

# CHAPITRE I

## Quelques rappels de mécanique

**EFFORT**



**TECHNICITE**



**RISQUE**



**OBJECTIF**

*Partir sur les mêmes bases et combler les éventuelles lacunes*

## CHAP I: Quelques rappels de mécanique

# Positionnement dans l'espace

- Espaces vectoriels
- Convention d'Einstein
- Repérage des points
- Système de coordonnées
- Changement de base

## Quelques définitions:

- Référentiel  $\mathcal{R}$ : ensemble des points de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  animé du mouvement de corps rigide de l'observateur
- Repère: « matérialise »  $\mathcal{R}$ , il existe plusieurs repères pour un même référentiel (cylindrique, cartésien, ...)

## Interlude mathématique

### Espace utilisé:

- Dans tout ce cours: **espace vectoriel euclidien** orienté  $\mathbb{R}^3$
- Les éléments de cet espace sont des **vecteurs**
  - Ils seront **soulignés une fois**:  $\underline{x}$  et  $\underline{y}$  par exemple
- Les notions qui seront représentées se généralisent à d'autres espaces plus complexes → hors du cadre de ce cours
- Espace muni du **produit scalaire**:

$$(\alpha \underline{x}) \cdot \underline{y} = \alpha (\underline{x} \cdot \underline{y})$$

$$(\underline{x} + \underline{y}) \cdot \underline{z} = \underline{x} \cdot \underline{z} + \underline{y} \cdot \underline{z}$$

$$\underline{x} \cdot \underline{x} > 0 \quad ; \quad \underline{x} \cdot \underline{x} = 0 \Rightarrow \underline{x} = \underline{0}$$

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = \|\underline{x}\| \|\underline{y}\| \cos \theta(\underline{x}, \underline{y})$$

$$\|\underline{x}\| = (\underline{x} \cdot \underline{x})^{1/2}$$



## CHAP I: Quelques rappels de mécanique

# Positionnement dans l'espace

- Espaces vectoriels
- Convention d'Einstein
- Repérage des points
- Système de coordonnées
- Changement de base

- L'espace est  $\mathbb{R}^3$

→ les indices de coordonnées varient toujours de 1 à 3

→ le signe  $\sum_{i=1}^3$  est inutile!!

- convention de sommation sur les indices répétés  
(=**convention d'Einstein**) : si un indice apparaît **deux fois** dans la même expression, il prend systématiquement les valeurs 1, 2 et 3

- Exemple:

$$a_i b_{ij} c_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i b_{ij} c_j = a_1 b_{11} c_1 + a_1 b_{12} c_2 + a_1 b_{13} c_3 + a_2 b_{21} c_1 + \dots + a_3 b_{33} c_3$$

- indice répété = indice **muet**, il peut changer de nom
- exemple : **position** du point  $\underline{OM} = x_i \underline{e}_i = x_k \underline{e}_k = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3$
- exemple : **produit scalaire** 
$$\underline{x} \cdot \underline{y} = (x_i \underline{e}_i) \cdot (y_j \underline{e}_j)$$
$$= x_i y_j \delta_{ij} = x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$
- exemple : **norme** d'un vecteur 
$$\|\underline{x}\|^2 = \underline{x} \cdot \underline{x} = x_i \underline{e}_i \cdot x_j \underline{e}_j = x_i x_j \delta_{ij} = x_i x_i = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

## CHAP I: Quelques rappels de mécanique

# Positionnement dans l'espace

- Espaces vectoriels
- Convention d'Einstein
- Repérage des points
- Système de coordonnées
- Changement de base



- L'**observateur** (ou référentiel) est muni d'un **repère orthonormé direct**  $R$
- Repère caractérisé par un point d'origine et trois vecteurs formant une **base orthonormée directe**, i.e. :

$$\begin{aligned} \text{si } i \neq j & \text{ alors } \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = 0 \\ \text{si } i = j & \text{ alors } \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = 1 \end{aligned}$$

- Dans ce repère, un vecteur  $\underline{x}$  peut être repéré par ses **composantes**:

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \underline{e}_i = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3 = x_i \underline{e}_i$$

- Un point quelconque  $M$  peut être repéré par ses **coordonnées**, qui sont les composantes du vecteur  $\underline{OM}$  dans ce repère:

$$\underline{OM} = \sum_{i=1}^3 x_i \underline{e}_i = x_i \underline{e}_i$$

- Un vecteur  $\underline{x}$  possède trois composantes scalaires  $x_1, x_2, x_3$
- Ces **composantes changent** avec un changement de base, contrairement au **vecteur** qui est **intrinsèque**
- On emploiera les notations:

$\underline{x}$  : **vecteur** (intrinsèque)

$x_i$  : **composantes** du vecteur selon la direction  $\underline{e}_i$

$[\underline{x}]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  : **vecteur-colonne** contenant les composantes de  $\underline{x}$  dans la base  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$

## Exemple

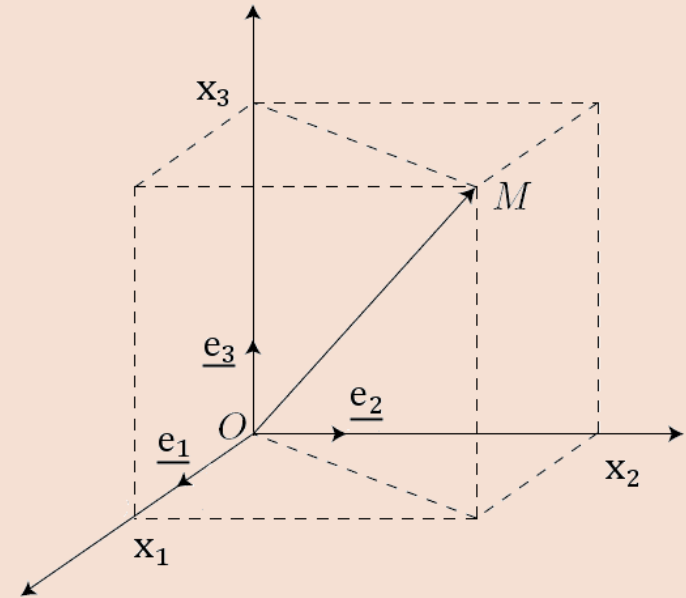
### Notation sur les vecteurs

$$\underline{OM} = \underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3$$

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \underline{e}_i$$

$$\underline{x} = x_i \underline{e}_i$$

convention de sommation sur les indices répétés = **convention d'Einstein**



### ■ norme d'un vecteur

$$\begin{aligned} \|\underline{x}\|^2 &= \underline{x} \cdot \underline{x} = (x_i \underline{e}_i) \cdot (x_j \underline{e}_j) = x_i x_j \underbrace{(\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j)}_{\substack{=1 \text{ si } i=j \\ =0 \text{ sinon}}} \\ \Rightarrow \|\underline{x}\|^2 &= x_i x_i = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{aligned}$$

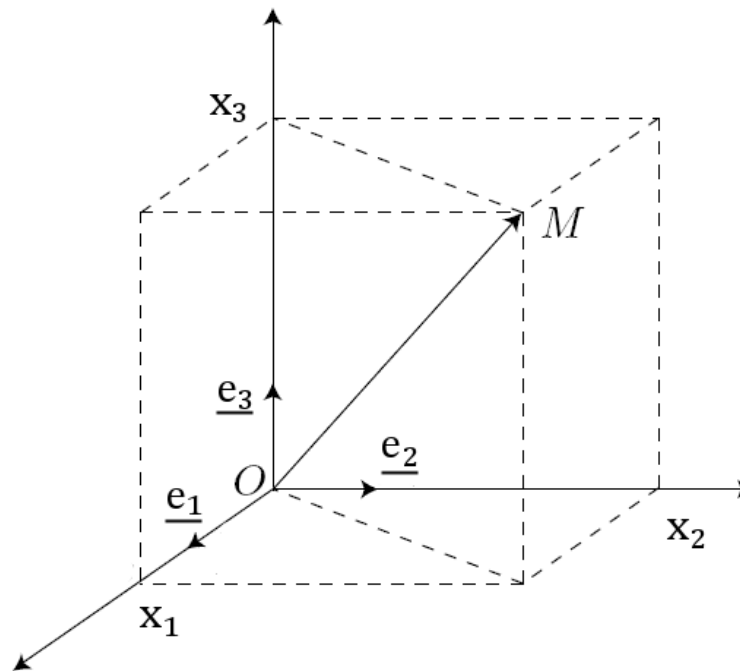
## CHAP I: Quelques rappels de mécanique

