

CHAPITRE II

Introduction au calcul tensoriel

EFFORT



TECHNICITE



RISQUE



OBJECTIF

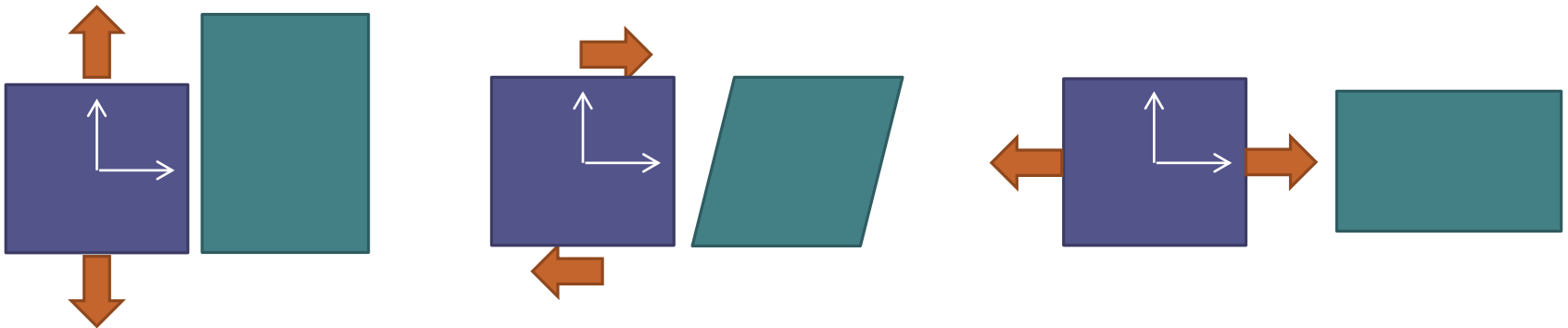
*Avoir le bagage
mathématique pour
attaquer la suite*

CHAP II: Introduction calcul tensoriel

Définition générale des tenseurs

- Pourquoi les tenseurs?
- Le produit tensoriel
- Changement de base d'un tenseur
- Algèbre tensorielle
- Ecriture matricielle
- Les tenseurs comme applications linéaires

- Objets mathématiques connus (**intrinsèques**) :
 - ✓ **scalaires** (pression, température...)
 - ✓ **vecteurs** (force, vitesse...)
- Ces objets ne sont **pas suffisants** pour décrire par exemple les efforts intérieurs qui s'exercent dans un milieu déformé



→ introduction de l'objet **intrinsèque** « **tenseur** », dont le vecteur et le scalaire sont des cas particuliers

CHAP II: Introduction calcul tensoriel

Définition générale des tenseurs

- Pourquoi les tenseurs?
- Le produit tensoriel
- Algèbre tensorielle
- Ecriture matricielle
- Les tenseurs comme applications linéaires

Définition générale du produit tensoriel

- Pour définir l'objet **tenseur** on introduit l'opération **produit tensoriel**
- L'opération se note $\otimes$ et peut s'appliquer dans le cas général à deux **espaces vectoriels** de natures différentes $\rightarrow \mathbb{R}^3$ dans notre cas

Interlude mathématique

- C'est un **produit** qui possède les propriétés de **bilinéarité**:

$\rightarrow$ **distributivité** de $\otimes$ par rapport à $+$:

$$\forall (\underline{x}, \underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \quad \begin{cases} \underline{x} \otimes (\underline{y}_1 + \underline{y}_2) = \underline{x} \otimes \underline{y}_1 + \underline{x} \otimes \underline{y}_2 \\ (\underline{y}_1 + \underline{y}_2) \otimes \underline{x} = \underline{y}_1 \otimes \underline{x} + \underline{y}_2 \otimes \underline{x} \end{cases}$$

$\rightarrow$ **associativité** de $\otimes$ par rapport au produit extérieur :

$$\forall (\underline{x}, \underline{y}, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \quad (\alpha \underline{x}) \otimes \underline{y} = \underline{x} \otimes (\alpha \underline{y}) = \alpha (\underline{x} \otimes \underline{y})$$



Définition générale du produit tensoriel

- Le produit tensoriel $\underline{x} \otimes \underline{y}$ crée un élément appartenant à $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$
- La **base** de ce nouvel espace se définit

$$\left. \begin{array}{l} \underline{x} \text{ est écrit dans la base } \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \\ \underline{y} \text{ est écrit dans la même base} \end{array} \right\} \underline{x} \otimes \underline{y} \text{ a pour base } \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

Expression analytique de $\underline{x} \otimes \underline{y}$

- en raison de la **bilinéarité** du produit tensoriel :

$$\left. \begin{array}{l} \underline{x} = x_i \underline{e}_i \\ \underline{y} = y_j \underline{e}_j \end{array} \right\} \underline{x} \otimes \underline{y} = (x_i \underline{e}_i) \otimes (y_j \underline{e}_j) = x_i y_j (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$$

- répétition sur les indices : **9 composantes** $\underline{x} \otimes \underline{y} = x_i y_j (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) = T_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$

On peut étendre ce qui précède au produit de plusieurs vecteurs:

$$(\underline{x} \otimes \underline{y}) \otimes \underline{z} = \underline{x} \otimes (\underline{y} \otimes \underline{z}) = \underline{x} \otimes \underline{y} \otimes \underline{z} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$$

On appelle tenseur d'ordre n sur $\mathbb{R}^3$ tout élément de l'espace:

$$\underbrace{\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \dots \otimes \mathbb{R}^3}_n$$

Notation: si n n'est « pas trop grand », on souligne n fois le tenseur:

$$\underline{\underline{T}} = \underline{x} \otimes \underline{y} \otimes \underline{z} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$$

- **Vecteur** = tenseur d'ordre 1 → souligné une fois
- **Scalaire** = tenseur d'ordre 0 → non souligné
- **Tenseur** quelconque **d'ordre n** → noté **$\mathbf{T}^n$**

CHAP II: Introduction calcul tensoriel

Définition générale des tenseurs

- Pourquoi les tenseurs?
- Le produit tensoriel
- Algèbre tensorielle
- Ecriture matricielle
- Les tenseurs comme applications linéaires

