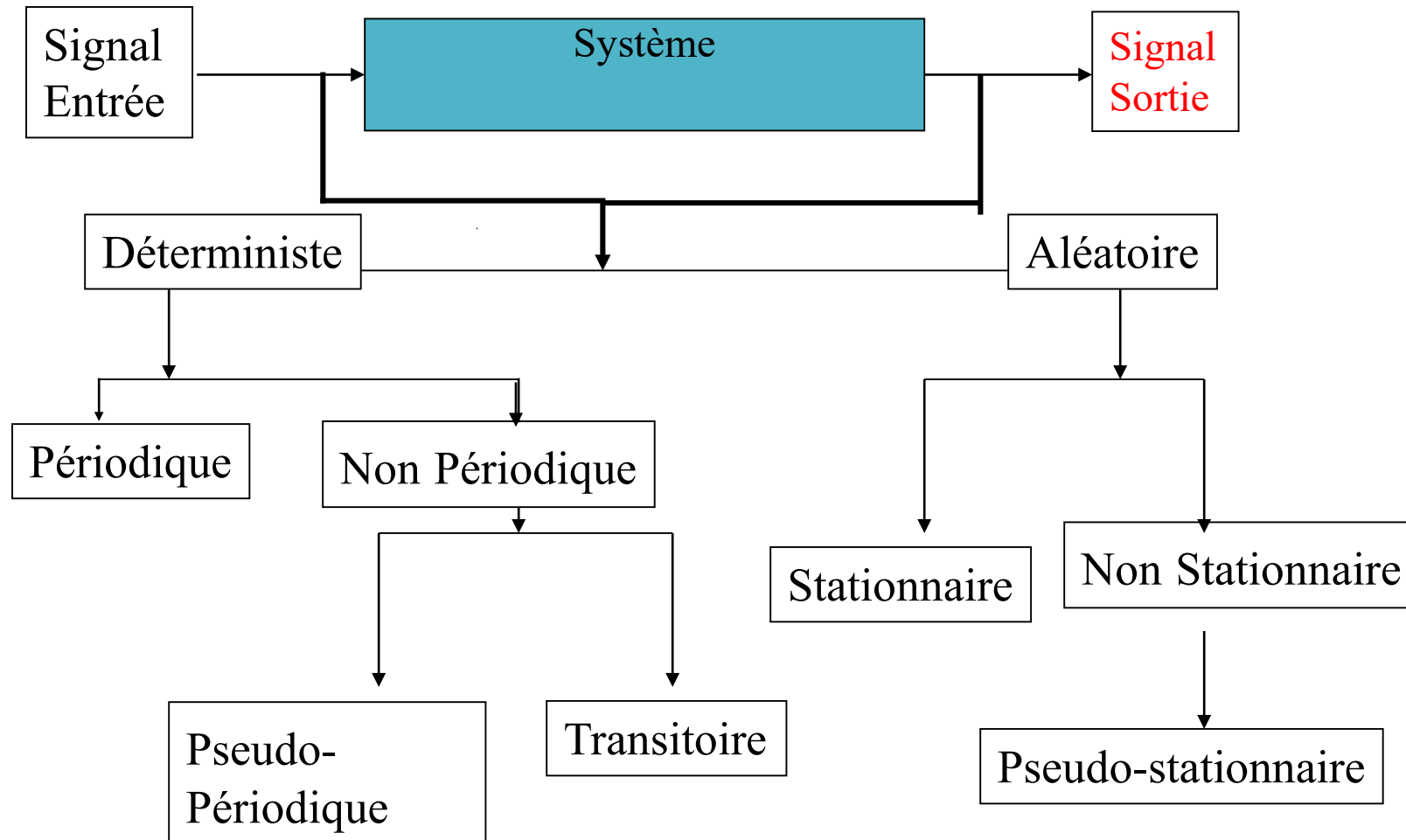


Synthèse MSS

Les Signaux

Classification des signaux



Classification des signaux

signal aléatoire : stationnarité/ergodicité

Stationnarité

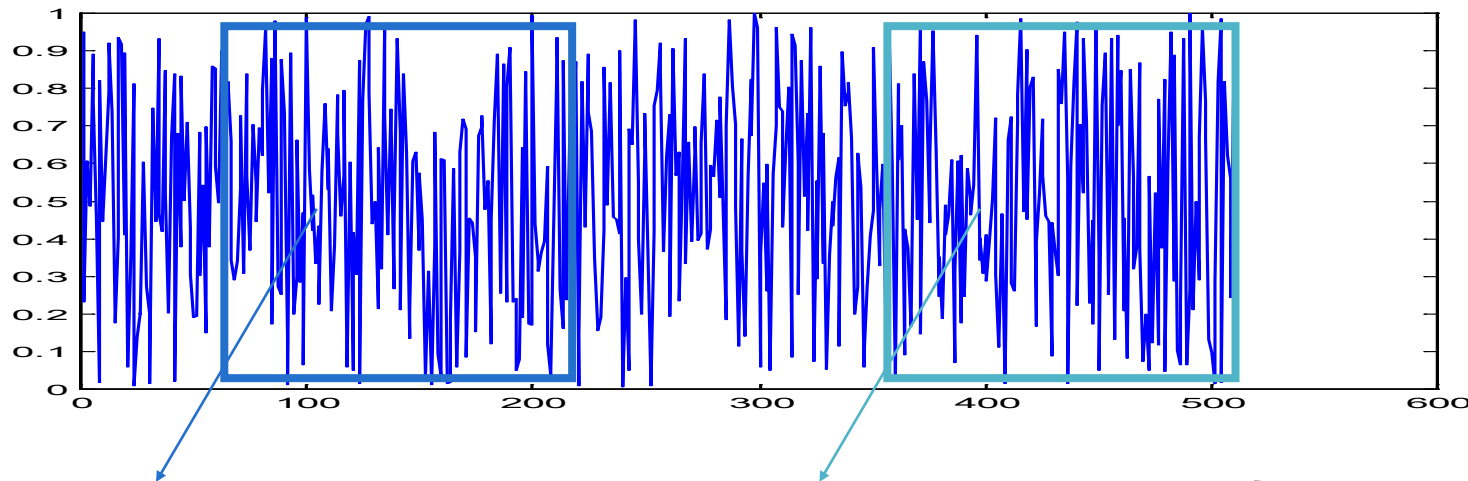
Toutes les propriétés statistiques du signal sont indépendantes du temps

→ Les moments sont les mêmes et ne dépendent pas de la fenêtre d'observation

$$\forall t_1, t_2, \dots, t_i; \quad m_x(t_1) = m_x(t_2) = \dots = m_x(t_i)$$

$$\forall t_1, t_2, \dots, t_i; \quad Var_x(t_1) = Var_x(t_2) = \dots = Var_x(t_i)$$

Exemple:



Observation 1: Moyenne $= m_1 = m_2$

Observation 2: Moyenne $= m_2 = m_1$

} Stationnarité
à l'ordre 1

Remarque : On peut avoir des signaux stationnaires à l'ordre 1, 2, ..., n

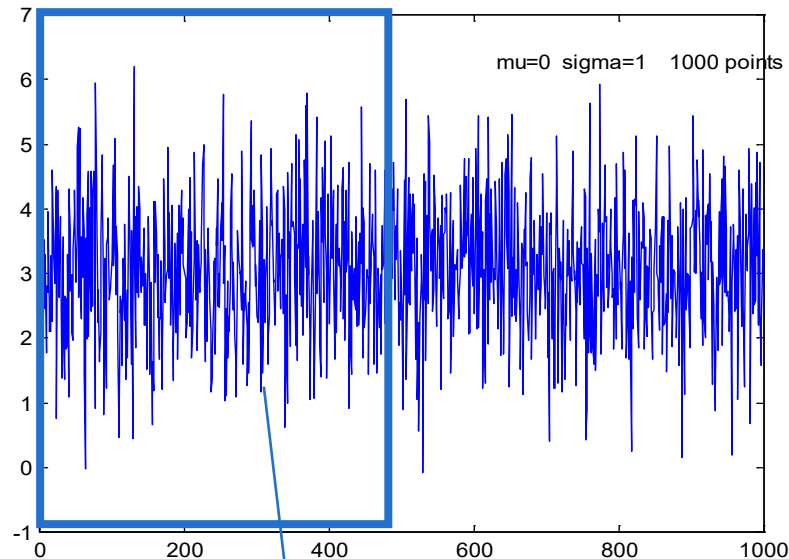
Classification des signaux

signal aléatoire : stationnarité/ergodicité

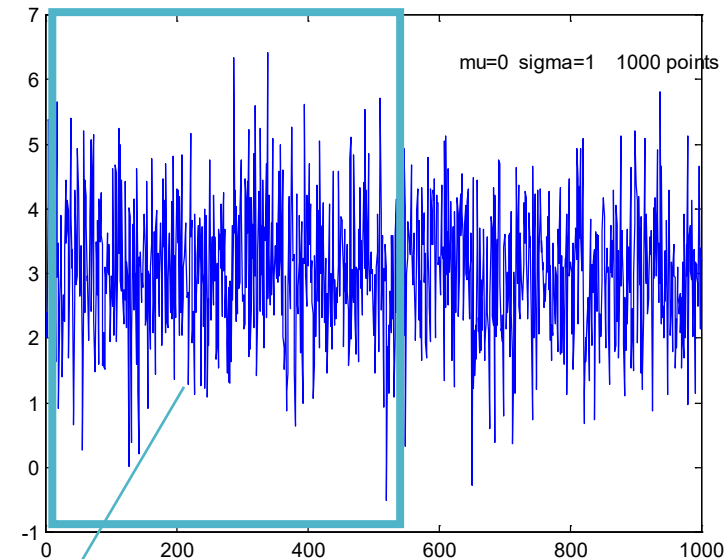
Ergodicité

Définition: Un processus est stationnaire et érgodique, si les moments calculés temporellement ou par moyenne d'ensemble (spatiale) sont égaux.

$$\forall t_0 \text{ et } \forall k; \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i(t_0) = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta T} X_k(t) dt$$



Réalisation 1: Moyenne = $m_1 = m_2$



Réalisation 2: Moyenne = $m_2 = m_1$

Remarques :

On peut avoir des signaux ergodique à l'ordre 1,2,..n

Puissance et énergie d'un signal

Puissance d'un signal (par analogie à l'électricité)

Soit $x(t)$ un signal qui peut appartenir à l'ensemble des fonctions complexes $x^*(t)$ est le conjugué de $x(t)$

Puissance instantanée d'un signal $x(t)$:

$$p(t) = x(t) \cdot x^*(t)$$

Puissance moyenne d'un signal $x(t)$ sur une durée T :

$$P(t_0, T) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot x^*(t) \cdot dt$$

Si $x(t)$ est réel (cas des signaux physiques) :

$$P(t_0, T) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [x(t)]^2 \cdot dt$$

Puissance et énergie d'un signal

Puissance d'un signal (par analogie à l'électricité)

Puissance moyenne d'un signal $x(t)$ sur une durée T :

$$P(t_0, T) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot x^*(t) \cdot dt$$

La valeur efficace X_{eff} du signal $x(t)$ est égale à :

$$X_{eff} = \sqrt{P(t_0, T)} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [x(t)]^2 \cdot dt}$$

Cas des signaux complexes:

$$P(t_0, T) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) x^*(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 \cdot dt$$

Cas des signaux périodique: $P(t_0, T) = P(t_0, nT)$

Avec T la période du signal

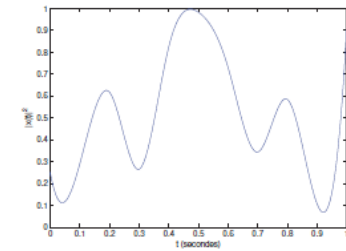
Puissance et énergie d'un signal

Energie d'un signal

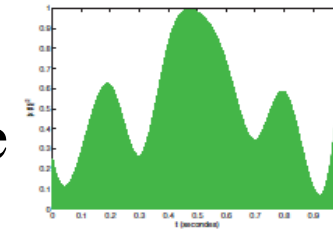
L'énergie totale d'un signal $x(t)$ est définie comme l'intégrale de sa puissance dans tout son domaine d'existence :

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \cdot dt$$

- Il faut distinguer les signaux à énergie finie ou infinie
- Ils sont finis si l'intégrale converge*
- S'ils ne sont pas à énergie finie, on utilise alors la puissance moyenne pour les caractériser.



Signal continu



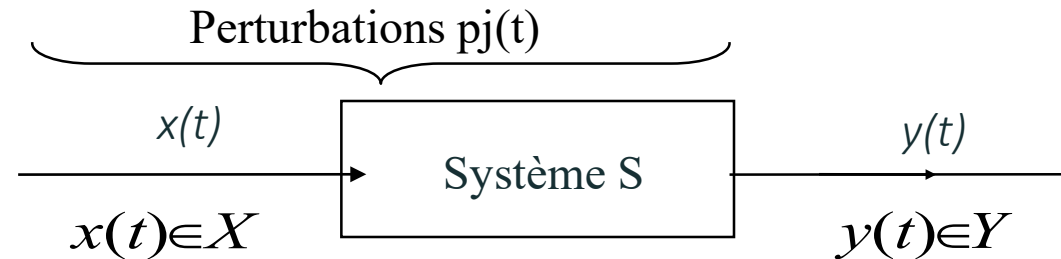
Signal continu

Par exemple $s(t) = A \sin \omega t$ pour $t \in \mathbb{R}$ est à énergie infinie
→ mais on peut calculer sa puissance moyenne