# Positionnement dans l'espace

- Espaces vectoriels
- Convention d'Einstein
- Repérage des points
- Système de coordonnées
- Changement de base

## Coordonnées cartésiennes

- Position du point  $M$  :  $\underline{OM} = \underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3 = x_i \underline{e}_i$
- Vecteur quelconque  $\underline{a}$  dans la base  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  :  $\underline{a} = a_i \underline{e}_i$



## Coordonnées cylindriques

- Position du point  $M$  :  $\underline{OM} = \underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3$   
 $= r \cos \theta \underline{e}_1 + r \sin \theta \underline{e}_2 + z \underline{e}_3$
- Vecteur quelconque  $\underline{a}$  dans la base  $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$  :  $\underline{a} = a_r \underline{e}_r + a_\theta \underline{e}_\theta + a_z \underline{e}_z$

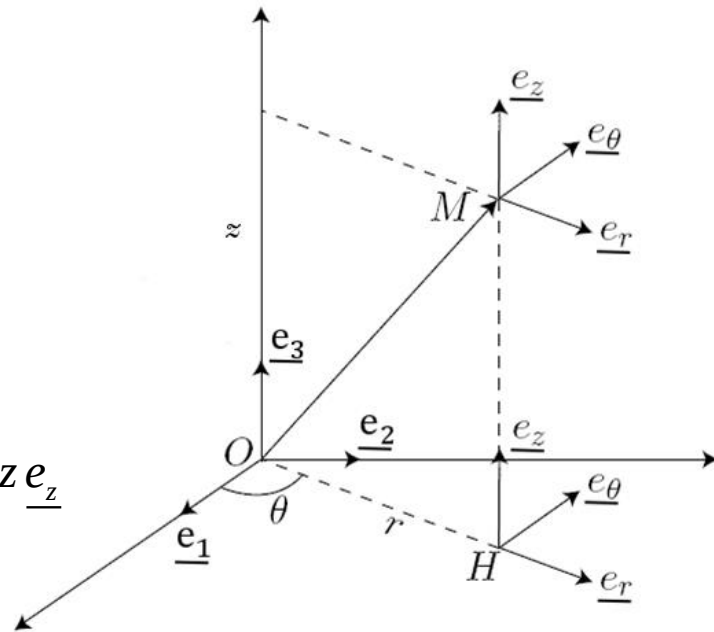
- Base locale en un point :

$$\underline{e}_r = \cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2$$

$$\underline{e}_\theta = -\sin \theta \underline{e}_1 + \cos \theta \underline{e}_2$$

$$\underline{e}_z = \underline{e}_3$$

→ Position du point  $M$  :  $\underline{OM} = r \underline{e}_r + z \underline{e}_z$

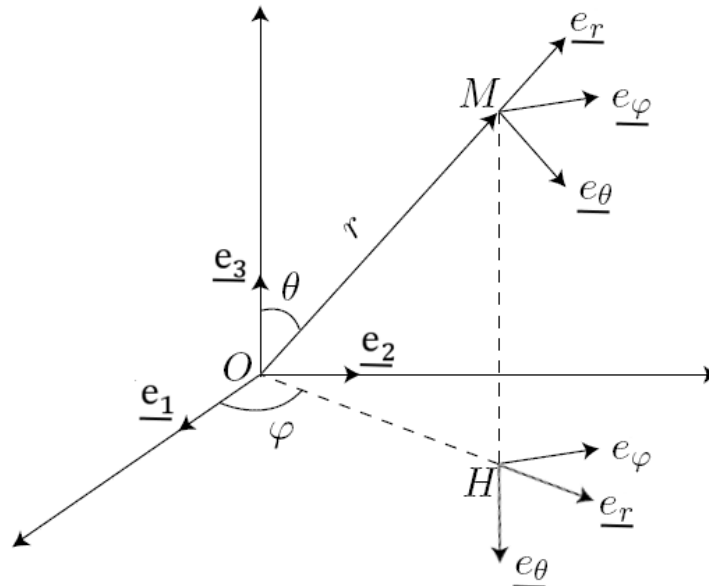


## Coordonnées sphériques

- Position du point  $M$  :  $\underline{OM} = \underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3$   

$$= r \sin \theta \cos \varphi \underline{e}_1 + r \sin \theta \sin \varphi \underline{e}_2 + r \cos \theta \underline{e}_3$$
  

$$= r \underline{e}_r$$
- Vecteur quelconque  $\underline{a}$  dans la base  $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_\varphi)$  :  $\underline{a} = a_r \underline{e}_r + a_\theta \underline{e}_\theta + a_\varphi \underline{e}_\varphi$



## CHAP I: Quelques rappels de mécanique

# Positionnement dans l'espace

- Espaces vectoriels
- Convention d'Einstein
- Repérage des points
- Système de coordonnées
- Changement de base



## Matrice de passage

- Vecteur = élément **intrinsèque**, ne dépend pas du choix arbitraire de la base orthonormée
- On peut écrire ce vecteur indifféremment dans **différentes bases**

$$\underline{a} = a_i \underline{e}_i = a_i^* \underline{e}_i^*$$

- Bases décrites par des vecteurs, qui eux-mêmes peuvent s'écrire dans **différentes bases**:

$$\begin{cases} \underline{e}_1 = P_{11}^* \underline{e}_1^* + P_{12}^* \underline{e}_2^* + P_{13}^* \underline{e}_3^* \\ \underline{e}_2 = P_{21}^* \underline{e}_1^* + P_{22}^* \underline{e}_2^* + P_{23}^* \underline{e}_3^* \\ \underline{e}_3 = P_{31}^* \underline{e}_1^* + P_{32}^* \underline{e}_2^* + P_{33}^* \underline{e}_3^* \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} \underline{e}_1^* = P_{11} \underline{e}_1 + P_{12} \underline{e}_2 + P_{13} \underline{e}_3 \\ \underline{e}_2^* = P_{21} \underline{e}_1 + P_{22} \underline{e}_2 + P_{23} \underline{e}_3 \\ \underline{e}_3^* = P_{31} \underline{e}_1 + P_{32} \underline{e}_2 + P_{33} \underline{e}_3 \end{cases}$$

## Matrice de passage

- Ces relations s'écrivent, en utilisant la convention d'Einstein:

$$\underline{e}_i = P_{ij}^* \underline{e}_j^* \quad \text{ou} \quad \underline{e}_i^* = P_{ij} \underline{e}_j$$

- Les matrices  $P^*$  et  $P$  sont les **matrices de passage** entre les bases
- Les composantes de ces matrices sont les produits scalaires entre les vecteurs des deux bases:

$$\begin{cases} \underline{e}_i = P_{ij}^* \underline{e}_j^* \\ \underline{e}_j^* = P_{ji} \underline{e}_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j^* = P_{ij}^* \underline{e}_j^* \cdot \underline{e}_j^* = P_{ij}^* \\ \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j^* = P_{ji} \underline{e}_i \cdot \underline{e}_i = P_{ji} \end{cases} \Rightarrow P^T = P^*$$