Addition tensorielle

- Soient par exemple deux tenseurs d'ordre 3:

$$\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \quad \underline{\underline{B}} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$$

→ Le tenseur $\underline{\underline{S}}$ est la **somme** des tenseurs $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ ssi ses composantes dans la base de $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ sont:

$$S_{ijk} = A_{ijk} + B_{ijk} \quad (\text{pas de sommation sur les indices})$$

= notation **indicielle**

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$$

= notation **tensorielle**

- Généralisation** immédiate à des tenseurs de **même** ordre n

Multiplication tensorielle

- Soient par exemple deux tenseurs d'ordre 4 et 2:

$$\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \quad \underline{\underline{B}} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$$

→ Le produit tensoriel de ces deux tenseurs peut s'écrire:

$$P_{ijklmn} = A_{ijkl} B_{mn} \quad = \text{notation } \textbf{indicielle}$$

$$\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{A}} \otimes \underline{\underline{B}} \quad = \text{notation } \textbf{tensorielle}$$

- Généralisation** immédiate à des tenseurs d'ordres m et n :
→ le produit est un tenseur d'ordre $m+n$

Produit contracté une fois (ou simplement contracté) :

- Soient par exemple deux tenseurs d'ordre 4 et 2:

$$\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \quad \underline{\underline{B}} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$$

→ Le produit **simplement contracté** de ces deux tenseurs s'écrit:

$$P_{ijkm} = A_{ijkl} B_{lm} = A_{ijk1} B_{1m} + A_{ijk2} B_{2m} + A_{ijk3} B_{3m} = \text{notation } \textbf{indicielle}$$

$$\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \text{notation } \textbf{tensorielle}$$

→ ce produit s'obtient en *contractant* un indice

- Généralisation** immédiate à des tenseurs d'ordres m et n :
→ le produit simplement contracté est un tenseur d'ordre $m+n-2$

Produit contracté deux fois (ou doublement contracté) :

- Soient par exemple deux tenseurs d'ordre 4 et 2:

$$\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \quad \underline{\underline{B}} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$$

→ Le produit **doublement contracté** de ces deux tenseurs s'écrit:

$$P_{ij} = A_{ijkl} B_{kl} = A_{ij11} B_{11} + A_{ij12} B_{12} + \dots + A_{ij33} B_{33} = \text{notation } \textbf{indicielle}$$

$$\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} = \text{notation } \textbf{tensorielle}$$

→ ce produit s'obtient en *contractant* deux indices

- Généralisation** immédiate à des tenseurs d'ordres m et n :
→ le produit doublement contracté est un tenseur d'ordre $m+n - 4$

CHAP II: Introduction calcul tensoriel

Définition générale des tenseurs

- Pourquoi les tenseurs?
- Le produit tensoriel
- Algèbre tensorielle
- Ecriture matricielle
- Les tenseurs comme applications linéaires

Ecriture matricielle des tenseurs d'ordre 1 et 2:

- Un **vecteur** est un objet **intrinsèque** et possède des **composantes**, projetées sur une base, qui s'organisent sous la forme d'une colonne:

$$[\underline{x}]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

→ **notation**: « matrices des composantes de $\underline{x}$ dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ »

- De la même manière, un tenseur est un objet **intrinsèque** (=indépendante du repère) qui possède des **composantes scalaires**
- Dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ on peut l'écrire: $\underline{\underline{T}} = T_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$

Ecriture matricielle des tenseurs d'ordre 1 et 2:

- Sommation sur les indices → 9 composantes scalaires

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{T}} = & T_{11} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + T_{12} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + T_{13} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \dots \\
 & T_{21} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + T_{22} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + T_{23} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \dots \\
 & T_{31} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1 + T_{32} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2 + T_{33} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3
 \end{aligned}$$

- Dans ce repère**, les **composantes** du tenseur peuvent s'organiser sous la forme d'une **matrice** 3x3

Lors d'un changement de base:

- **quantité physique** décrite par le tenseur **identique**
- **matrice des composantes** du tenseur **différente**

Ecriture matricielle des tenseurs d'ordre 1 et 2:

- Par convention:



- Les **composantes** de $\underline{\underline{T}}$ dans $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ s'organisent donc:

$$\left[\underline{\underline{T}} \right]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)} = \text{Mat} \left(\underline{\underline{T}}, (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3) \right) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

- Lorsque la base est **évidente**, on pourra se limiter à la notation $\left[\underline{\underline{T}} \right]$

Conclusion : tout ce que vous savez sur les matrices se transposent aux tenseur d'ordre 2



Écriture matricielle des opérations sur les tenseurs :

- On va omettre la notation $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ évidente
- **Question:** que deviennent les matrices représentatives de $\underline{\underline{T}}$ lorsqu'on effectue différentes opérations tensorielles?

→ **Somme de deux tenseurs:** $S_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \rightarrow [\underline{\underline{S}}] = [\underline{\underline{A}}] + [\underline{\underline{B}}]$
(pas de sommation sur les indices)

→ **Multiplication tensorielle de deux vecteurs:**

$$\underline{\underline{P}} = \underline{x} \otimes \underline{y} = x_i y_j \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \Rightarrow [\underline{\underline{P}}] = [\underline{x}][\underline{y}]^T = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix}$$

Ecriture matricielle des opérations sur les tenseurs :

→ Produit contracté de deux tenseurs d'ordre 2:

$$P_{ik} = A_{ij} B_{jk} \Rightarrow \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}}$$

→ Produit contracté d'un tenseur d'ordre 2 et d'un tenseur d'ordre 1:

$$\begin{cases} \underline{p} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{x} \\ p_i = T_{ij} x_j \end{cases} \Rightarrow \underline{p} = \underline{\underline{T}} \underline{x}$$

→ Les opérateurs **déterminant**, **trace**, **transposée**, **identité**, etc... s'étendent aux tenseurs d'ordre 2



CHAP II: Introduction calcul tensoriel

Définition générale des tenseurs

- Pourquoi les tenseurs?
- Le produit tensoriel
- Algèbre tensorielle
- Ecriture matricielle
- Les tenseurs comme applications linéaires

Les tenseurs d'ordre 2 comme applications linéaire:

- Au sens du produit contracté on considère l'application linéaire:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{T}} &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \underline{x} &\rightarrow \underline{\underline{T}} \cdot \underline{x}\end{aligned}$$

→ objet **intrinsèque** qui transforme un **vecteur** en un autre **vecteur**

Exemple

- Soit un tenseur $\underline{\underline{T}}$ dans $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ tel que $\underline{\underline{T}} = 2\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + 4\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2$
- Soit le vecteur $\underline{x} = 2\underline{e}_1$
- Le tenseur est une application qui à $\underline{x}$ associe le vecteur :

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{x} = T_{ij} x_j \underline{e}_i = (T_{11}x_1 + T_{12}\cancel{x_2})\underline{e}_1 + (\cancel{T_{21}x_1} + \cancel{T_{22}\cancel{x_2}})\underline{e}_2 = T_{11}x_1\underline{e}_1 = 4\underline{e}_1$$

Interlude mathématique

Symétrie d'un tenseur d'ordre 2:

- $\underline{\underline{T}}$ est un tenseur **symétrique** $\Leftrightarrow \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^T$
- $\underline{\underline{T}}$ est un tenseur **antisymétrique** $\Leftrightarrow \underline{\underline{T}} = -\underline{\underline{T}}^T$

Transposition du produit contracté:

- Par définition d'un tenseur transposé du produit $\boxed{\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}}$:

$$\underline{x} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{y} = \underline{x} \cdot (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) \cdot \underline{y} = \underline{y} \cdot \underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{x} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{T}}^T = (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})^T$$

- Réécriture en notation indicielle:

$$x_i T_{ij} y_j = x_i A_{ik} B_{kj} y_j = y_j T_{ji} x_i \quad \Rightarrow \quad T_{ji} = B_{jk} A_{ki}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\underline{T}}^T = \underline{\underline{B}}^T \cdot \underline{\underline{A}}^T}$$



Interlude mathématique

Application au produit $\underline{a} = \underline{b} \cdot \underline{\underline{T}}$:

$$\underline{a} = \underline{b} \cdot \underline{\underline{T}} \Rightarrow \underline{a} = \underline{a}^T = (\underline{b} \cdot \underline{\underline{T}})^T = \underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{b}^T = \underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{b}$$

- On vient de montrer la relation : $\underline{b} \cdot \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{b}$

→ Résultat largement utilisé dans le reste du cours...

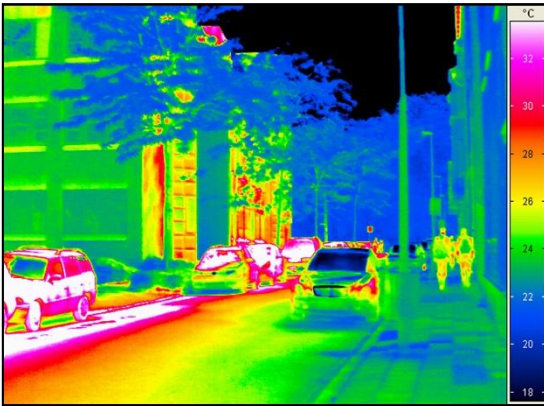
- Evident en notation indicielle : $\underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{b} = T_{ji} b_j \underline{e}_i = b_i T_{ij} \underline{e}_j = \underline{b} \cdot \underline{\underline{T}}$
- Notation pour la suite: $(\underline{\underline{T}}^{-1})^T = \underline{\underline{T}}^{-T}$



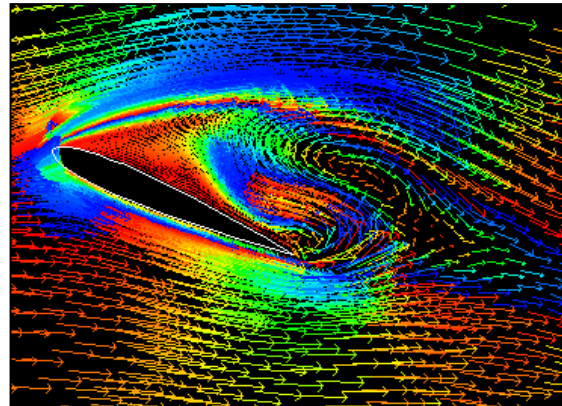
CHAP II: Introduction calcul tensoriel

Analyse tensorielle

- Champs de tenseurs
- Gradient d'un champ de tenseurs
- Divergence d'un champ de tenseurs
- Laplacien d'un champ de tenseurs
- Rotationnel d'un champ de tenseurs



Un champ scalaire:
champ de température



Un champ vectoriel:
champ de vitesses



Champ de tenseurs

- On appelle **champ de tenseurs** une application qui va d'un ouvert de l'espace physique (volume d'un milieu) vers un espace vectoriel d'un certain ordre
- Soit un point M de position $\underline{x} = \underline{OM}$
 - **champ de tenseurs** : $\underline{x} \in \Omega \rightarrow \mathbf{T}^n(\underline{x}) \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \dots \otimes \mathbb{R}^3$
 - il existe un tenseur a priori différent pour chaque point de l'ouvert

CHAP II: Introduction calcul tensoriel

Analyse tensorielle

- Champs de tenseurs
- Gradient d'un champ de tenseurs
- Divergence d'un champ de tenseurs
- Laplacien d'un champ de tenseurs
- Rotationnel d'un champ de tenseurs

Opérateur Nabla

- Pour la suite on introduit la notation de l'opérateur **Nabla**:

$$\underline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_i} \underline{e}_i$$

- Exemple d'utilisation: $\underline{\nabla} a = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \underline{e}_i \right) a = \frac{\partial a}{\partial x_i} \underline{e}_i = \frac{\partial a}{\partial x_1} \underline{e}_1 + \frac{\partial a}{\partial x_2} \underline{e}_2 + \frac{\partial a}{\partial x_3} \underline{e}_3$
- Parfois utilisé dans les livres : allégement de notation de dérivation
« ,i » = « dérivée partielle par rapport à x_i

$$\rightarrow \text{exemple : } \underline{\nabla} a = a_{,i} \underline{e}_i$$

Gradient d'un champ de tenseurs : définition intrinsèque

- Soit $\mathbf{T}^n(\underline{x})$ un champ de tenseurs d'ordre n sur un ouvert de l'espace
- Analyse locale de ce champ autour d'un point de coordonnées $\underline{x}$:

$$d\mathbf{T}^n = \mathbf{T}^n(\underline{x} + d\underline{x}) - \mathbf{T}^n(\underline{x})$$

