

TD1 : éléments de réponses

- 1) Ecrire la résultante des forces de pression qui s'exercent sur le barrage

$$p = \rho_0 g (h - x_2)$$

$$\underline{F} = \int_{\partial\Omega} -p \underline{n} dS \text{ avec } \underline{n} = -\underline{e}_1$$

$$\underline{F} = \rho_0 g L \frac{h^2}{2} \underline{e}_1$$

- 2) Déterminer le poids du barrage et son point d'application

$$\underline{P} = -\rho L \frac{h^2}{2} g \underline{e}_2$$

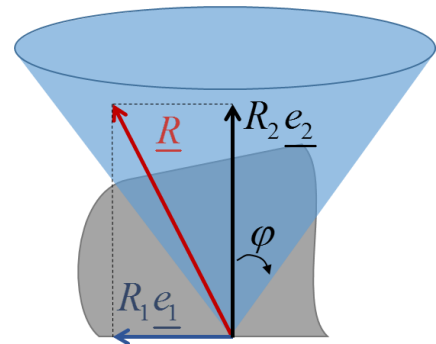
$$\underline{x}^G = \underline{OG} = \frac{1}{3} (\cancel{\underline{OO}} + \underline{OA} + \underline{OB}) = \frac{1}{3} (h \underline{e}_2 + h \underline{e}_1)$$

- 3) Ecrire l'équilibre des efforts et en déduire une condition nécessaire sur la masse volumique du barrage pour que le barrage ne glisse pas sur le socle rocheux

$$\underline{0} = \sum \underline{F}^{ext} = \underline{P} + \underline{F} + \underline{R}$$

$$\|R_1 \underline{e}_1\| \leq f \|R_2 \underline{e}_2\|$$

$$\rho \geq \frac{\rho_0}{f}$$



- 4) On considère cette condition respectée (il y a adhérence) : écrire la condition de non basculement du barrage.

$$\underline{P} = -\rho L \frac{h^2}{2} g \underline{e}_2$$

$$\underline{F} = \rho_0 g L \frac{h^2}{2} \underline{e}_1$$

$$\underline{R} = -\rho_0 g L \frac{h^2}{2} \underline{e}_1 + \rho L \frac{h^2}{2} g \underline{e}_2$$

Pour calculer le point d'application de la résultante des efforts pression $\underline{F}$, on peut chercher le point pour lequel l'effort $\underline{F}$ créé le même moment (autour de n'importe quel point) que le moment créé par l'ensemble des pressions appliquées.

$$\mathfrak{M}_O(\underline{p}\underline{e}_1) = \int_0^L \int_0^h (\underline{OM} \wedge \underline{p}\underline{e}_1) dx_2 dx_3 = \dots = -L\rho_0 g \frac{h^3}{6} \underline{e}_3$$

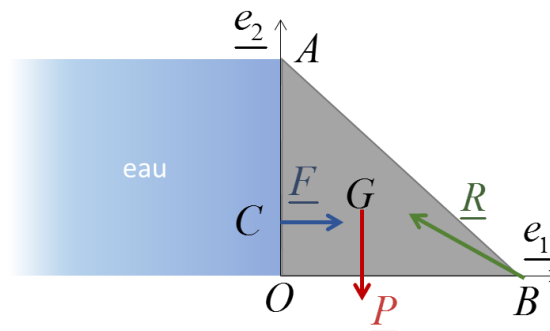
On appelle C le point d'application de la résultante $\underline{F}$. Le moment créé par cet effort sera évidemment :

$$\mathfrak{M}_O(\underline{F}) = -x_2^C \rho_0 g L \frac{h^2}{2} \underline{e}_3$$

En égalant ces deux quantités on trouve les coordonnées du point C :

$$\mathfrak{M}_O(\underline{F}) = \mathfrak{M}_O(\underline{p}\underline{e}_1) \Rightarrow x_2^C = \frac{h}{3}$$

Si le barrage se met à basculer, on comprend bien qu'il tournera autour du point B de telle sorte que le barrage sera soumis aux efforts suivants :



$$\underline{0} = \sum \mathfrak{M}_B(\underline{F}^{ext})$$

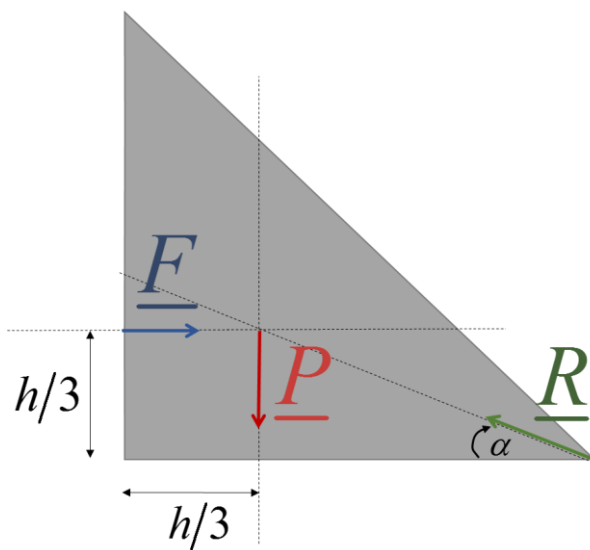
$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \rho_0 = 2\rho$$

5) Application numérique : *quid* d'un barrage en béton ? en sapin ? en acier ?

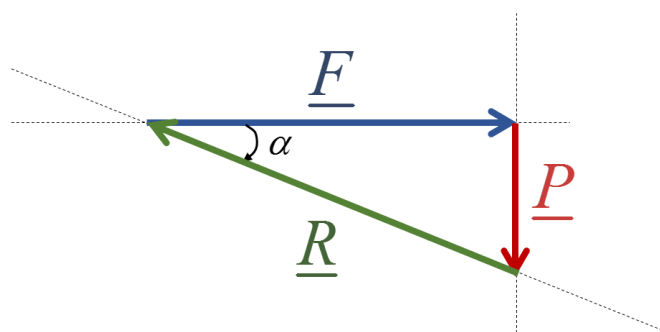
$$\rho_{\text{sapin}} = 450 \text{ kg / m}^3 \quad \rho_{\text{béton}} = 2200 \text{ kg / m}^3 \quad \rho_{\text{acier}} = 7800 \text{ kg / m}^3$$

La masse volumique de l'eau est évidemment $\rho_0 = 1000 \text{ kg / m}^3$. On observe ainsi que parmi les trois matériaux proposés ci-dessus, seuls le béton et l'acier permettent de respecter la condition $\rho_0 = 2\rho$.

6) Effectuer la même démarche en utilisant la statique graphique



$$\tan \alpha = \frac{h/3}{2h/3} = \frac{1}{2}$$



$$\tan \alpha = \frac{\|\underline{P}\|}{\|\underline{F}\|} = \frac{\cancel{\rho} \cancel{\frac{h^2}{2}}}{\cancel{\rho_0} \cancel{\frac{h^2}{2}}} = \frac{\rho}{\rho_0}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{2} \Rightarrow \rho_0 = 2\rho$$