- On montre que les matrices  $P$  et  $P^*$  sont donc **orthogonales**, i.e. :

$$P^T = P^{-1} \quad \text{et} \quad (P^*)^T = (P^*)^{-1}$$

## Matrice de passage

- le vecteur s'écrit indifféremment dans différentes bases orthonormées selon la relation:

$$\underline{a} = a_i \underline{e}_i \Rightarrow \underline{a} = a_i P_{ij}^* \underline{e}_j^* \Rightarrow a_j^* = a_i P_{ij}^*$$

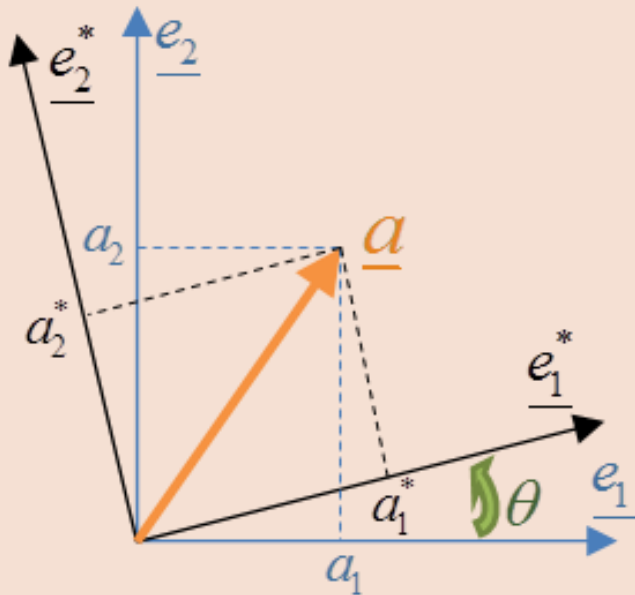
→ ici  $P^*$  est la matrice de passage **orthogonale** contenant les coordonnées de **l'ancienne** base en fonction de la **nouvelle**

$$\underline{a} = a_i^* \underline{e}_i^* \Rightarrow \underline{a} = a_i^* P_{ij} \underline{e}_j \Rightarrow a_j = a_i^* P_{ij}$$

→ ici  $P$  est la matrice de passage **orthogonale** contenant les coordonnées de **la nouvelle** base en fonction de **l'ancienne**

## Exemple

### Matrice de passage: exemple



$$\begin{cases} \underline{a} = a_i \underline{e}_i = a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 \\ \underline{a} = a_i^* \underline{e}_i^* = a_1^* \underline{e}_1^* + a_2^* \underline{e}_2^* \end{cases}$$

$$a_j^* = a_i P_{ij}^* \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_1^* = \cos \theta a_1 - \sin \theta a_2 \\ a_2^* = \sin \theta a_1 + \cos \theta a_2 \end{cases}$$

$$a_j = a_i^* P_{ij} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^* \\ a_2^* \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \cos \theta a_1^* + \sin \theta a_2^* \\ a_2 = -\sin \theta a_1^* + \cos \theta a_2^* \end{cases}$$

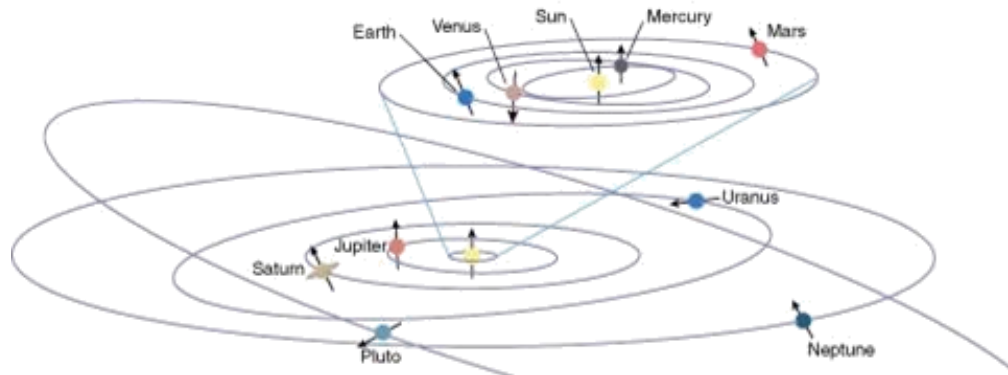
## CHAP I: Quelques rappels de mécanique

# Mécanique du point matériel

- Cinématique du point matériel
- Principes fondamentaux

## Le point matériel

- **Hypothèse** : Point doté d'une masse  $m$ 
  - abstraction de la forme de l'objet
  - abstraction de la répartition de la masse
  - hypothèse valide si :
    - le solide est petit devant son mouvement
    - on ne s'intéresse qu'au centre de masse sans se soucier des rotations (e.g. : ballon)



## Vecteur position

Avec les notations précédentes

→ repère cartésien :  $\underline{OM} = \underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3 = x_i \underline{e}_i$

→ repère cylindrique :  $\underline{OM} = r \underline{e}_r + z \underline{e}_z$

→ repère sphérique :  $\underline{OM} = r \underline{e}_r$

**Vecteur vitesse** = variation du vecteur position dans le temps

→ repère cartésien (fixe) :  $\underline{v} = \underline{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \frac{d(\underline{OM})}{dt} = \frac{d(x_i \underline{e}_i)}{dt} = \frac{d(x_i)}{dt} \underline{e}_i = \dot{x}_i \underline{e}_i$

→ repère cylindrique (mobile) :  $\underline{v} = \frac{d(\underline{OM})}{dt} = \frac{d(r \underline{e}_r + z \underline{e}_z)}{dt} = \frac{dr}{dt} \underline{e}_r + r \frac{d\underline{e}_r}{dt} + \frac{dz}{dt} \underline{e}_z + z \cancel{\frac{d\underline{e}_z}{dt}}$   

$$= \dot{r} \underline{e}_r + r \frac{d\underline{e}_r}{dt} + \dot{z} \underline{e}_z$$

$$\underline{e}_r = \cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2 \Rightarrow \frac{d\underline{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \underline{e}_\theta \Rightarrow \boxed{\underline{v} = \underline{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \frac{d(\underline{OM})}{dt} = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\theta} \underline{e}_\theta + \dot{z} \underline{e}_z}$$

**Vecteur accélération** = variation du vecteur vitesse dans le temps

→ même démarche que précédemment : le repère est mobile !

→ repère cartésien (fixe) :  $\underline{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \frac{d\underline{v}(M)_{/\mathcal{R}}}{dt} = \frac{d^2 \underline{OM}}{dt^2} = \dot{v}_i \underline{e}_i = \ddot{x}_i \underline{e}_i$

→ repère cylindrique (mobile) :  $\underline{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \left( \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \right) \underline{e}_r + \left( 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \right) \underline{e}_\theta + \ddot{r} \underline{e}_z$

→ repère sphérique (moins drôle ☹) :

$$\begin{aligned} \underline{a}(M)_{/\mathcal{R}} = & \left( \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right) \underline{e}_r \\ & + \left( 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \right) \underline{e}_\theta \\ & + \left( r \ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta \right) \underline{e}_\varphi \end{aligned}$$