Les Systèmes linéaires et invariants par translation

Les systèmes

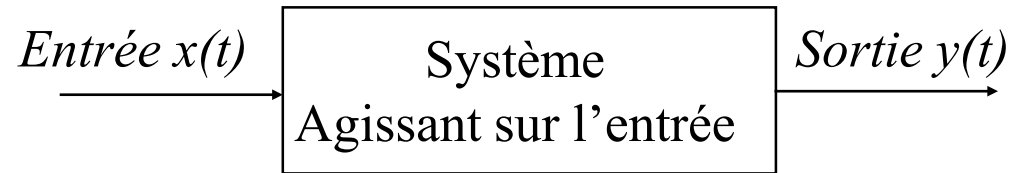
Un système dynamique est un ensemble d'éléments destinés à remplir une fonction physique



- $x(t)$ contient les variables $x_i(t)$ d'entrées
 - Les perturbations $p_j(t)$ peuvent agir sur le système ou sur les signaux
 - $y(t)$ peut contenir plusieurs variables $y_i(t)$ de sorties
- X et Y sont les ensembles des valeurs d'entrées et sorties

Propriété = Causalité : Un système est causal si sa sortie $y(t)$ à un instant t_0 ne dépend que des valeurs de son entrée $x(t)$ pour $t \leq t_0$

Propriétés des systèmes linéaires et invariants dans le temps



Un système S est dit linéaire et invariant par translation (SLIT), s'il possède les propriétés suivantes:

- Linéarité (sous conditions initiales identiques)

si $S: x(t) \rightarrow y(t)$ alors $S: kx(t) \rightarrow ky(t)$

ou si $S: x_1(t) \rightarrow y_1(t)$ et $S: x_2(t) \rightarrow y_2(t)$

alors $S: \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \rightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$

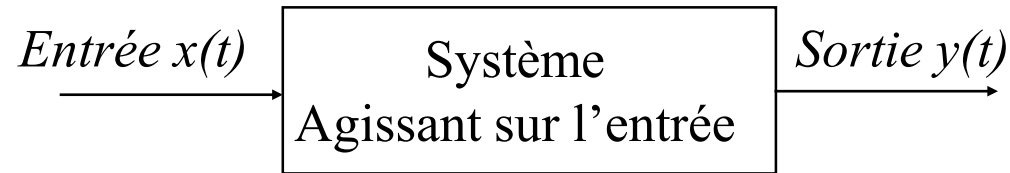
Cette propriété a pour conséquence le principe de superposition

- Invariance par translation,

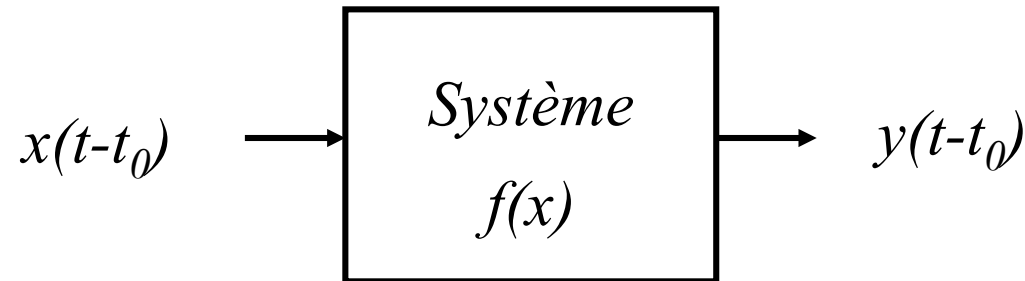
Soit l'opérateur de translation $Z\tau$ de $X \rightarrow X$ tel que

$Z\tau(x(t)) = x(t-\tau)$ alors à $Z\tau(x(t)) \rightarrow Z\tau(y(t)) = y(t-\tau)$

Propriétés des systèmes linéaires et invariants dans le temps



• Invariance



- ▶ Un système à temps invariant a un modèle identique à tout instant t (un retard τ ne change pas la loi du modèle)
- ▶ Pour un système invariant, l'origine des coordonnées est sans importance vis-à-vis des propriétés du système

Propriétés des systèmes linéaires et invariants dans le temps

Définition 1:

On appelle modèle d'un système (ou d'un processus) la loi qui relie l'entrée (cause) à la sortie (effet)

Définition 2:

On distingue deux régimes dans le comportement des systèmes:

- Le régime permanent ou établi caractérisé par la réponse stabilisée du système à une entrée quelconque
- Le régime transitoire caractérisé par l'évolution de la réponse avant que le régime permanent ne soit atteint.
- *Le régime statique est le régime permanent dans le cas où l'entrée est une constante*

Ce cours traite des systèmes causaux, linéaires et invariant : les S.L.I.T.. Les systèmes étudiés sont continus, leurs signaux d'entrée et de sortie sont continus

La relation qui lie leur entrée et leur sortie est une équation différentielle linéaire à coefficients constants

Les systèmes linéaires et invariants dans le temps

Théorème : Si le système S est causal, linéaire et invariant par translation SLIT, il est dit '*lisse*', il satisfait une équation différentielle à coefficients constants

Donc les SLIT d'entrée x et de sortie y à coefficients constants peuvent s'écrire sous la forme :

$$a_0 \cdot y(t) + a_1 \cdot \frac{dy}{dt} + a_2 \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + \dots + a_n \cdot \frac{d^n y}{dt^n} = b_0 \cdot x + b_1 \cdot \frac{d x}{dt} + b_2 \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + \dots + b_q \cdot \frac{d^q x}{dt^q}$$

Remarque : En électronique les systèmes sont plutôt définis sous forme de relation d'entrées- sorties donc de type transfert
En automatique, x et y peuvent être des variables internes (variables d'états)

Les systèmes linéaires et invariants dans le temps

Opérateur de transfert

En appliquant la règle du calcul symbolique : $\frac{dx}{dt} \rightarrow pX$
Le calcul symbolique: les formules mathématiques peuvent être combinées par des opérateurs (algébriques, analytiques), éventuellement simplifiés. Cela implique la conservation de toutes les propriétés dans chacune des écritures (Isomorphisme)

Hypothèse de travail : régime permanent et mêmes conditions initiales

L'équation différentielle :

$$a_0.y + a_1.\dot{y} + a_2.\ddot{y} + \dots + a_n.y^{(n)} = b_0.x + b_1.\dot{x} + b_2.\ddot{x} + \dots + b_q.x^{(q)}$$

Deviens en calcul symbolique une fonction algébrique :

$$a_0.Y + a_1.pY + a_2.p^2Y + \dots + a_n.p^nY = b_0.X + b_1.pX + b_2.p^2X + \dots + b_q.p^qX$$

Les systèmes linéaires et invariants dans le temps

Opérateur de transfert

$$a_0.Y + a_1.pY + a_2.p^2Y + \dots + a_n.p^nY = b_0.X + b_1.pX + b_2.p^2X + \dots + b_q.p^qX$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{\sum_{i=0}^q b_i.p^i}{\sum_{j=0}^n a_j.p^j} = H(p)$$

$H(p)$ est appelée
fonction de transfert du système

A quoi correspond cette fonction de transfert ?
Comment interpréter ces effets ???