- Il existe une application linéaire qui à $d\underline{x}$ fait correspondre $d\mathbf{T}^n$

→ champ de tenseurs d'ordre $n+1$ appelé **gradient** du champ $\mathbf{T}^n(\underline{x})$

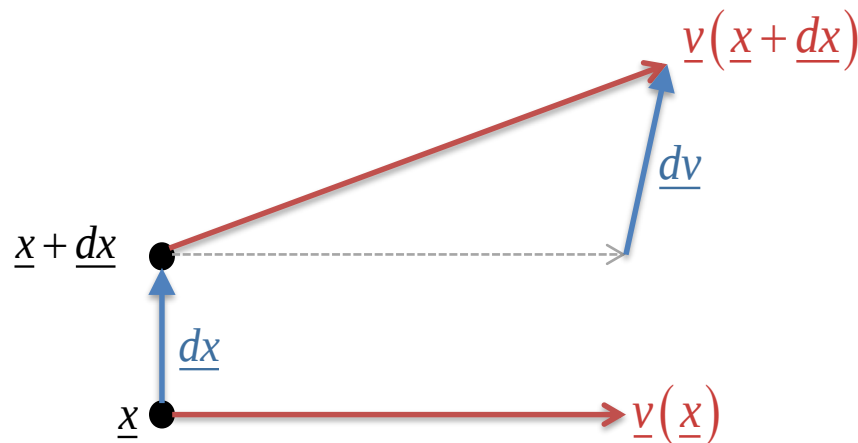
$$\begin{aligned} \text{Grad}(\mathbf{T}^n(\underline{x})) : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \dots \otimes \mathbb{R}^3 \\ d\underline{x} &\rightarrow d\mathbf{T}^n = \text{Grad}(\mathbf{T}^n(\underline{x})) \cdot d\underline{x} \end{aligned}$$

Gradient d'un champ de tenseurs : définition intrinsèque

- C'est l'approximation **linéaire** du champ $\mathbf{T}^n(\underline{x})$

→ « **Application linéaire tangente** » à $\mathbf{T}^n(\underline{x})$

- Application à un champ de tenseurs **d'ordre 1**:



$$\underline{dv} = \underline{\underline{Grad}}(\underline{v}(\underline{x})) \cdot \underline{dx}$$

Gradient d'un champ de tenseurs

- Calcul différentiel : $d\mathbf{T}^n = \frac{\partial \mathbf{T}^n}{\partial x_i} dx_i = \mathbf{T}^n_{,i} dx_i$
- **Dérivée partielle** d'un tenseur : $\frac{\partial \mathbf{T}^n}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{T}^n(\underline{x} + h\mathbf{e}_i) - \mathbf{T}^n(\underline{x})}{h}$

$$\begin{aligned} d\mathbf{T}^n &= \frac{\partial \mathbf{T}^n}{\partial x_i} dx_i = \mathbf{T}^n_{,i} dx_i \\ &= \text{Grad}(\mathbf{T}^n(\underline{x})) \cdot \underline{dx} = \text{Grad}(\mathbf{T}^n(\underline{x})) \cdot \underline{e}_i dx_i \end{aligned}$$

- Expression **intrinsèque** du gradient : $\frac{d\mathbf{T}^n}{\partial x_i} = \text{Grad}(\mathbf{T}^n(\underline{x})) \cdot \underline{e}_i$

- A partir de l'opérateur Nabla: $\underline{\text{Grad}} a = \underline{\nabla} a$
 $\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{a} = \underline{a} \otimes \underline{\nabla}$

Gradient d'un champ de tenseurs : expressions

Coordonnées **cartésiennes**

$$\underline{\text{Grad}} T = \frac{\partial T}{\partial x_1} \underline{e}_1 + \frac{\partial T}{\partial x_2} \underline{e}_2 + \frac{\partial T}{\partial x_3} \underline{e}_3 = T_{,i} \underline{e}_i$$

→ champ de vecteurs

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\text{Grad}}} T &= \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial T_1}{\partial x_3} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \\ &\quad \frac{\partial T_2}{\partial x_1} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial T_2}{\partial x_2} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial T_2}{\partial x_3} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \\ &\quad \frac{\partial T_3}{\partial x_1} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial T_3}{\partial x_2} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial T_3}{\partial x_3} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \\ &= T_{i,j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \end{aligned}$$

→ champ de tenseurs d'ordre 2

Coordonnées **cylindriques**

$$\underline{\text{Grad}} T = \frac{\partial T}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + \frac{\partial T}{\partial z} \underline{e}_z$$



$$\begin{aligned} \underline{\underline{\text{Grad}}} T &= \frac{\partial T_r}{\partial r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_r}{\partial \theta} - T_\theta \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_r}{\partial z} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + \\ &\quad \frac{\partial T_\theta}{\partial r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + T_r \right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_\theta}{\partial z} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \\ &\quad \frac{\partial T_z}{\partial r} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T_z}{\partial \theta} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_z}{\partial z} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \end{aligned}$$

Interlude mathématique

Décomposition en parties symétrique et antisymétrique

- A partir d'un tenseur d'ordre 2 $\underline{\underline{T}}$ quelconque, on peut définir:

$$\underline{\underline{T}}^{(1)} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}}^T) \quad \underline{\underline{T}}^{(2)} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} - \underline{\underline{T}}^T)$$

- La somme de ces deux tenseurs évidemment égale à $\underline{\underline{T}}$
- Calculons la transposée de $\underline{\underline{T}}^{(1)}$:

$$\left(\underline{\underline{T}}^{(1)}\right)^T = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}}^T + \underline{\underline{T}}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}}^T) \rightarrow \underline{\underline{T}}^{(1)} \text{ est } \mathbf{symétrique!}$$

