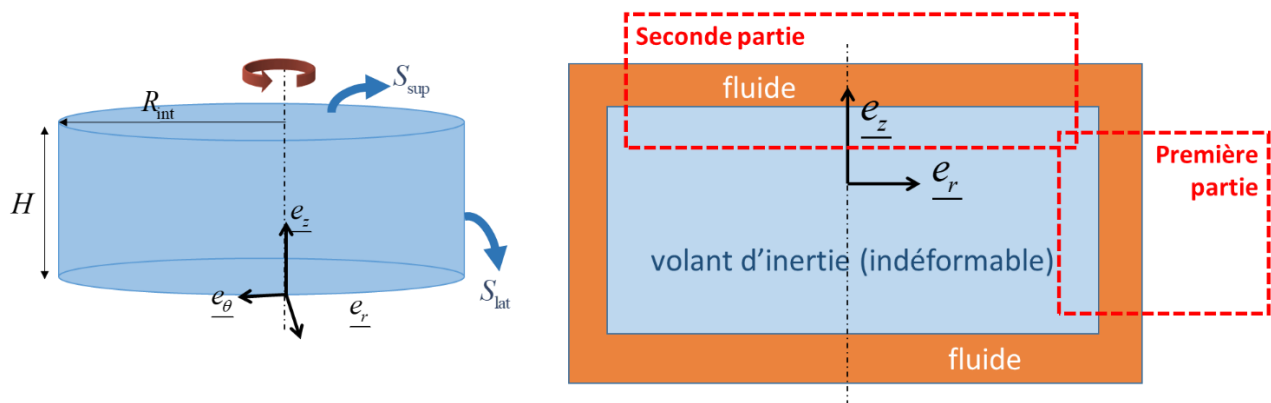
Utiliser l'équation de Navier-Stokes pour résoudre un problème de mécanique des fluides.

Objectif #3

Utiliser la loi de comportement du fluide newtonien pour déterminer une contrainte de cisaillement.

Enoncé du problème

Un volant d'inertie et un système rotatif permettant le stockage et la restitution d'énergie cinétique. Il peut être utilisé pour réguler ou lisser la production d'énergie électrique, en stockant l'énergie pendant de courtes durées. Une partie de l'énergie cinétique stockée est néanmoins perdue en raison des frottements au niveau des roulements (ou paliers), et en raison du frottement du fluide à la surface du volant dans l'enceinte qui le contient (où le vide n'est généralement pas parfait).



On appelle R_{int} et R_{ext} les rayons du volant et de l'enceinte qui le contient, respectivement.

Problème posé

On cherche à définir le profil des champs de vitesses tout autour du volant d'inertie qui tourne à la vitesse Ω , afin de quantifier les couples résistants dus au frottement fluide.

Hypothèses

- On considère que le fluide qui entoure le volant d'inertie est newtonien et incompressible.
- On considère que l'écoulement est laminaire, établi et stationnaire.
- On considère une adhésion parfaite du fluide aux parois de l'enceinte et du volant.
- Le volant est placé verticalement de telle sorte que $\underline{g} = -g\underline{e}_z$

Questions

Première partie : champ de vitesses autour de la surface latérale

- 1) Pour cette surface, justifier que l'on puisse postuler un champ de vitesses et de pression sous la forme $\underline{v} = v_\theta(r) \underline{e}_\theta$ et $p(r, z)$ respectivement.
- 2) Trouver la forme du champ de vitesses en utilisant l'équation de Navier-Stokes.
- 3) En déduire le champ de contraintes sur la surface latérale.
- 4) En déduire le couple résistant au niveau du volant en raison du frottement fluide.

Seconde partie : champ de vitesses autour de la surface supérieure

- 5) Pour cette seconde surface, on postule un champ de vitesses et de pression sous la forme $\underline{v} = v_\theta(r, z) \underline{e}_\theta$ et $p(r, z)$ respectivement, et on admet que la vitesse dépend linéairement de z . Reprendre les équations précédentes pour calculer le couple résistant au niveau de cette surface supérieure.
- 6) En considérant le volant indéformable, déduire l'accélération angulaire du volant d'inertie lors de l'application du couple moteur $\mathcal{C}$.

Formules utiles

Divergence d'un vecteur en coordonnées cylindriques : $\text{div } \underline{T} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rT_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial T_z}{\partial z}$

Equation de Navier-stokes : $\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{v}) \cdot \underline{v} \right) = -\underline{\underline{\text{grad}}}(p) + \mu \Delta \underline{v} + \rho \underline{g}$

Gradient d'un vecteur en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{T} = & \frac{\partial T_r}{\partial r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_r}{\partial \theta} - T_\theta \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_r}{\partial z} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + \\ & \frac{\partial T_\theta}{\partial r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + T_r \right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_\theta}{\partial z} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \\ & \frac{\partial T_z}{\partial r} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T_z}{\partial \theta} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_z}{\partial z} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \end{aligned}$$

Solution de l'équation différentielle $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x^2} = 0$:

$$y = \frac{A}{x} + Bx \text{ avec } A, B \text{ des constantes}$$

Loi de comportement du fluide newtonien :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{d}} \text{ avec } \mu \text{ la viscosité dynamique du fluide et } \underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{grad}}} \underline{v} + \left(\underline{\underline{\text{grad}}} \underline{v} \right)^T \right)$$

Théorème du moment cinétique pour un solide en rotation :

$$\ddot{\theta} I_{0z} = \dot{\Omega} I_{0z} = \sum_i \mathfrak{M}_{Oz} \left(\underline{F}^{(i)} \right)$$