Réponse Impulsionnelle Convolution et Fonction de transfert

L'impulsion de Dirac

Dans la façon usuelle de définir une intégrale (par exemple l'intégrale de Lebesgue), si f est une fonction telle que :

$$f(x) = 0 \quad \forall x \neq 0 \text{ alors } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0$$

Or la modélisation de sources ponctuelles (densité de charges électriques, de masse...) nécessite un formalisme tel que:

Soit une fonction qui vaut 0 en tout point $x \neq 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \text{ avec } \delta(x) = 0 \quad \forall x \neq 0$$

En généralisant la notion de fonction cet objet existe:
Fonctions généralisées ou distributions

L'impulsion de Dirac

La fonction de Dirac δ est un élargissement du concept des fonctions en mathématique c'est une distribution (L. Schwartz). Elle a été inventée pour l'analyse de source ponctuelle (charges électriques, masse....)

La distribution $\delta(t)$ peut être considérée comme la limite d'une impulsion de durée Δt et de hauteur $1/\Delta t$ lorsque $\Delta t \rightarrow 0$

La distribution $\delta(t)$ est utilisée pour localiser la valeur d'une fonction f

Si $f(t)$ est une fonction continue on a : $\langle f(t), \delta(t) \rangle = f(0)$

$$\langle f(t), \delta(t-\tau) \rangle = f(\tau)$$

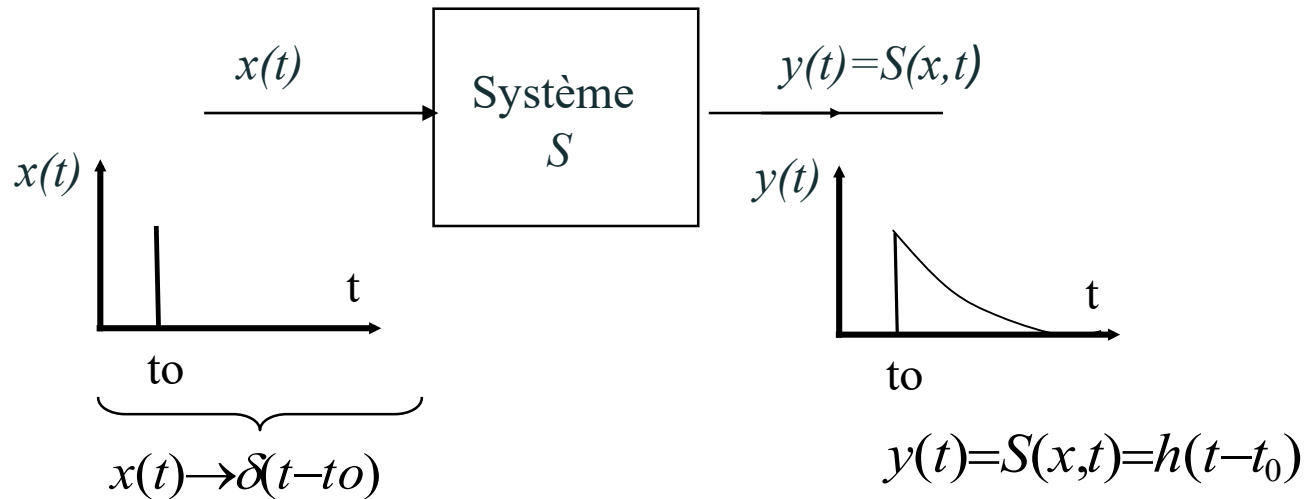
Si $f(t) = 1$

$$\langle 1, \delta(t-\tau) \rangle = 1 \text{ pour } t=\tau \text{ et } 0 \text{ ailleurs}$$

Réponse impulsionnelle des systèmes

Définition : la réponse impulsionnelle

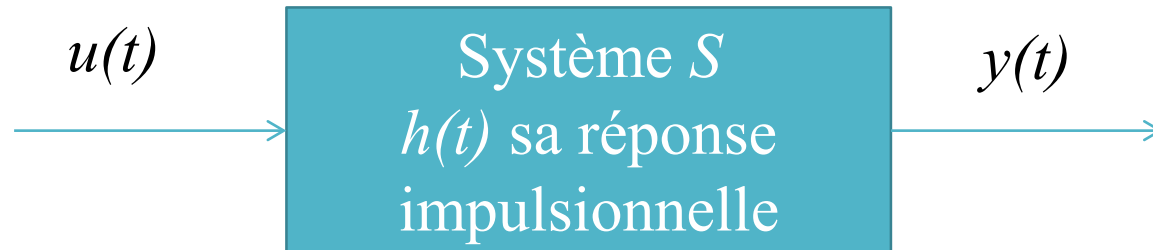
La réponse impulsionnelle $h(t)$ d'un système S est la sortie du système $y(t)$ lorsque l'on impose à l'entrée une impulsion de Dirac δ



Les systèmes linéaires et invariants

Équation de convolution

Si un système est causal, linéaire et invariant par translation et que sa réponse $y(t)$ à une excitation bornée quelconque $u(t)$ est bornée. Connaissant sa réponse impulsionnelle, on peut calculer sa sortie quel que soit le signal d'entrée tel que



Avec

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau$$

Produit de convolution

Propriétés de l'opérateur de convolution

Propriétés	Domaine temporel
Commutativité	$x*y=y*x$
Distributivité	$x*(y_1+y_2)=x*y_1+x*y_2$
Linéarité	$x*(\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha x*y_1+\beta x*y_2$
Associativité	$x*(y*z)=(x*y)*z$
Élément neutre	$x*\delta=x$
Dérivation	$(x*y)'=x'*y=x*y'$
Translation	$[x*y](t-t_0)=[x(t-t_0)]*[y(t)]=[x(t)]*[y(t-t_0)]$

Propriété importante :

Les propriétés de l'élément neutre et de translation montrent que convoluer par l'impulsion de Dirac centrée en a , notée $\delta_a(t)=\delta(t-a)$, revient à translater une signal de a .

$$\delta(t-a)*x(t) = \delta(t)*x(t-a) = x(t-a)$$

Les systèmes linéaires et invariants dans le temps

Convolution

Intégrale du produit de convolution:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x * y) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t - \tau) dt \right) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) dt$$

L'intégrale du produit de convolution de 2 fonctions sommables est le produit des intégrales des 2 fonctions

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x * y) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) dt$$