- Calculons la transposée de $\underline{\underline{T}}^{(2)}$:

$$\left(\underline{\underline{T}}^{(2)}\right)^T = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}}^T - \underline{\underline{T}}) = -\frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} - \underline{\underline{T}}^T) \rightarrow \underline{\underline{T}}^{(2)} \text{ est } \mathbf{antisymétrique!}$$



Interlude mathématique

Décomposition en parties symétrique et antisymétrique

→ Un tenseur d'ordre 2 $\underline{\underline{T}}$ quelconque se décompose de façon **unique**:

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^{sym} + \underline{\underline{T}}^{antisym} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{\underline{T}}^{sym} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}}^T) \\ \underline{\underline{T}}^{antisym} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} - \underline{\underline{T}}^T) \end{cases}$$

- On montre facilement que la **trace** d'un tenseur d'ordre 2 **antisymétrique** est **nulle**

→ Il ne possède que 3 composantes indépendantes

→ Peuvent être organisées sous forme d'un **vecteur**
(cf vecteur tourbillon en fluide)



Gradient d'un champ vectoriel

- Décomposition partie **symétrique** / **antisymétrique**

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^{sym} + \underline{\underline{T}}^{antisym} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}}^T) + \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} - \underline{\underline{T}}^T)$$

- Gradient d'un champ de vecteurs: $\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{T}} = \frac{\partial T_i}{\partial x_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$

→ Décomposition $\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\Omega}}$ avec

$$\begin{cases} \underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{T}} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{T}})^T) = \underline{\underline{D}}^T \\ \underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{T}} - (\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{T}})^T) = -\underline{\underline{\Omega}}^T \end{cases}$$

- Propriétés du produit contracté:

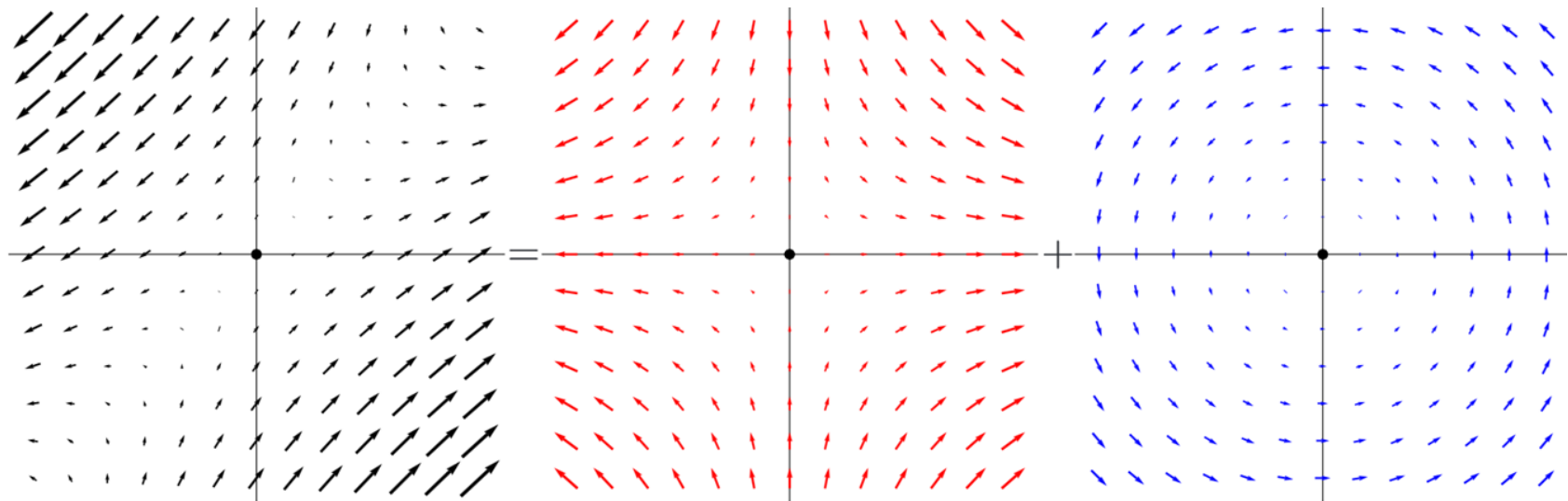
$$d\underline{\underline{T}} = (\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{T}}) \cdot d\underline{x} = \underline{\underline{D}} \cdot d\underline{x} + \underline{\underline{\Omega}} \cdot d\underline{x}$$

Déformation locale du milieu

Rotation locale du milieu

Gradient d'un champ vectoriel

- Illustration : **gradient d'un champ de vecteurs** autour de l'origine



Approximation linéaire
autour de l'origine d'un
champ de vecteurs

Partie **symétrique**:
déformation locale

Partie **antisymétrique**:
rotation locale

PLAUT, E. Mécanique des Milieux Continus. Cours de l'école des Mines de Nancy 2011.

CHAP II: Introduction calcul tensoriel

Analyse tensorielle

- Champs de tenseurs
- Gradient d'un champ de tenseurs
- Divergence d'un champ de tenseurs
- Laplacien d'un champ de tenseurs
- Rotationnel d'un champ de tenseurs

Divergence d'un champ de tenseurs : définition intrinsèque

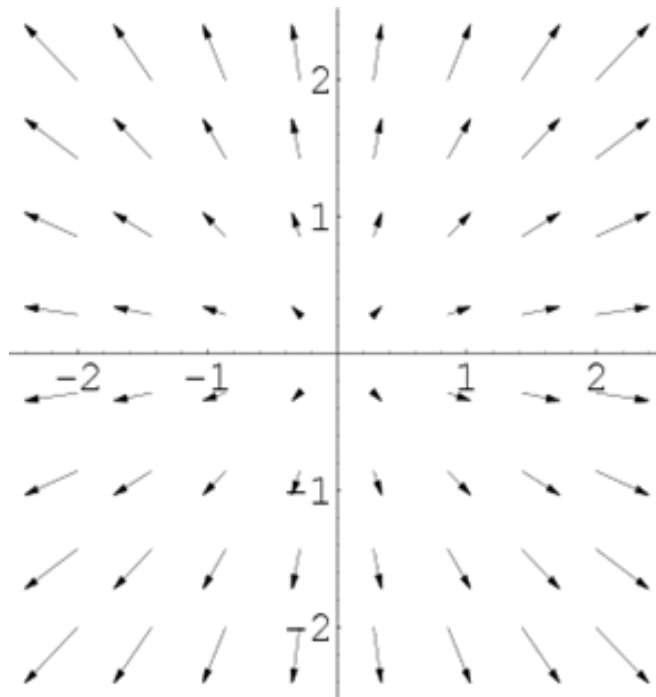
- Soit $\mathbf{T}^n(\underline{x})$ un champ de tenseurs d'ordre $n \geq 1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$
- Le gradient de $\mathbf{T}^n(\underline{x})$ est un champ de tenseurs d'ordre $n+1 \geq 2$
- On définit la **divergence** de $\mathbf{T}^n(\underline{x})$ de la façon suivante:

$$\text{Div}(\mathbf{T}^n(\underline{x})) = \text{Grad}(\mathbf{T}^n(\underline{x})) : \underline{I}$$

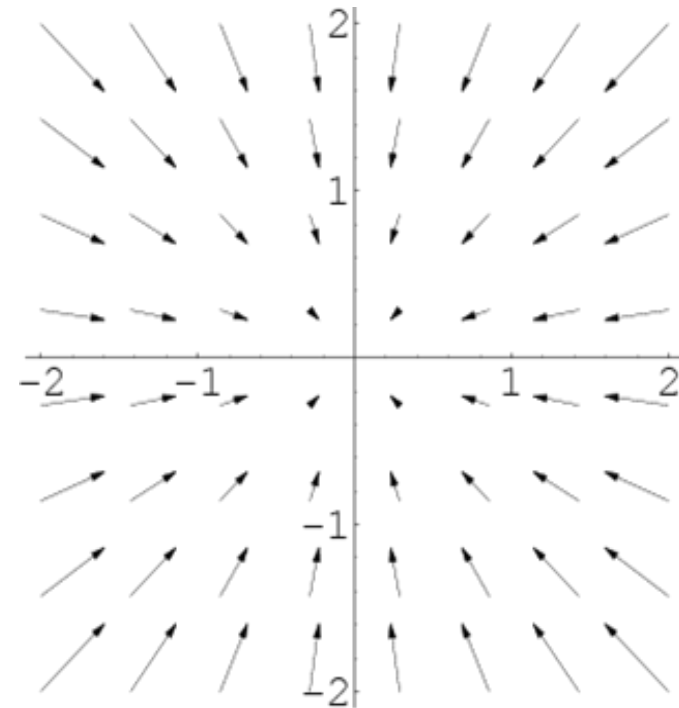
- Définition du produit doublement contracté: la divergence de $\mathbf{T}^n(\underline{x})$ est un tenseur d'ordre $(n+1)+2-4=n-1$

Divergence d'un champ vectoriel

- Un champ de vecteurs $\underline{T}(\underline{x}) \rightarrow$ **divergence** = champ **scalaire**



$$\text{Div } \underline{T}(0) > 0$$



$$\text{Div } \underline{T}(0) < 0$$

Divergence d'un champ de tenseurs

- Pour un champ de **vecteurs**, on a la relation:

$$\underline{\text{Div}} \underline{T} = \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{T} : \underline{\underline{I}} = \text{Tr}(\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{T}) = \frac{\partial T_i}{\partial x_i}$$

- Pour un champ **de tenseurs d'ordre 2**, on a la relation:

$$\underline{\underline{\text{Div}}} \underline{\underline{T}} = \left(\underline{\underline{\text{Grad}}}(\underline{\underline{T}}) \right) : \underline{\underline{I}} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \underline{e}_i$$

- En utilisant l'opérateur **Nabla** il vient:

$$\underline{\text{Div}} \underline{T} = \underline{T} \cdot \underline{\nabla} = \frac{\partial T_i}{\partial x_i}$$

$$\underline{\underline{\text{Div}}} \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \underline{e}_i$$

Interlude mathématique

Divergence d'un champ de tenseurs: propriétés

- Les relations suivantes seront souvent utilisées:

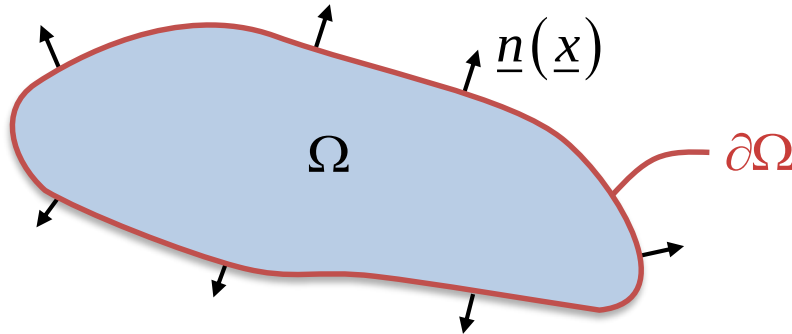
$$\text{Div}(\alpha \underline{T}) = \alpha \text{Div}(\underline{T}) + \underline{T} \cdot \underline{\text{Grad}}(\alpha)$$

Démonstration:
$$\text{Div}(\alpha \underline{T}) = \frac{\partial(\alpha T_i)}{\partial x_i} = T_i \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} + \alpha \frac{\partial(T_i)}{\partial x_i} = \underline{T} \cdot \underline{\text{Grad}}(\alpha) + \alpha \text{Div}(\underline{T})$$

Pour l'ordre supérieur:
$$\text{Div}(\underline{T} \cdot \underline{t}) = \frac{\partial(T_{ij} t_j)}{\partial x_i} = T_{ij} \frac{\partial t_j}{\partial x_i} + t_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} = \underline{T} : \underline{\underline{\text{Grad}}}(\underline{t}) + \underline{t} \cdot \underline{\text{Div}} \underline{T}$$



Divergence d'un champ de tenseurs: formulation intégrale



$\underline{n}(\underline{x}) da$: élément de surface orienté

- Théorème de flux-divergence = **théorème de la divergence**
= formule de Stokes-Ostrogradski