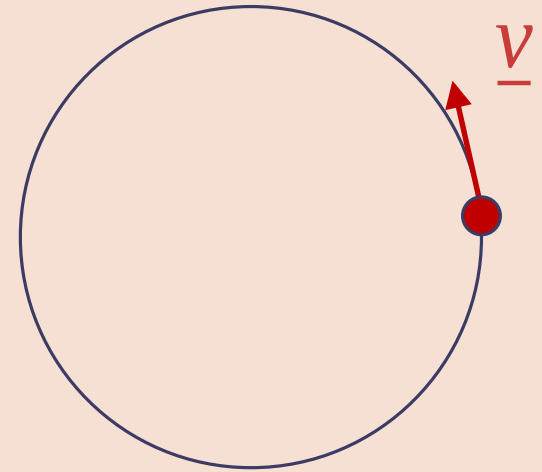
## Exemple

### Accélération centripète

On considère un point matériel en rotation autour d'un axe fixe

- Sa vitesse s'écrit naturellement :  $\underline{v} = v_\theta \underline{e}_\theta$

$$\begin{aligned}\underline{v} &= \frac{d(\underline{OM})}{dt} = \frac{d(r\underline{e}_r + z\underline{e}_z)}{dt} = \frac{dr}{dt}\underline{e}_r + r\frac{d\underline{e}_r}{dt} + \frac{dz}{dt}\underline{e}_z + z\cancel{\frac{d\underline{e}_z}{dt}} \\ &= \dot{r}\underline{e}_r + r\frac{d\underline{e}_r}{dt} + \dot{z}\underline{e}_z\end{aligned}$$



$$\underline{e}_r = \cos\theta \underline{e}_1 + \sin\theta \underline{e}_2$$

$$\underline{e}_\theta = -\sin\theta \underline{e}_1 + \cos\theta \underline{e}_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\underline{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \underline{e}_\theta \quad \Rightarrow$$

$$\underline{e}_z = \underline{e}_3$$

$$\underline{v} = \underline{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \frac{d(\underline{OM})}{dt} = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\theta}\underline{e}_\theta + \dot{z}\underline{e}_z$$

## Exemple

### Accélération centripète

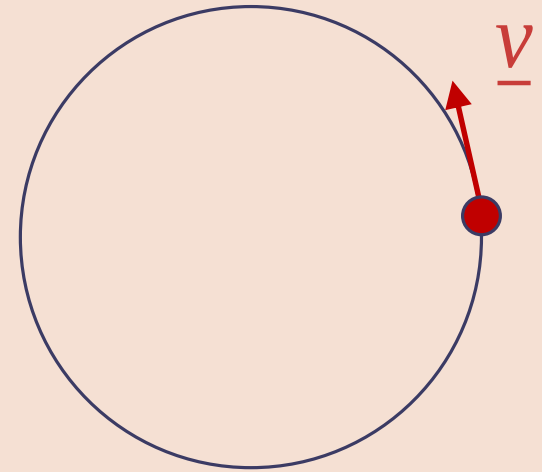
On considère un point matériel en rotation autour d'un axe fixe

- Sa vitesse s'écrit naturellement :  $\underline{v} = v_\theta \underline{e}_\theta$
- On peut maintenant identifier:

$$\underline{v} = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\theta} \underline{e}_\theta + \dot{z} \underline{e}_z \Rightarrow \boxed{v_\theta = r \dot{\theta}} \quad \boxed{\dot{r} = 0} \quad \boxed{\dot{z} = 0}$$

- Calculons l'accélération en coordonnées cylindriques :

$$\underline{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \frac{d^2 \underline{OM}}{dt^2} = \frac{d^2 (r \underline{e}_r + z \underline{e}_z)}{dt^2}$$



$$\Rightarrow \underline{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \left( \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \right) \underline{e}_r + \left( 2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} \right) \underline{e}_\theta + \ddot{z} \underline{e}_z$$

## Exemple

### Accélération centripète

On considère un point matériel en rotation autour d'un axe fixe

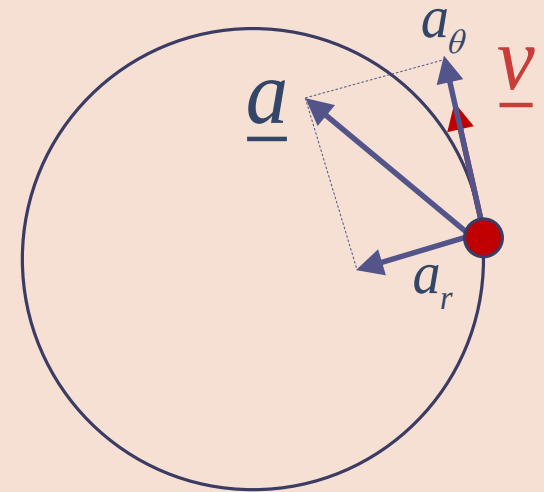
- Calculons l'accélération en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned}\underline{a}(M)_{/\mathcal{R}} &= \left( \cancel{r} - r\dot{\theta}^2 \right) \underline{e}_r + \left( 2\cancel{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \right) \underline{e}_\theta + \cancel{\dot{z}} \underline{e}_z \\ &= -r\dot{\theta}^2 \underline{e}_r + r\ddot{\theta} \underline{e}_\theta\end{aligned}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} \Rightarrow \boxed{\underline{a}(M)_{/\mathcal{R}} = -\frac{v_\theta^2}{r} \underline{e}_r + \frac{dv_\theta}{dt} \underline{e}_\theta}$$

accélération centripète : **toujours** présente lors d'une rotation !

accélération tangentielle : **seulement** si la  $v_\theta$  n'est pas constante



## CHAP I: Quelques rappels de mécanique

# Mécanique du point matériel

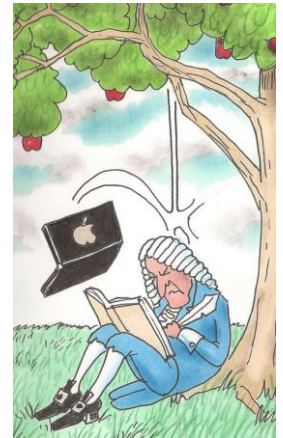
- Cinématique du point matériel
- Principes fondamentaux

- Définition : *quantité de mouvement* (en  $\text{kg.m.s}^{-1}$ ) :  $\underline{p} = m\underline{v}$
- Définition : *moment cinétique* (en  $\text{kg.m}^2.\text{s}^{-1}$ ) :  $\underline{L}_0 = \underline{OM} \wedge m\underline{v}$
- Définition : *moment* (en  $O$ ) d'une force  $\underline{F}$  (en  $\text{N.m}$ ) :  $\mathfrak{M}_o(\underline{F}) = \underline{OM} \wedge \underline{F}$

## Principe fondamental de la dynamique (PFD)

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = \frac{d(m\underline{v})}{dt} = m \frac{d\underline{v}}{dt} = m\underline{a} = \sum \underline{F}^{ext}$$

→ conséquence : dans le cas statique  $\sum \underline{F}^{ext} = \underline{0}$



## Théorème du moment cinétique (TMC)

- Dérivée du moment cinétique :  $\frac{d\underline{L}_0}{dt} = \underbrace{\frac{d\underline{OM}}{dt} \wedge m\underline{v}}_{\underline{0}} + \underline{OM} \wedge \underbrace{\frac{d(m\underline{v})}{dt}}_{\sum \underline{F}^{ext}} = \underline{OM} \wedge \sum \underline{F}^{ext}$

$$\frac{d\underline{L}_0}{dt} = \sum \mathfrak{M}_o(\underline{F}^{ext}) \rightarrow \text{conséquence : dans le cas statique } \sum \mathfrak{M}_o(\underline{F}^{ext}) = \underline{0}$$

## Exemple

### Mouvement du pendule

Période d'oscillation ? = de nombreuses méthodes!