Les systèmes linéaires et invariants dans le temps

Caractérisation d'un système

Réponse des SLIT de réponse impulsionnelle $h(t)$ à une excitation sinusoïdale $u(t)$:

$$\text{si } u(t) = U \cdot e^{j\omega_0 t} \text{ alors } y(t) = S(u, t) = [h * u](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\nu) \cdot u(t - \nu) d\nu$$



$$y(t) = S(u, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\nu) \cdot U e^{j\omega_0(t-\nu)} d\nu = \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\nu) \cdot e^{-j\omega_0 \nu} d\nu \right]}_{\text{On retrouve } u(t)} \cdot U \cdot e^{j\omega_0 t}$$

C'est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle pour $\omega = \omega_0$

Les fonctions exponentielles complexes sont les fonctions propres du produit de convolution

Les systèmes linéaires et invariants dans le temps

Caractérisation d'un système

$$\text{si } u(t) = U.e^{j\omega_0 t} \quad y(t) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\nu).e^{-j\omega_0 \nu} d\nu \right] U.e^{j\omega_0 t}$$

- La convolution est un opérateur linéaire,
- Les fonctions exponentielles sont les fonctions propres de l'opérateur de convolution avec la valeur propre :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\nu).e^{-j\omega_0 \nu} d\nu$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\nu).e^{-j\omega_0 \nu} d\nu \rightarrow \text{C'est un scalaire}$$
$$\rightarrow \text{C'est la valeur de la transformée de Fourier de } h(\nu) \text{ pour } \omega=\omega_0$$

Les systèmes linéaires et invariants dans le temps

Caractérisation d'un système

Ces valeurs propres prennent une forme toute particulière pour un système dynamique linéaire et invariant .

Partons de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants d'entrée-sortie si $u(t) = U.e^{j\omega_0 t}$

$$a_0.y + a_1.\dot{y} + a_2.\ddot{y} + \dots + a_n.y^{(n)} = b_0.u + b_1.\dot{u} + b_2.\ddot{u} + \dots + b_q.u^{(q)}$$

Puisque ce système est linéaire et invariant dans le temps
une excitation harmonique $u(t)$

$$u(t) = U.e^{j\omega_0 t}$$

génère une réponse de même fréquence de la forme :

$$y(t) = Y.e^{j(\omega_0 t + \varphi)}$$

Les systèmes linéaires et invariants dans le temps

Caractérisation d'un système

$$a_0.y + a_1.\dot{y} + a_2.\ddot{y} + \dots + a_n.y^{(n)} = b_0.u + b_1.\dot{u} + b_2.\ddot{u} + \dots + b_q.u^{(q)}$$

si $u(t) = U.e^{j\omega_0 t}$

$y(t) = Y.e^{j(\omega_0 t + \varphi)}$

$$\dot{u}(t) = U.j\omega_0.e^{j\omega_0 t}, \ddot{u}(t) = U.(j\omega_0)^2.e^{j\omega_0 t} \dots$$

$$\dot{y}(t) = Y.j\omega_0.e^{j(\omega_0 t + \varphi)}, \ddot{y}(t) = Y.(j\omega_0)^2.e^{j(\omega_0 t + \varphi)} + \dots$$

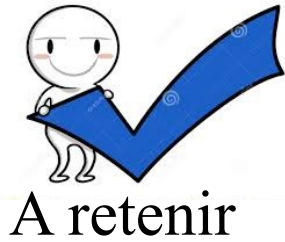
$$\sum_{j=0}^n a_j.(j\omega_0)^j Y e^{j\omega_0 t} e^{j\varphi} = \sum_{i=0}^q b_i.(j\omega_0)^i U e^{j\omega_0 t}$$

Réponse Harmonique du système

$$\frac{y}{u} = \frac{Y e^{j\omega_0 t}}{U e^{j\omega_0 t}} e^{j\varphi} = \frac{\sum_{i=0}^q b_i.(j\omega_0)^i}{\sum_{j=0}^n a_j.(j\omega_0)^j} = H(j\omega_0)$$

$H(j\omega)$ est la fonction de transfert ou réponse fréquentielle

$H(j\omega_0)$ est la fonction de transfert ou réponse fréquentielle pour $\omega = \omega_0$



Les systèmes linéaires et invariants dans le temps

Convolution

Caractérisation d'un système

1. La convolution est l'équation qui relie l'entrée et la réponse impulsionnelle des systèmes linéaires et invariants par translation à leur sortie
- 2 En pratique, il est difficile de générer une réponse impulsionnelle
3. L'équation différentielle des systèmes permet d'accéder à la fonction de transfert
4. La fonction de transfert est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle
5. Les fonctions exponentielles complexes sont les fonctions propres des SLIT

Transformée de Fourier des signaux

Transformation de Fourier

Définition de la transformation de Fourier

Toute fonction $x(t)$ sommable (au sens de Lebesgues) à énergie finie (fonction de L^2 Espace des fonctions de carré intégrable) possède une transformée de Fourier $X(f)$. On montre qu'elle est continue, bornée, tendant vers 0 lorsque $|f|$ tend vers l'infini

Transformée de Fourier

$$X(f) = \left\langle x(t), e^{-j2\pi ft} \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

Transformée de Fourier inverse

$$x(t) = \left\langle X(f), e^{j2\pi ft} \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi ft} df$$

Propriétés de la transformation de Fourier

- Linéarité

$$\left[\lambda g_1(t) + \mu g_2(t) \right]_{\text{Fourier}} \rightarrow \lambda G_1(f) + \mu G_2(f)$$

La combinaison de 2 signaux en temporelle devient la même combinaison de leur transformée de Fourier

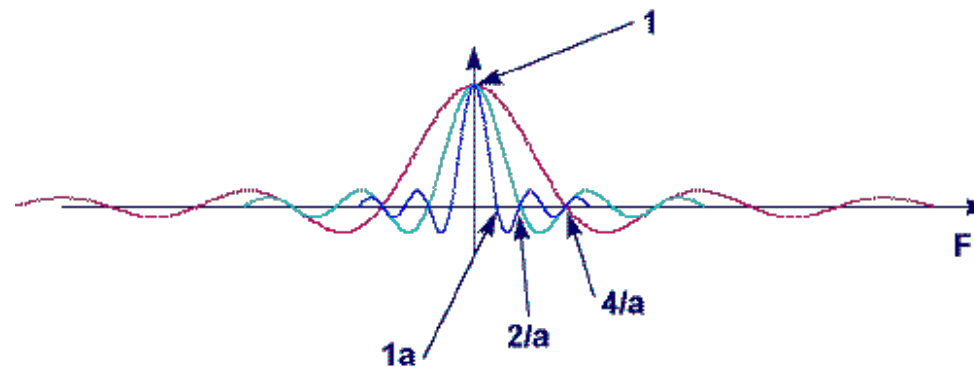
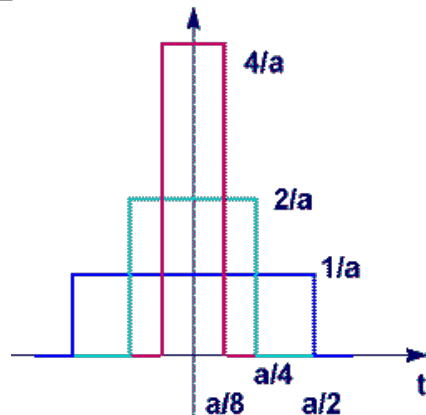
- Transposition

$$\left[g(-t) \right]_{\text{Fourier}} \rightarrow G(-f)$$

- Changement d'échelle

$$\left[g(at) \right]_{\text{Fourier}} \rightarrow \frac{1}{|a|} G\left(\frac{f}{a}\right)$$

