

Corrigé de l'exercice 2
"Stabilité Résol. d'une EDO non-linéaire"
du TD 3.

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = -t y^2(t), & t \in [0, 1] \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

1) L'EDO est non linéaire.

On pose $t_n = n h$, et le schéma EP1 s'écrit:

$$\begin{aligned} y^{n+1} &= y^n + h f(t_n, y^n) \\ &= \boxed{y^n - n h^2 (y^n)^2} \end{aligned}$$

Pour $h = \frac{1}{10}$, on obtien. $y^1 = y^0 = 2$

$$\bullet y^2 = y^1 - \frac{1}{100} (y^1)^2 = 1,96.$$

Rq: La solution exacte au temps $t = t_2$ est:

$$y(t_2 = 0.2) \approx 1.92.$$

Come s'assurer que EP1 est stable pour $h = \frac{1}{10}$.
Cela va être effectué dans la question suivante.

2) Pour étudier la stabilité d'un schéma numérique pour un EDO non-linéaire, on va s'appuyer ce qui est connu pour les eq^s linéaires (cf cours).

La 1^{ère} étape est de remplacer le schéma original:

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{h} = f(t_n, y^n) \quad (*)$$

par sa version linéarisée (cf sect. III.2) :

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{h} = \lambda_n y^n \quad \text{avec } \lambda_n = \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, y^n).$$

D'après le cours, la stabilité de ce dernier schéma est:

$$h \leq \frac{2}{-\lambda_n}.$$

Pour tous les temps $t_n \in [0, T_{\max} = 1]$, on sera sûr que le schéma (*) est stable si:

$$\forall t_n, \quad h \leq \frac{2}{-\lambda_n}, \quad (**)$$

Suit:

$$h \leq \min_{t_n} \left\{ \frac{2}{-\lambda_n} \right\} = \frac{2}{\max_{t_n} \{-\lambda_n\}}$$

Pour cet exercice, il est facile de calculer $\max_{t_n} \{-\lambda_n\}$.

En effet, on observe que :

$$-\lambda(t) = - \frac{\partial f}{\partial y} = 2y t = \frac{4t}{1+t^2}$$

car la solution exacte est $y(t) = 2/(1+t^2)$.

Puisque $\frac{d}{dt}(-\lambda) = \frac{4(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \leq 0$ pour $t \in [0, 1]$,

la fonction $-\lambda$ est décroissante sur $[0, T_{\max} = 1]$.

On en déduit que $\max_{t_n} \{-\lambda(t)\} = -\lambda(1) = 2$.

La condition de stabilité (a) s'écrit donc :

$$\boxed{h \leq 1}$$

D'après cette cond. de stab., le pas $h = \frac{1}{10}$ utilisé dans la $\mathcal{Q}_1$ donne un résultat stable.

Remarque: Cette étude de stabilité a été facilitée par le fait que la solution exacte $y(t)$ était connue. Dans la pratique, la solution exacte n'est pas toujours connue.

Dans ce cas, une stratégie consiste à utiliser un pas de temps variable h_n pour calculer y^{n+1} :

$$y^{n+1} = y^n + h_n f(t_n, y^{n+1}),$$

qui est choisi tel que :

$$h_n \leq \frac{2}{-d_n}.$$

Pour calculer y^{n+2} , on utilisera le pas de temps

$$h_{n+1} \leq \frac{2}{-d_{n+1}},$$

etc... de proche en proche.

3) Le schéma ER1: $\frac{y^{n+1} - y^n}{h} = f(t_{n+1}, y^{n+1})$

appliqué à l'EDO de cet exo s'écrit :

$$y^{n+1} + (n+1)h^2(y^{n+1})^2 = y^n, \quad (*)$$

Il est de la forme $G(y^{n+1}) = H(y^n)$ avec

$$G = y + (n+1)h^2 y^2, \quad H = y.$$

On ne peut calculer facilement y^{n+1} à partir de la récurrence (*), car il faut résoudre une eqⁿ non-linéaire.

Pour résoudre cette équation, on peut utiliser la méthode de Newton (cf Cours), ~~savoir~~.

Voici l'algo. de Newton pour calculer le zéro $x_n = y^{n+1}$ de l'équation (*):

• Initialisation: on pose $x_0 = y^n$

(Rq: x_0 est proche en $O(h)$ de y^{n+1} , donc "suffisamment proche" pour que l'algo. cv.).

• Itérations, pour $h \geq 1$:

$$x_{h+1} = x_h - \frac{F(x_h)}{F'(x_h)},$$

avec $F(x) = G(x) - H(y^n)$. Puisque

$$F'(x) = 1 + 2(n+1)h^2 x,$$

alors les itérations de Newton s'écrivent:

$$x_{h+1} = x_h - \frac{x_h + (n+1)h^2 x_h^2 - y^n}{1 + 2(n+1)h^2 x_h}.$$

A convergence de cet algorithme, on aura $\begin{cases} x_h \rightarrow y^{n+1} \\ h \rightarrow 0 \end{cases}$.

L'algorithme de Newton est à appliquer pour calculer la solution à tous les pas de temps successifs (i.e.: $y^{k+2}, y^{k+3}, \dots$).