- Calculons le moment cinétique :

$$\underline{v} = l \dot{\theta} \underline{e}_{\theta}$$

$$\underline{L}_0 = \underline{OM} \wedge m \underline{v} = l \underline{e}_r \wedge m l \dot{\theta} \underline{e}_{\theta} = m l^2 \dot{\theta} \underline{e}_z$$

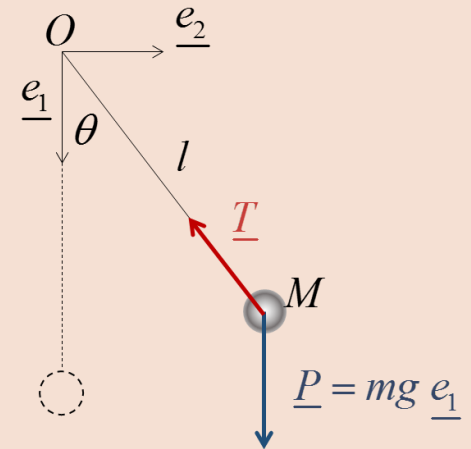
- Calculons le moment des deux efforts :

$$\mathfrak{M}_O(\underline{P}) = \underline{OM} \wedge \underline{P} = l \underline{e}_r \wedge m g (-\sin \theta \underline{e}_{\theta} + \cos \theta \underline{e}_r) = -l m g \sin \theta \underline{e}_z$$

$$\mathfrak{M}_O(\underline{T}) = \underline{OM} \wedge \underline{T} = \underline{0} \quad \text{car} \quad \underline{OM} \parallel \underline{T}$$

- Théorème du moment cinétique:

$$\frac{d}{dt} \left( m l^2 \dot{\theta} \underline{e}_z \right) = -l m g \sin \theta \underline{e}_z \Rightarrow \boxed{l \ddot{\theta} = -g \sin \theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$



- Définition : *travail d'une force (en J)* :  $\mathcal{W}_{A \rightarrow B}(\underline{F}) = \int_A^B \underline{F} \cdot d\underline{l}$ 
  - chemin  $A \rightarrow B$  = trajectoire réelle → « travail réel »
  - chemin  $A \rightarrow B \neq$  trajectoire réelle → « travail virtuel »

- Définition : *puissance d'une force (en W ou J.s<sup>-1</sup>)* :  $\mathcal{P} = \underline{F} \cdot \underline{v}$ 
  - lien entre travail et puissance ?

$$\mathcal{W}_{A \rightarrow B}(\underline{F}) = \int_{t_1}^{t_2} \underline{F} \cdot \frac{d\underline{l}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \underline{F} \cdot \underline{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P} dt$$

- Définition : *énergie cinétique (en J)* :  $\mathcal{K}(\underline{v}) = \frac{1}{2} m(\underline{v} \cdot \underline{v})$

**Théorème de l'énergie cinétique (TEC)** (démonstration à partir du PFD → poly):

$$\mathcal{K}(\underline{v}_A) - \mathcal{K}(\underline{v}_B) = \sum \mathcal{W}_{A \rightarrow B}(\underline{F}) \quad \text{ou encore} \quad \frac{d\mathcal{K}}{dt} = \sum \mathcal{P}(\underline{F}^{ext})$$

- Définition :

*force conservatrice = force dont le travail ne dépend pas du chemin suivi*

→ c'est le cas de la force de pesanteur :  $\mathcal{W}_{A \rightarrow B}(\underline{P}) = \int_A^B \underline{P} \cdot d\underline{l} = \underline{P} \cdot \int_A^B d\underline{l} = \underline{P} \cdot \underline{AB}$

→ on définit l'énergie potentielle telle que :  $\mathcal{W}_{A \rightarrow B}(\underline{P}) = E_p(A) - E_p(B)$

→ on réécrit le théorème de l'énergie cinétique

$$\mathcal{K}(\underline{v}_A) - \mathcal{K}(\underline{v}_B) = \sum \mathcal{W}_{A \rightarrow B}(\underline{F}) = \sum \mathcal{W}_{A \rightarrow B}(\underline{F}^{\text{C.}}) + \sum \mathcal{W}_{A \rightarrow B}(\underline{F}^{\text{N.C.}})$$

conservatives                      non-conservatives

$$\mathcal{K}(\underline{v}_A) - \mathcal{K}(\underline{v}_B) = - \sum_{A \rightarrow B} \Delta E_p + \sum \mathcal{W}_{A \rightarrow B}(\underline{F}^{\text{N.C.}})$$

- Définition : énergie mécanique  $E_M = \mathcal{K} + \sum E_p$

$$\Delta_{A \rightarrow B} E_M = \sum \mathcal{W}_{A \rightarrow B}(\underline{F}^{\text{N.C.}})$$

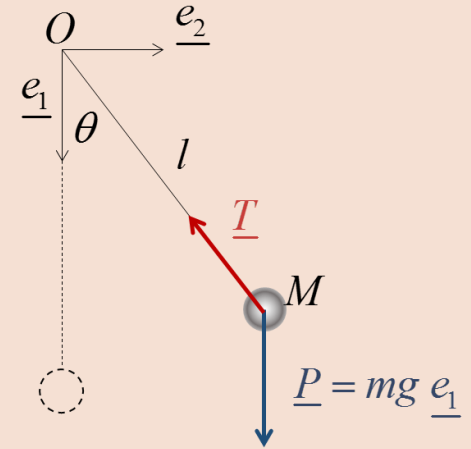
Variation d'énergie mécanique  
=  
travail des forces non conservatives



## Exemple

### Mouvement du pendule

- on a vu précédemment :  $\underline{v} = l \dot{\theta} \underline{e}_\theta$
- énergie cinétique :  $\mathcal{K}(\underline{v}) = \frac{1}{2} m (\underline{v} \cdot \underline{v}) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$
- travail de  $\underline{T}$  :  $\mathcal{W}_{A \rightarrow B}(\underline{T}) = \int_A^B \underline{T} \cdot d\underline{l} = 0$  car  $\underline{T} \perp d\underline{l}$
- poids = force conservative  $\rightarrow$  conservation de l'énergie mécanique



$$\frac{dE_M}{dt} = \frac{d\mathcal{K}(\underline{v})}{dt} + \frac{dE_P}{dt} = 0 \quad E_P = -mgl \cos \theta + cste \Rightarrow \frac{dE_P}{dt} = mgl \dot{\theta} \sin \theta$$

- au final on retrouve :

$$\frac{d\mathcal{K}(\underline{v})}{dt} + \frac{dE_P}{dt} = 0 \Rightarrow ml^2 \ddot{\theta} + mgl \dot{\theta} \sin \theta = 0 \Rightarrow \boxed{l \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0}$$

## CHAP I: Quelques rappels de mécanique

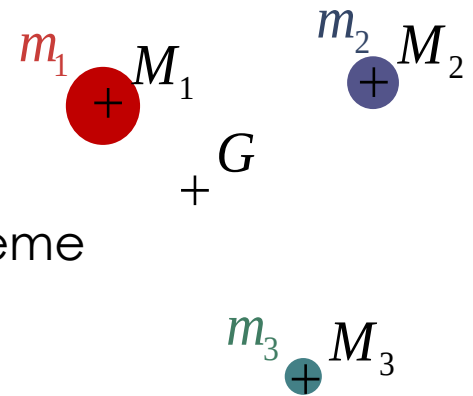
# Mécanique du solide indéformable

- Du système de points au solide indéformable
- Rotation du solide autour d'un axe fixe
- Cinématique du solide indéformable
- Dynamique du solide indéformable

## Le système de points

- Définition : *centre de masse du système de N points*

$$\sum_{i=1}^N m^{(i)} \underline{GM}^{(i)} = \underline{0} \quad : \text{concentre la masse du système}$$



→ représentation du système de points par son centre de masse

- Définition : *grandeur extensive : proportionnelle à la quantité de matière*

→ masse :

$$m = \sum_{i=1}^N m^{(i)}$$

→ quantité de mouvement :

$$\underline{p} = \sum_{i=1}^N \underline{p}^{(i)} = \sum_{i=1}^N m^{(i)} \underline{v}^{(i)}$$

→ moment cinétique :

$$\underline{L}_0 = \sum_{i=1}^N \underline{L}_0^{(i)} = \sum_{i=1}^N \left( \underline{OM}^{(i)} \wedge m^{(i)} \underline{v}^{(i)} \right)$$

→ énergie cinétique :

$$\mathcal{K} = \sum_{i=1}^N \mathcal{K}^{(i)} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2} m^{(i)} \left( \underline{v}^{(i)} \cdot \underline{v}^{(i)} \right) \right)$$