Une compression de l'échelle des temps entraîne une dilatation de l'échelle des fréquences et une dilatation de l'échelle des temps entraîne une compression de l'échelle des fréquences



Propriétés de la Transformation de Fourier

- **Translation** $[g(t-a)]_{\text{Fourier}} \rightarrow e^{-j2\pi fa} G(f)$

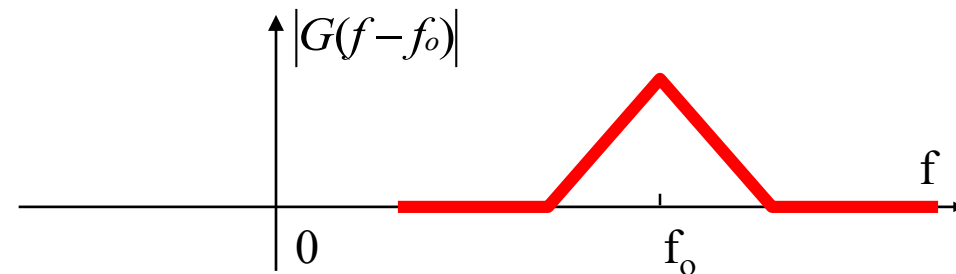
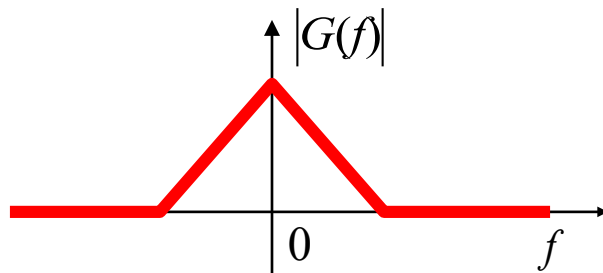
$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t-a) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) e^{-j2\pi f(\tau+a)} d\tau = e^{-j2\pi fa} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = e^{-j2\pi fa} \cdot G(f)$$

Une translation de $g(t)$ correspond à un déphasage dans l'espace des fréquences de Fourier

- **Modulation** $[e^{j2\pi f_0 t} g(t)]_{\text{Fourier}} \rightarrow G(f-f_0)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j2\pi t(f-f_0)} dt = G(f-f_0)$$

*Moduler une fonction $g(t)$ par une exponentielle imaginaire revient à traduire sa TF
→ c'est une relation importante pour la communication hertzienne*



Propriétés de la transformation de Fourier

-Convolution

$$\left[g_1(x) * g_2(x) \right]_{\text{Fourier}} \rightarrow G_1(f) \cdot G_2(f)$$

$$\left[g_1 * g_2 \right]_{\text{Fourier}} \rightarrow \int e^{-j2\pi f t} \int g_1(\tau) \cdot g_2(t - \tau) d\tau dt$$

$$\left[g_1 * g_2 \right]_{\text{Fourier}} \rightarrow \int g_1(\tau) \cdot \left(\int g_2(t - \tau) e^{-j2\pi f t} dt \right) d\tau$$

En posant $\alpha = t - \tau$:

$$\left[g_1 * g_2 \right]_{\text{Fourier}} \rightarrow \int g_1(t) e^{-j2\pi f t} dt \cdot \left(\int g_2(\alpha) e^{-j2\pi f \alpha} d\alpha \right)$$

$$\left[g_1(x) * g_2(x) \right]_{\text{Fourier}} \rightarrow G_1(f) \cdot G_2(f)$$

Propriétés de la transformation de Fourier

$$\begin{aligned}x(t) &\xrightarrow{\text{Fourier}} X(f) \\h(t) &\xrightarrow{\text{Fourier}} H(f) \\y(t) &\xrightarrow{\text{Fourier}} Y(f)\end{aligned}$$

Théorème de Plancherel

$$\begin{aligned}y(t) &= h(t) * x(t) \implies Y(f) = H(f) \cdot X(f) \\y(t) &= h(t) \cdot x(t) \implies Y(f) = H(f) * X(f)\end{aligned}$$

La transformée de Fourier d'un produit de convolution de deux fonctions est égale au produit des transformées de Fourier des deux fonctions.

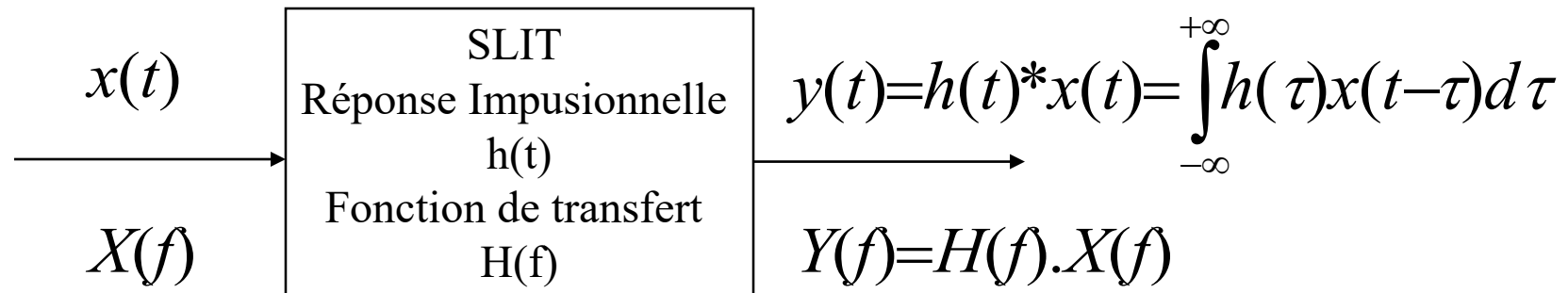
La transformée de Fourier du produit de deux fonctions est égale au produit de convolution des transformées de Fourier des deux fonctions.

