

TD2 : éléments de réponse

Première partie : écoulement entre 2 plans infinis

- 1) Faire des hypothèses sur le champ de vecteurs vitesse lorsque l'écoulement est établi, pour arriver à une forme la plus réduite possible.**

Dans le cas le plus général, le champ de vecteurs vitesses associe une vitesse à chaque point de l'espace et s'écrit :

$$\underline{v} = v_1(x_1, x_2, x_3)\underline{e}_1 + v_2(x_1, x_2, x_3)\underline{e}_2 + v_3(x_1, x_2, x_3)\underline{e}_3$$

Écoulement établi :

$$\underline{v} = v_1(x_2, x_3)\underline{e}_1 + v_2(x_2, x_3)\underline{e}_2 + v_3(x_2, x_3)\underline{e}_3$$

Plans infinis :

$$\underline{v} = v_1(x_2)\underline{e}_1 + v_2(x_2)\underline{e}_2$$

- 2) Nous verrons plus tard que pour un fluide incompressible, la divergence du champ de vitesses est nécessairement nulle : montrer alors que $\underline{v} = v_1(x_2)\underline{e}_1 + K\underline{e}_2$**

$$\text{div}(\underline{v}(\underline{x})) = \frac{\cancel{\partial v_1(\underline{x})}}{\cancel{\partial x_1}} + \frac{\partial v_2(\underline{x})}{\partial x_2} + \frac{\cancel{\partial v_3(\underline{x})}}{\cancel{\partial x_3}} = \frac{\partial v_2(\underline{x})}{\partial x_2} = \frac{dv_2(\underline{x})}{dx_2}$$

$$\text{div}(\underline{v}(\underline{x})) = 0 \Rightarrow v_2(\underline{x}) = \text{Cste} = K$$

- 3) On fait l'hypothèse que le frottement implique une vitesse nulle au niveau des parois : traduire proprement cette condition.**

$$\begin{cases} v_1\left(x_2 = \pm \frac{h}{2}\right) = 0 \\ K = 0 \end{cases}$$

- 4) On se propose d'adopter une forme parabolique pour le champ de vitesses : proposer une forme en fonction de $v_{\max}$, la vitesse maximale du fluide.**

$$\underline{v} = v_1(x_2)\underline{e}_1 = (Ax_2^2 + Bx_2 + C)\underline{e}_1$$

$$v_1\left(x_2 = \frac{h}{2}\right) = v_1\left(x_2 = -\frac{h}{2}\right) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$v_1(x_2 = 0) = v_{\max} \Rightarrow C = v_{\max}$$

$$A = \frac{-4v_{\max}}{h^2}$$

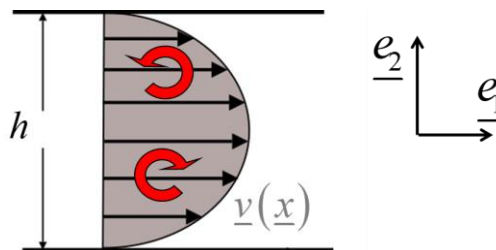
$$\underline{v} = v_1(x_2)\underline{e}_1 = \left(\frac{-4v_{\max}}{h^2} x_2^2 + v_{\max} \right) \underline{e}_1 = v_{\max} \left(1 - 4 \frac{x_2^2}{h^2} \right) \underline{e}_1$$

5) Nous verrons plus tard que l'écoulement d'un fluide visqueux entraîne un cisaillement au niveau de la paroi, proportionnel à la viscosité du fluide et au gradient du champ de vitesses. Calculer le gradient du champ de vitesses.

$$\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \frac{-8v_{\max} x_2}{h^2} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2$$

6) Les parties symétriques et antisymétriques de ce gradient correspondent aux vitesses de déformation et de rotation du fluide : calculer ces deux termes.

$$\begin{aligned} [\underline{\underline{d}}] &= [\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}}]^{\text{sym}} = \frac{1}{2} \left([\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}}] + [\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}}]^T \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{-4v_{\max} x_2}{h^2} & 0 \\ \frac{-4v_{\max} x_2}{h^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ [\underline{\underline{\Omega}}] &= [\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}}]^{\text{antisym}} = \frac{1}{2} \left([\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}}] - [\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}}]^T \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{-4v_{\max} x_2}{h^2} & 0 \\ \frac{4v_{\max} x_2}{h^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Le fait que les termes non-nuls soient selon $\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2$ et $\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1$ indique que les rotations du fluide se produisent dans le plan $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ uniquement.

7) Montrer que l'information sur la rotation du fluide est également contenue dans le rotationnel du champ de vitesses.

$$\underline{rot} \underline{v} = \underline{\nabla} \wedge \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{8v_{\max}x_2}{h^2} \end{pmatrix}$$

8) L'équation de Navier-Stokes, que nous verrons à la fin du cours, régit l'écoulement du fluide et fait intervenir le laplacien du vecteur vitesse : calculer ce laplacien.

$$\underline{\Delta} \underline{v} = \underline{div}(\underline{grad} \underline{v}) = \frac{-8v_{\max}}{h^2} \underline{e}_1$$

9) A partir du théorème de flux-divergence, retrouver la condition de conservation du débit volumique durant cet écoulement.

$$\int_{\Omega} \underline{div}(\underline{v}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \underline{v} \cdot \underline{n} da$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{S_e} v_1 da = \int_{S_s} v_1 da = Q_v}$$

10) Reprendre toutes les questions précédentes dans le cas d'une conduite cylindrique (en montrant notamment que $\underline{v} = v_z(r)\underline{e}_z$)

$$\underline{v} = v_r(r, \theta, z)\underline{e}_r + v_\theta(r, \theta, z)\underline{e}_\theta + v_z(r, \theta, z)\underline{e}_z$$

$$\underline{v} = v_r(r)\underline{e}_r + v_z(r)\underline{e}_z$$

$$\text{div } \underline{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow v_r = \frac{K}{r}$$

$$v_r(r=R) = \frac{K}{R} = 0 \Rightarrow K = 0$$

$$\underline{v} = v_z(r)\underline{e}_z = (Ar^2 + Br + C)\underline{e}_z$$

$$\text{conditions aux limites : } \underline{v} = v_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \underline{e}_z$$

$$\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}} = -\frac{2v_{\max}r}{R^2} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r$$

$$[\underline{\underline{d}}] = [\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}}]^{\text{sym}} = -\frac{v_{\max}r}{R^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\underline{\underline{\Omega}}] = [\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}}]^{\text{antisym}} = -\frac{v_{\max}r}{R^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\underline{\text{rot } \underline{v}}] = v_{\max} \left(\frac{2r}{R^2} \right) \underline{e}_\theta$$

$$\Delta \underline{v} = \underline{\text{div}}(\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}}) = \left(\frac{\partial(\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}})_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}})_{zr} \right) \underline{e}_z = -\frac{4v_{\max}}{R^2} \underline{e}_z$$