## Le système de points

- Interactions entre les points = *efforts intérieurs*
- Le nœud  $i$  est soumis à l'effort :

$$\underline{F}^{(i)} = \underline{F}^{(ext \rightarrow i)} + \underline{F}^{(int \rightarrow i)} = \underline{F}^{(ext \rightarrow i)} + \sum_{j \neq i} \underline{F}^{(j \rightarrow i)}$$

- Somme des efforts qui s'exercent sur le système de points :

$$\underline{F} = \underline{F}^{ext} + \underline{F}^{int} = \sum_{i=1}^N \underline{F}^{(ext \rightarrow i)} + \sum_{i=1}^N \underline{F}^{(int \rightarrow i)}$$

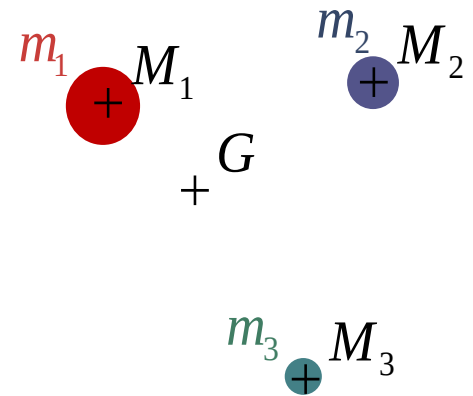
- Loi des actions réciproques : la somme des efforts intérieurs s'annulent !

$$\underline{F} = \underline{F}^{ext} + \cancel{\underline{F}^{int}} = \sum_{i=1}^N \underline{F}^{(ext \rightarrow i)}$$

- Conséquence : PFD et TMC valides

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = \sum \underline{F}^{ext}$$

$$\frac{d\underline{L}_0}{dt} = \sum \underline{\mathfrak{M}}_O(\underline{F}^{ext})$$

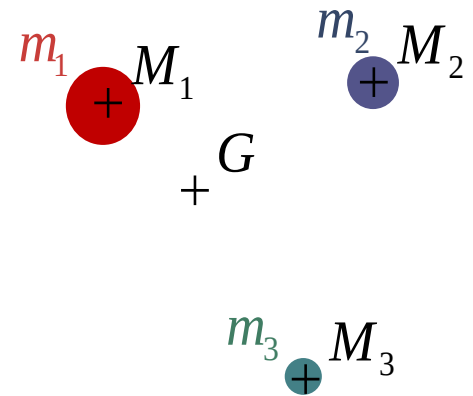


## Le système de points

- En revanche : les efforts intérieurs travaillent !!
  - théorèmes portant sur l'énergie non valides
  - exemple : théorème de l'énergie cinétique

$$\frac{d\mathcal{K}}{dt} = \sum \mathcal{P}(\underline{F}) = \sum \left( \mathcal{P}(\underline{F}^{ext}) + \mathcal{P}(\underline{F}^{int}) \right)$$

*Puissance des efforts intérieurs*



## Cas particulier : le solide indéformable

- Corps indéformable : l
  - les vitesses relatives s'annulent → les puissances des efforts intérieurs aussi

$$\mathcal{P}(\underline{F}^{int}) = \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^N \underline{F}^{(int \rightarrow i)}\right) = \sum_{i=1}^N \underline{F}^{(int \rightarrow i)} \cdot \cancel{\underline{v}^{(i \neq j \rightarrow i)}}_{(i \neq j \rightarrow i)}$$

- Nombre de points infini : somme → intégrales

$$M = \int_{\Omega} dm = \int_{\Omega} \rho d\Omega$$

*volume*

## Exemple

### Collision de particules

- Système de points

→ conservation de la quantité de mouvement :

$$m^A \underline{v}^A(t < t_0) + m^B \underline{v}^B(t < t_0) = m^A \underline{v}^A(t > t_0) + m^B \underline{v}^B(t > t_0)$$

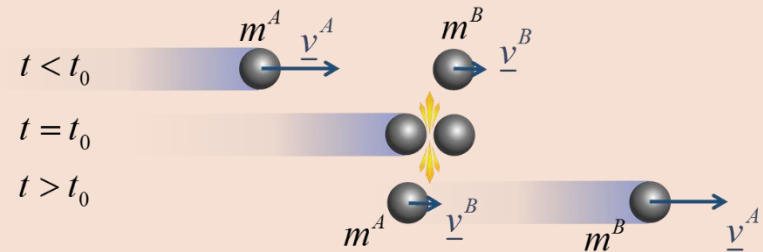
→ 1 seule équation, deux inconnues!

- Hypothèse : particules indéformables = collision élastique

→ conservation de l'énergie cinétique

$$\frac{1}{2} m^A (\underline{v}^A \cdot \underline{v}^A)(t < t_0) + \frac{1}{2} m^B (\underline{v}^B \cdot \underline{v}^B)(t < t_0) = \frac{1}{2} m^A (\underline{v}^A \cdot \underline{v}^A)(t > t_0) + \frac{1}{2} m^B (\underline{v}^B \cdot \underline{v}^B)(t > t_0)$$

→ 2<sup>ème</sup> équation, deux inconnues : OK



## CHAP I: Quelques rappels de mécanique

# Mécanique du solide indéformable

- Du système de points au solide indéformable
- Rotation du solide autour d'un axe fixe
- Cinématique du solide indéformable
- Dynamique du solide indéformable

## Moment d'inertie d'un solide

- Définition du *moment cinétique* pour un solide :

$$\underline{L}_0 = \int_{\Omega} \underline{OM} \wedge \underline{v} \, dm$$

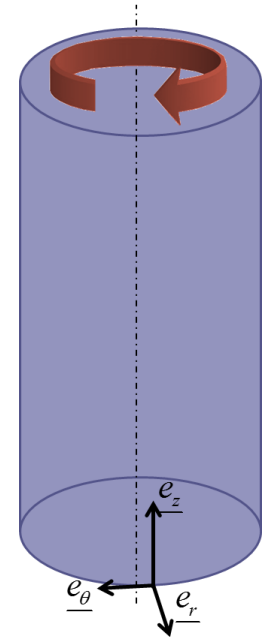
→ calculé au point O , sur l'axe de rotation

- Projection du vecteur *moment cinétique* sur l'axe ?

$$L_{0z} = \left( \int_{\Omega} \underline{OM} \wedge \underline{v} \, dm \right) \cdot \underline{e}_z$$

$$\begin{cases} \underline{OM} = r \underline{e}_r + z \underline{e}_z \\ \underline{v} = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\theta} \underline{e}_{\theta} + \dot{z} \underline{e}_z \end{cases} \quad \dots \Rightarrow \quad L_{0z} = \dot{\theta} \int_{\Omega} r^2 \, dm$$

- On introduit le moment d'inertie du solide  $I_{0z} = \int_{\Omega} r^2 \, dm \Rightarrow L_{0z} = \dot{\theta} I_{0z}$





## Moment d'inertie d'un solide



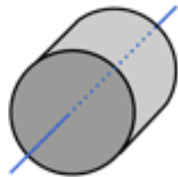
si  $\sum \mathcal{M}_O(\underline{F}^{ext}) = \underline{0}$  = Conservation du moment cinétique  $L_{0z} = \dot{\theta} I_{0z} = cste$

## Moment d'inertie d'un solide



## Moment d'inertie d'un solide

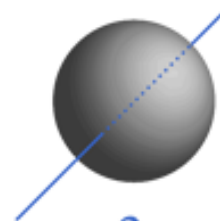
- Moments d'inerties des solides simples : disponibles dans les tables