Propriétés de la transformation de Fourier

Théorème de Plancherel et Système linéaire et invariant

Théorème de Plancherel

$$\left. \begin{aligned} y(t) &= h(t) * x(t) \\ y(t) &= h(t) \cdot x(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} Y(f) &= H(f) \cdot X(f) \\ Y(f) &= H(f) * X(f) \end{aligned} \right\}$$



Propriétés de la transformation de Fourier

Formule de Parseval-Plancherel

$X(f)$ et $Y(f)$ les Transformées de Fourier de $x(t)$ et $y(t)$

$$\begin{array}{l|c|l} X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} \cdot dt & \xrightarrow{\text{Transformée de Fourier inverse}} & x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cdot e^{j2\pi ft} \cdot df \\ Y(f)=\int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{-j2\pi ft} \cdot dt & & y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} Y(f) \cdot e^{j2\pi ft} \cdot df \end{array}$$

Le produit scalaire des 2 fonctions

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} Y(f) \cdot e^{j2\pi ft} \cdot df \right] dt$$

t et f étant 2 variables indépendantes :

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{j2\pi ft} \cdot dt \right] \cdot df$$

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(-f) \cdot Y(f) \cdot df$$

Le théorème de Parseval – Plancherel traduit la conservation du produit scalaire suite à la transformée de Fourier

Série de Fourier

Décomposition en série de Fourier des signaux périodiques

Toutes fonction périodique $x(t)$ sommable sur une période T_o ($T_o = 1/F_o$) possède un développement en série de Fourier

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{j2\pi n F_o t}$$

Avec

$$c_n(F_o) = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x(t) e^{-j2\pi n F_o t} dt \quad \text{avec } F_o = 1/T_o$$

Les coefficients de la série de Fourier c_n peuvent être complexes

Décomposition en série de Fourier des signaux périodiques

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n \cdot e^{2j\pi n F_o t}$$

$$c_n = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x(t) e^{-j2\pi n F_o t} dt$$

$$F_o = \frac{1}{T_o}$$

➔ En regroupant 2 à 2 les termes correspondant à des valeurs opposées de n , $x(t)$ peut également s'écrire:

$$x(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos 2\pi F_o n.t + b_n \sin 2\pi F_o n.t \right)$$

$$\text{avec} \begin{cases} a_o = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x(t) dt \\ a_n(F_o) = \frac{2}{T_o} \int_0^{T_o} x(t) \cos(2\pi F_o n.t) dt \\ b_n(F_o) = \frac{2}{T_o} \int_0^{T_o} x(t) \sin(2\pi F_o n.t) dt \end{cases}$$

Remarque: a_o représente la valeur moyenne de $x(t)$

Représentation spectrale des série de Fourier des signaux périodiques

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{2j\pi n F_o t}$$

$$c_n = \frac{1}{T_o} \int_0^{T_o} x(t) e^{-j2\pi n F_o t} dt$$

$$F_o = \frac{1}{T_o}$$

➔ Quelle est la représentation spectrale d'un tel signal périodique qui n'est pas à énergie finie ?

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot \delta(f - nF_o)$$

C'est un spectre discontinu ➔ Spectre de raies

$|c_n|$ ➔ Représente l'amplitude de la raie

$$a_n = c_n + c_{-n}$$

$$b_n = j(c_n - c_{-n})$$

$\delta(f - nF_o)$ ➔ Représente la localisation fréquentielle de la raie spectrale en
 $f = nF_o$

Densité Spectrale de Puissance

Gestion des variables aléatoires

Densité spectrale de puissance

Signaux aléatoires

Spectre des Signaux aléatoires ???

Les bruits sont des signaux à variables aléatoires souvent à énergie infinie et à puissance moyenne finie

On accède à la répartition énergétique spectrale de ces signaux via la **densité spectrale de puissance** par le passage à la limite de l'observation et par l'intermédiaire de leur **fonction d'autocorrélation**

La densité spectrale de puissance $G(f)$ est définie :

$$G(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{X_T(f) X_T^*(f)}{2T}$$

Avec

$$X_T(f) = \int_{-T}^{+T} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Densité spectrale de puissance

Signaux aléatoires

On définit la Densité Spectrale de Puissance (DSP) $G(f)$ telle que :

$$G(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{X_T(f) X_T^*(f)}{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{2T}$$

On rappelle la définition de la puissance : $P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \cdot x^*(t) dt$

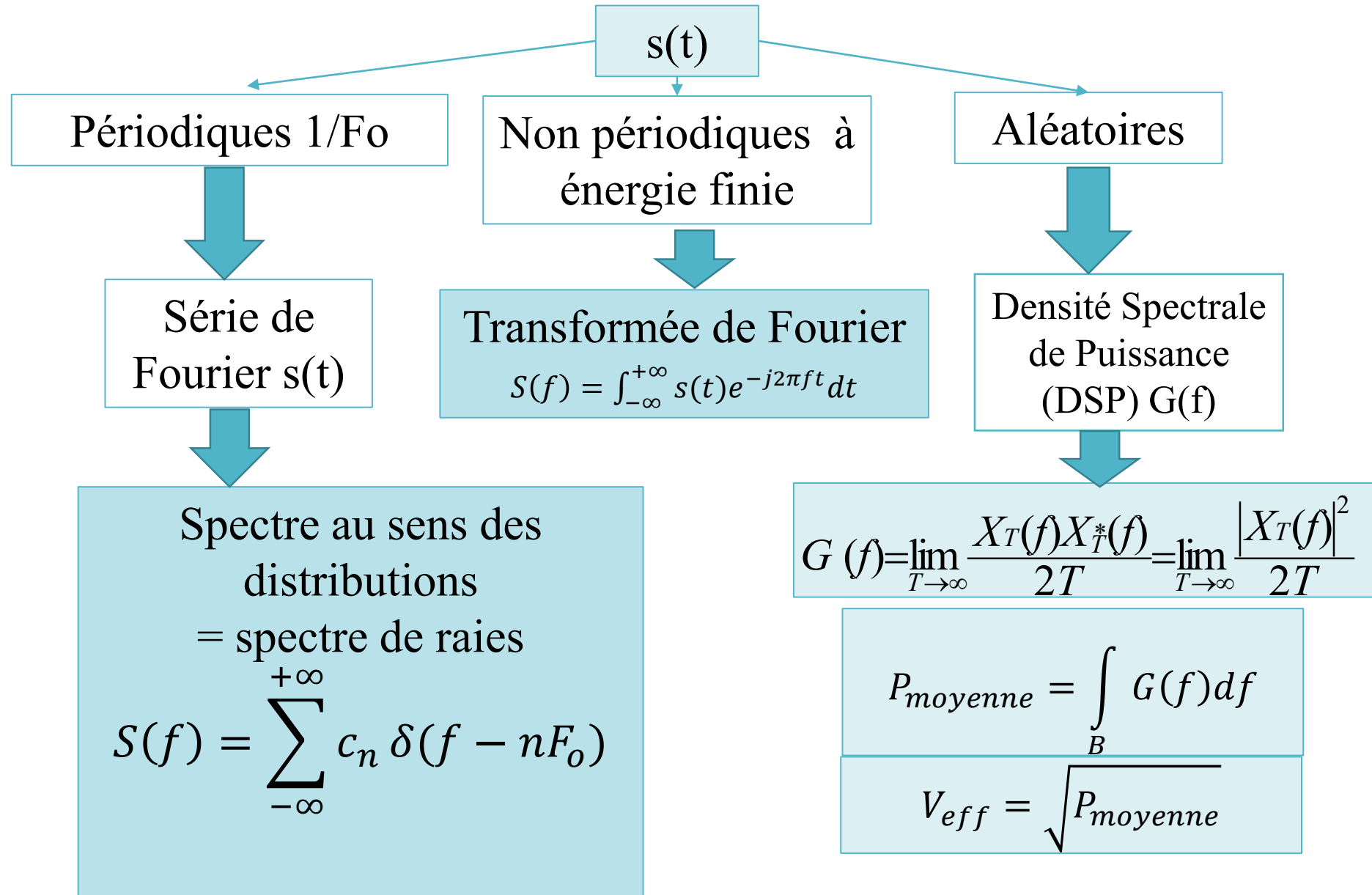
D'après l'égalité de PARSEVAL :