Le flux de $\mathbf{T}^n$ à travers $\partial\Omega$ est égal à l'intégrale de la divergence de $\mathbf{T}^n$ sur tout le volume Ω

$$\int_{\Omega} \text{Div} \mathbf{T}^n d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{T}^n \cdot \underline{n} da$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_{\Omega} \text{Div}(\underline{T}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \underline{T} \cdot \underline{n} da \\ \int_{\Omega} \underline{\text{Div}}(\underline{T}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \underline{T} \cdot \underline{n} da \end{cases}$$

Divergence d'un champ de tenseurs : expressions

■ Coordonnées **cartésiennes**

$$\text{Div } \underline{T} = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} + \frac{\partial T_2}{\partial x_2} + \frac{\partial T_3}{\partial x_3} = T_{i,i}$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{Div } T} &= \left(\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} \right) \underline{e}_1 \\ &+ \left(\frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} \right) \underline{e}_2 \\ &+ \left(\frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \right) \underline{e}_3 \\ &= T_{ij,j} \underline{e}_i \end{aligned}$$

→ champ de scalaires

■ Coordonnées **cylindriques**

$$\text{Div } \underline{T} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rT_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial T_z}{\partial z}$$



$$\begin{aligned} \underline{\text{Div } T} &= \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (T_{rr} - T_{\theta\theta}) + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} \right) \underline{e}_r + \\ &\left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (T_{\theta r} + T_{r\theta}) + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} \right) \underline{e}_\theta + \\ &\left(\frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} T_{zr} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right) \underline{e}_z \end{aligned}$$

→ champ de vecteurs

CHAP II: Introduction calcul tensoriel

Analyse tensorielle

- Champs de tenseurs
- Gradient d'un champ de tenseurs
- Divergence d'un champ de tenseurs
- Laplacien d'un champ de tenseurs
- Rotationnel d'un champ de tenseurs

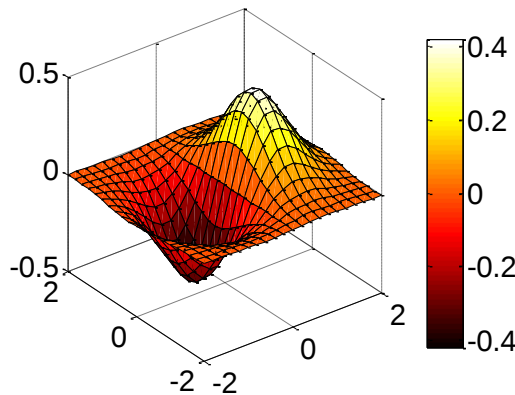
- Le **laplacien** $\Delta(\mathbf{T}^n(\underline{x}))$ d'un champ de tenseurs est égal à la **divergence** de son **gradient**

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^n(\underline{x}) \text{ d'ordre } n &\Rightarrow \text{Grad}(\mathbf{T}^n(\underline{x})) \text{ d'ordre } n+1 \\ &\Rightarrow \Delta(\mathbf{T}^n(\underline{x})) = \text{Div}(\text{Grad}(\mathbf{T}^n(\underline{x}))) \text{ d'ordre } n\end{aligned}$$

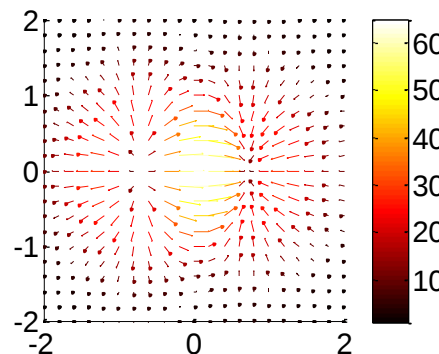
→ Le **laplacien** conserve l'ordre du tenseur

$$\Delta T = \text{Div}(\underline{\text{Grad}} T) = (\underline{\nabla} T) \cdot \underline{\nabla} = \nabla^2 T$$

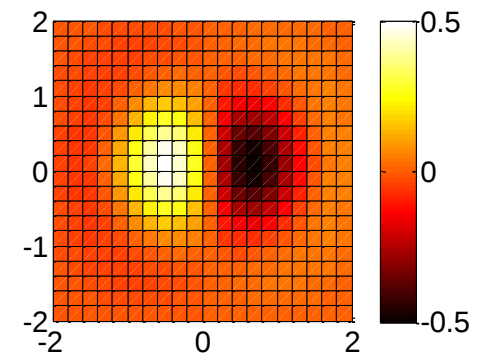
$$\underline{\Delta} \underline{T} = \underline{\text{Div}}(\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{T}) = (\underline{T} \otimes \underline{\nabla}) \cdot \underline{\nabla}$$