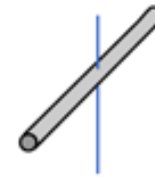
$$I = \frac{1}{2} MR^2$$



$$I = MR^2$$

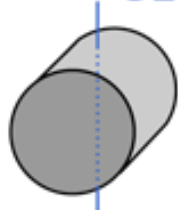


$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

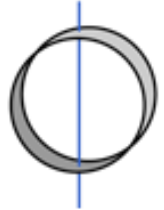


$$I = \frac{1}{12} ML^2$$

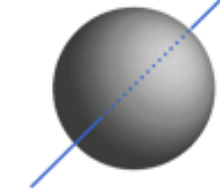
$$I = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{12} ML^2$$



$$I = \frac{1}{2} MR^2$$



$$I = \frac{2}{3} MR^2$$



$$I = \frac{1}{3} ML^2$$

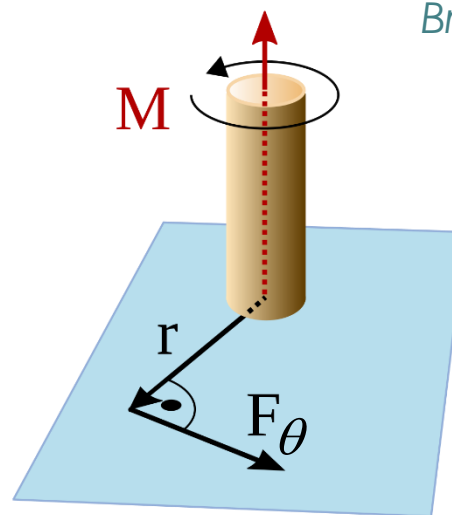


## Moment d'une force par rapport à un axe

- Rappel : moment (en O) d'une force  $\underline{F}$  (en N.m):  $\mathfrak{M}_O(\underline{F}) = \underline{OM} \wedge \underline{F}$
- Définition : moment d'une force par rapport à un axe  
→ projection de ce moment sur l'axe !

$$\begin{cases} \underline{OM} = r\underline{e}_r + z\underline{e}_z \\ \underline{F} = F_r\underline{e}_r + F_\theta\underline{e}_\theta + F_z\underline{e}_z \end{cases}$$

$$\dots \Rightarrow \mathfrak{M}_{Oz}(\underline{F}) = (\underline{OM} \wedge \underline{F}) \cdot \underline{e}_z = rF_\theta$$



Bras de levier

Composante de l'effort qui fait tourner le solide

## Théorème du moment cinétique

- Rappel : théorème du moment cinétique  $\frac{d\underline{L}_0}{dt} = \sum \mathfrak{M}_O(\underline{F}^{ext})$
- Solide en rotation autour de  $(0, \underline{e}_z)$  en raison de  $\underline{F}$  :  $\frac{dL_{0z}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{\theta} I_{0z}) = rF_\theta$
- Généralisé à plusieurs efforts  $\underline{F}^{ext(i)}$  associés aux bras de levier  $d^{(i)}$ :

$$\ddot{\theta} I_{0z} = \sum_i d^{(i)} F_\theta^{(i)} = \sum_i \mathfrak{M}_{Oz}(\underline{F}^{(i)})$$

$\ddot{\theta} = \dot{\Omega}$  : accélération angulaire

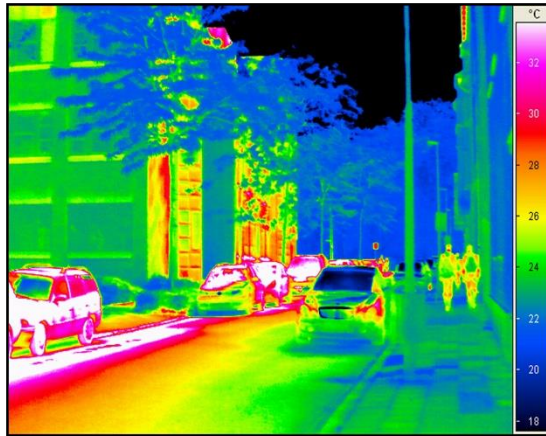


## CHAP I: Quelques rappels de mécanique

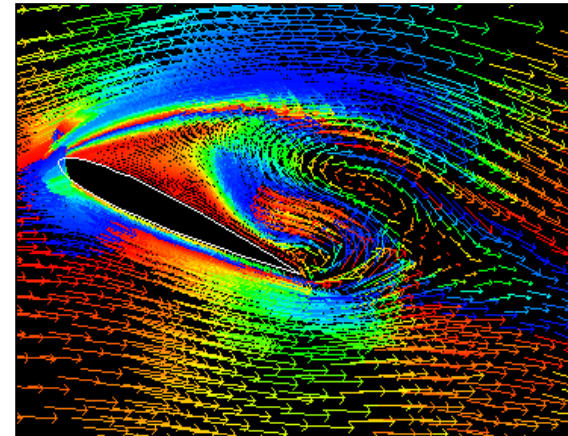
# Mécanique du solide indéformable

- Du système de points au solide indéformable
- Rotation du solide autour d'un axe fixe
- Cinématique du solide indéformable
- Dynamique du solide indéformable

## Notions de champs



Un champ scalaire:  
champ de température



Un champ vectoriel:  
champ de vitesse

- Champ de scalaire, champ de vecteurs :  
→ à tout point de l'espace  $\underline{x}$  est associé à scalaire / vecteur

- Les grandeurs précédentes sont des *champs* :  
$$\underline{v} = \underline{v}(\underline{x})$$
$$\underline{a} = \underline{a}(\underline{x})$$

## Distribution des vecteurs vitesse

Postulat (pas de démonstration) :

- On connaît le vecteur *rotation* d'un solide  $\underline{\Omega}$
- On peut connaître la vitesse **en tout point** du solide :

$$\underline{v}(N) = \underline{v}(M) + \underline{NM} \wedge \underline{\Omega}$$

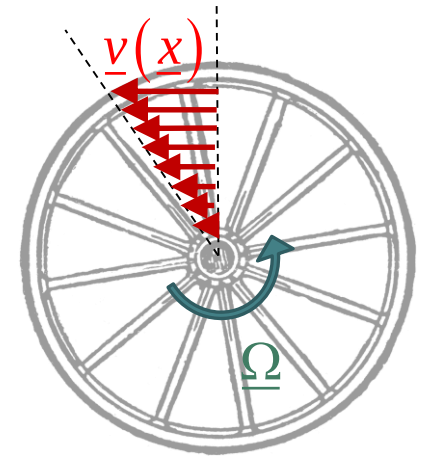
(ou « BABAR »  $\underline{v}(B) = \underline{v}(A) + \underline{BA} \wedge \underline{R}$  )

→ vecteur rotation  $\underline{\Omega}$  : 3 **ddl**, identique en tout point

→ vecteur vitesse  $\underline{v}$  : 3 **ddl**, différent en tout point

NB : On regroupe ces deux vecteurs en formant un « torseur » (notion non utilisée dans ce cours)

→ « rotation pure » : il existe au moins un point tel que  $\underline{v}(M) = \underline{0}$



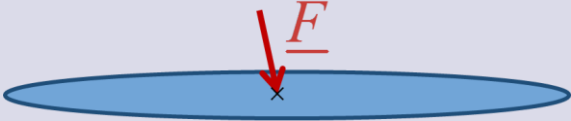
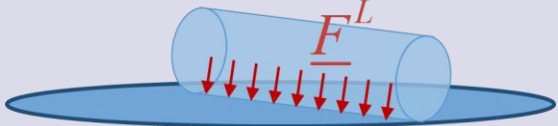
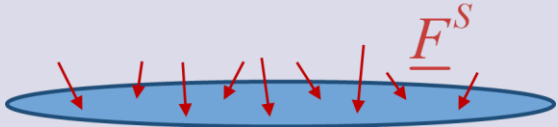
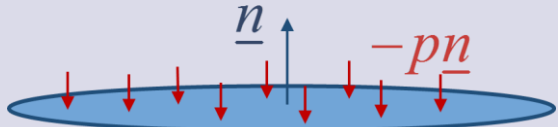
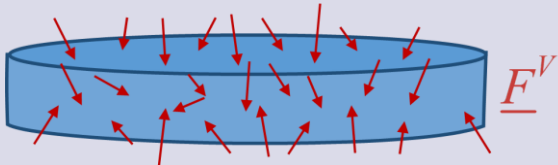