Fonction scalaire

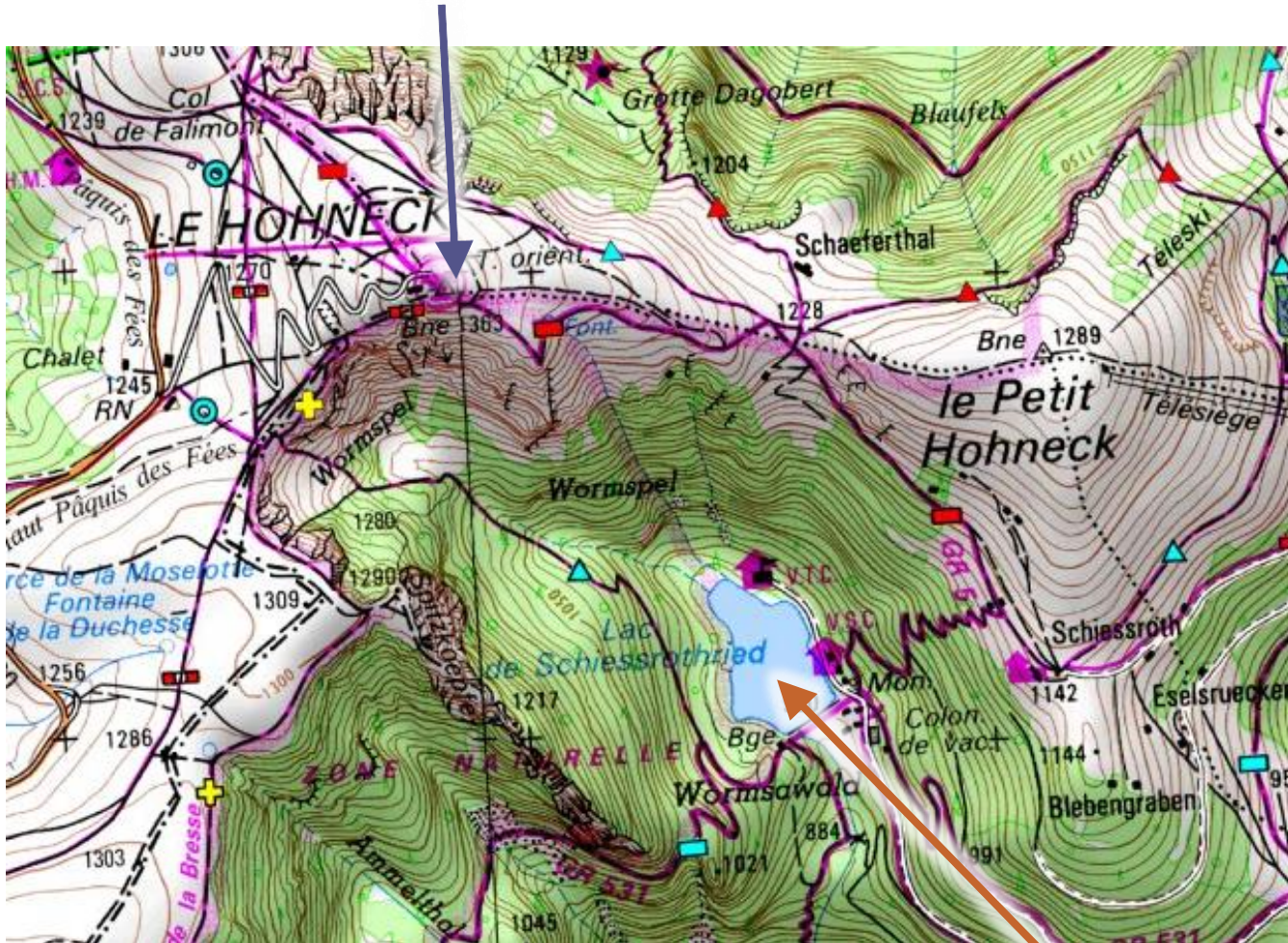


Gradient



Laplacien

Laplacien de l'altitude négatif



Laplacien de
l'altitude positif

CHAP II: Introduction calcul tensoriel

Analyse tensorielle

- Champs de tenseurs
- Gradient d'un champ de tenseurs
- Divergence d'un champ de tenseurs
- Laplacien d'un champ de tenseurs
- Rotationnel d'un champ de tenseurs

Définition du rotationnel d'un champ de vecteurs

- **Rotationnel** d'un champ de vecteurs: $\underline{\text{Rot}} \underline{T} = \underline{\nabla} \wedge \underline{T}$

→ Rotationnel d'un champ de vecteurs = champ de vecteurs

- Coordonnées **cartésiennes** :

$$\underline{\text{Rot}} \underline{T} = \left(\frac{\partial T_3}{\partial x_2} - \frac{\partial T_2}{\partial x_3} \right) \underline{e}_1 + \left(\frac{\partial T_1}{\partial x_3} - \frac{\partial T_3}{\partial x_1} \right) \underline{e}_2 + \left(\frac{\partial T_2}{\partial x_1} - \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \right) \underline{e}_3$$

- Coordonnées **cylindriques** :

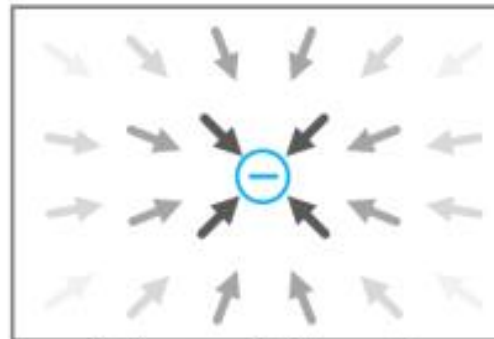
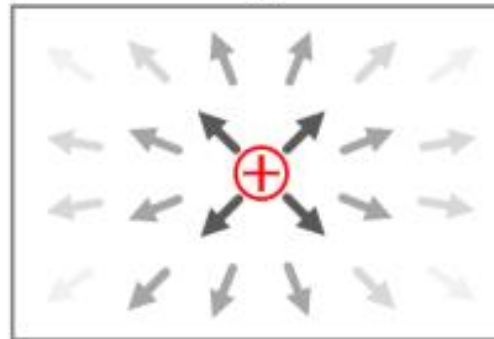
$$\underline{\text{Rot}} \underline{T} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T_z}{\partial \theta} - \frac{\partial T_\theta}{\partial z} \right) \underline{e}_r + \left(\frac{\partial T_r}{\partial z} - \frac{\partial T_z}{\partial r} \right) \underline{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r T_\theta}{\partial r} - \frac{\partial T_r}{\partial \theta} \right) \underline{e}_z$$

Gradient



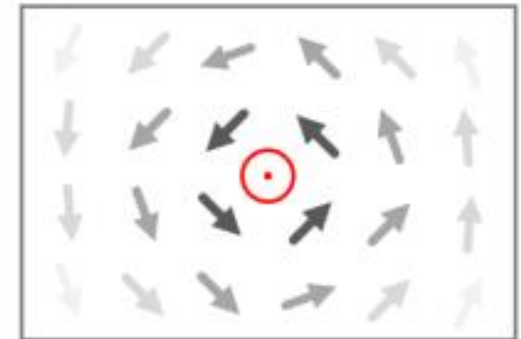
$\text{grad}(\text{scalar field}) = \text{vector}$

Divergence



$\text{div}(\text{vector field}) = \text{scalar}$

Curl



$\text{curl}(\text{vector field}) = \text{vector}$

https://e-magnetica.pl/doku.php/file/gradient_divergence_curl_magnetica_png

Notations : indicielles / tensorielles / matricielles

Tenseurs : définition, calcul, écriture matricielle

Opérations sur les tenseurs d'ordre 2

Opérateurs gradient, divergence, laplacien, rotationnel