## CHAP I: Quelques rappels de mécanique

# Mécanique du solide indéformable

- Du système de points au solide indéformable
- Rotation du solide autour d'un axe fixe
- Cinématique du solide indéformable
- Dynamique du solide indéformable

## Les différents efforts extérieurs

|                                                    |                                                                                                       |                                                                                       |
|----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| Effort <b>ponctuel</b><br>(N)                      | $\underline{F}$                                                                                       |    |
| Effort <b>linéique</b><br>(N.m <sup>-1</sup> )     | $\underline{F}^L$ tel que $\underline{F} = \int_L \underline{F}^L dl$                                 |    |
| Effort <b>surfacique</b><br>(N.m <sup>-2</sup> )   | $\underline{F}^S$ tel que $\underline{F} = \int_{\Sigma} \underline{F}^S dS$                          |    |
| <b>Pression</b> (scalaire)<br>(N.m <sup>-2</sup> ) | $p$ tel que $\underline{F} = \int_{\Sigma} -p \underline{n} dS$<br>$\underline{n}$ : normale sortante |   |
| Effort <b>volumique</b><br>(N.m <sup>-3</sup> )    | $\underline{F}^V$ tel que $\underline{F} = \int_{\Omega} \underline{F}^V d\Omega$                     |  |

## Distribution des efforts

- Rappel : moment (en  $O$ ) d'une force  $\underline{F}$  (en N.m):  $\underline{\mathcal{M}}_O(\underline{F}) = \underline{OM} \wedge \underline{F}$
- Moment de cet effort en n'importe quel point ?

→ relation de Chasles :

$$\underline{\mathcal{M}}_P(\underline{F}) = \underline{PM} \wedge \underline{F} = (\underline{PO} + \underline{OM}) \wedge \underline{F} = \underline{PO} \wedge \underline{F} + \underline{OM} \wedge \underline{F} = \underline{PO} \wedge \underline{F} + \underline{\mathcal{M}}_O(\underline{F})$$

- Conséquence : **distribution** des moments

$$\underline{\mathcal{M}}_P(\underline{F}) = \underline{\mathcal{M}}_O(\underline{F}) + \underline{PO} \wedge \underline{F}$$

→ vecteur résultante  $\underline{F}$  : 3 **ddl**, identique en tout point

→ vecteur moment  $\underline{\mathcal{M}}(\underline{F})$  : 3 **ddl**, différent en tout point

NB : On regroupe ces deux vecteurs en formant un « torseur »  
(notion non utilisée dans ce cours)

## Le couple mécanique

- Définition :

couple mécanique  $\underline{\mathcal{C}}$  = ensemble d'efforts dont la **résultante** est **nulle** mais dont le **moment total** est **non nul**

- Conséquence : le couple ne dépend pas du point !! (démonstration : poly)



Couple d'efforts

$\neq$



Moment d'un effort

## Principe fondamental de la dynamique

Combinaison de :

- la conservation de la quantité de mouvement au centre de masse
- la conservation du moment cinétique

$$\frac{d \underline{p}}{dt} = \sum \underline{F}^{ext}$$

$$\frac{d \underline{L}_0}{dt} = \sum \mathfrak{M}_o (\underline{F}^{ext})$$

*NB : peut également être écrit sous forme de torseurs*

## Principe fondamental de la statique

- lorsqu'il n'y a pas de mouvement

$$\sum \underline{F}^{ext} = \underline{0}$$

$$\sum \mathfrak{M}_o (\underline{F}^{ext}) = \underline{0}$$

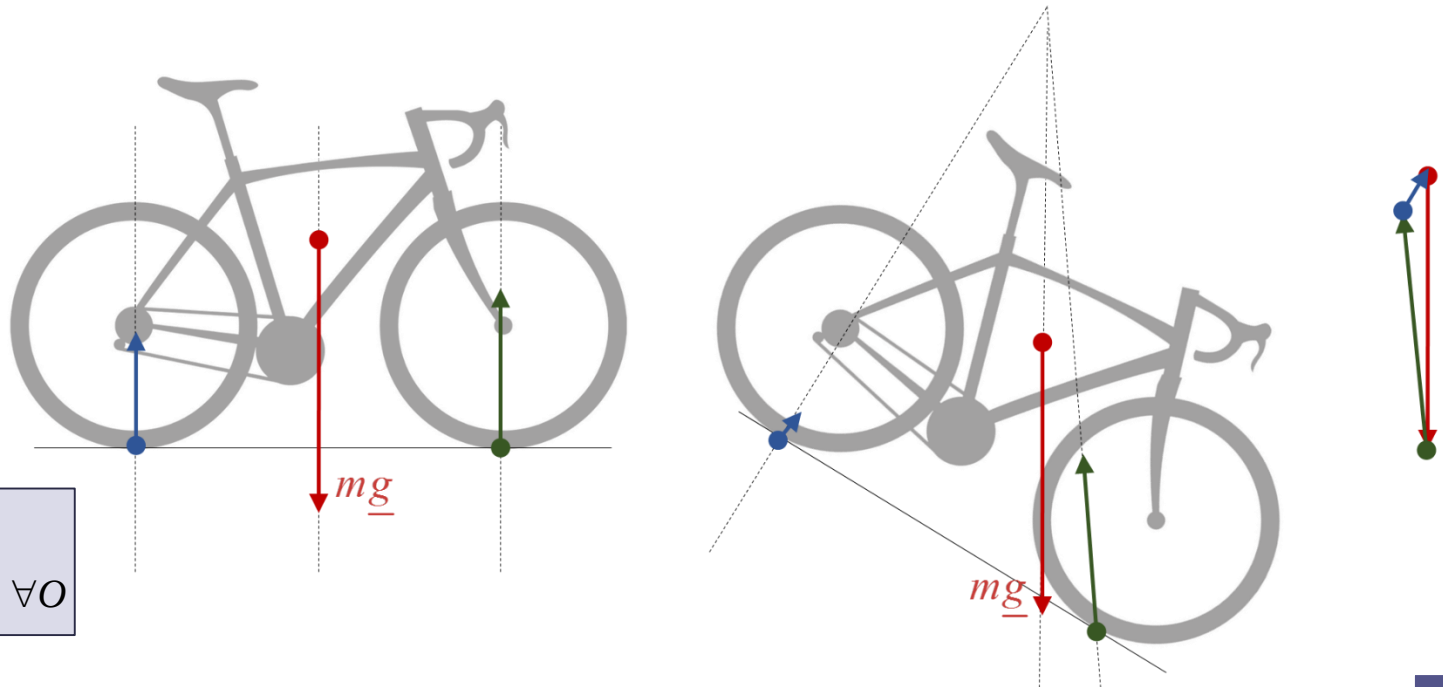
*NB : peut également être écrit sous forme de torseurs*

## Statique graphique

→ cas où le solide est soumis à **3 forces dans le même plan**

Deux règles:

- les trois efforts forment un triangle fermé
- les trois droites d'action des efforts sont parallèles **ou** concourantes



$$\begin{aligned} \underline{0} &= \sum \underline{F}^{ext} \\ \underline{0} &= \sum \underline{\mathcal{M}}_O(\underline{F}^{ext}) \quad \forall O \end{aligned}$$

Repères cartésien / cylindriques / (sphériques)

Conventions d'écriture du cours

Vecteurs position, vitesse, accélération

Distribution des vitesses et des moments

Lois fondamentales: PFS, PFD, TMC, TEC