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x_T(t) \cdot x_T^*(t) \cdot dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} X_T(f) \cdot X_T^*(f) \cdot df$$

donc :

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) df$$

Conclusion



Le Filtrage

Synthèse des filtres

Filtrage

Mise en cascade de plusieurs filtres

Soit n filtres caractérisés par leur réponse impulsionnelle $h_i(t)$ et leur fonction de transfert $H_i(p)$ en cascade, la réponse impulsionnelle globale peut être définie par :

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) * h_3(t) \dots * h_n(t)$$

La fonction de transfert du système est souvent beaucoup plus facile à calculer :

$$H(p) = \prod_{i=1}^n H_i(p)$$

Remarque : Cette formule ne peut s'appliquer que si la structure du filtre i ne produit aucune influence sur les filtres $i-1$ et $i+1$

→ Il faut si les impédances d'entrées des filtres (quadripôles) sont infinies et leurs impédances de sortie nulles

Filtrage et Stabilité

Un filtre est dit 'stable' si à tout signal d'entrée borné correspond un signal de sortie lui même borné

$$\int_0^{+\infty} |h(t)| dt \text{ existe}$$

La condition précédente peut être remplacée par une autre portant sur les pôles de la fonction de transfert.

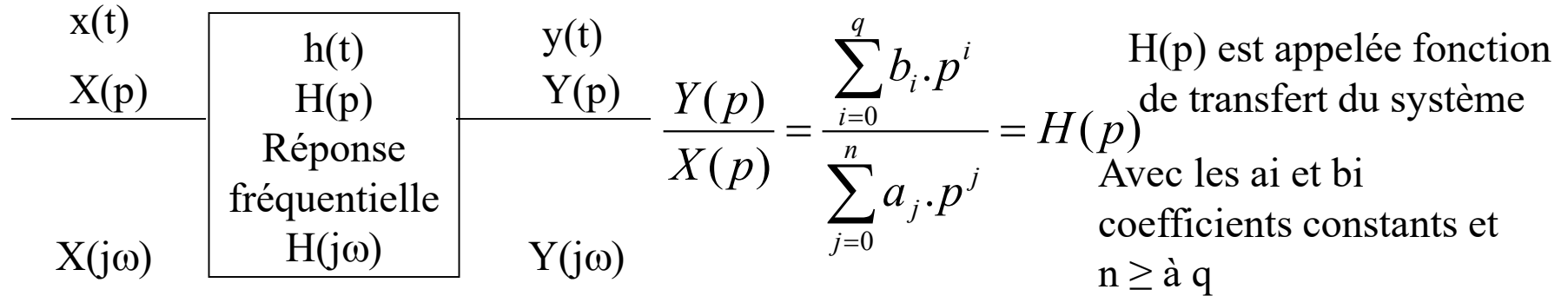
Supposons que $H(p)$ ne possède que des pôles simples $p_1, p_2, \dots, p_n$

Si on décompose $H(p)$ en éléments simples puis que l'on calcule $h(t)$ on obtient une expression de la forme:

$$H(p) = \prod_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{p - \beta_k} \xrightarrow{\text{Transformée Laplace inverse}} h(t) = \prod_{k=1}^n \alpha_k e^{\beta_k t}$$

Pour que la stabilité soit assurée il faut que tous les termes exponentiels soient décroissants
→ **les pôles doivent posséder une partie réelle négative ie $\text{Re}(\beta_k) < 0$ (plan gauche du plan complexe) {polynôme de Hurwitz}**

Fonction de transfert d'un filtre



Toutes fonctions de transfert de filtres réalisables d'ordre n peuvent se mettre sous la forme:

$$H(p) = K_1 \frac{(p-z_1)(p-z_2) \cdots (p-z_q)}{(p-p_1)(p-p_2) \cdots (p-p_n)}$$

➤ Les z_i sont les zéros de $H(p)$

➤ Les p_i sont les pôles de $H(p)$

La réponse en amplitude

Électronique

$$G_{dB} = 20 \log |H(j\omega)|$$

Automatique

$$G = \log |H(j\omega)|$$

L'échelle des fréquences $f = \frac{\omega}{2\pi}$ est présentée en échelle logarithmique $\text{Log}(f)$

La réponse en phase

$$\varphi = \arg(H(j\omega))$$

Fonction de transfert d'un filtre

Diagramme de Bode

$$\text{Log}|H(j\omega)| = \text{Log}K + \sum_{j=1}^q \text{Log}\left|1 - j\frac{\omega}{\omega_{zj}}\right| - \sum_{i=1}^n \text{Log}\left|1 - j\frac{\omega}{\omega_{pi}}\right|$$

avec $\omega_{p1} < \omega_{p2} \dots < \omega_{pn} < \omega_{z1} < \omega_{z2} \dots < \omega_{zq}$

$$f \in [0, f_{p1}] \Rightarrow \text{Log}|H(j\omega)| = \text{Log}K \quad \phi(H(0)) = 0$$

$$f \in]f_{p1}, f_{p2}] \Rightarrow \text{Log}|H(j\omega)| = \text{Log}K - \text{Log}\left(\frac{\omega}{\omega_{p1}}\right) \quad \phi(H(j\omega_{pi})) = -\frac{\pi}{2}$$

$$f \in]f_{p2}, f_{p3}] \Rightarrow \text{Log}|H(j\omega)| = \text{Log}K - \text{Log}\left(\frac{\omega}{\omega_{p1}}\right) - \text{Log}\left(\frac{\omega}{\omega_{p2}}\right)$$

$$\phi(H(j\omega_{pi})) = -\pi$$

Etc...

Filtre du 1^{er} ordre : n=1

Fonction de transfert :

$$\frac{y}{x} = \frac{\sum_{i=0}^q b_i \cdot p^i}{\sum_{j=0}^1 a_j \cdot p^j} = H(p) \text{ avec } q \leq 1$$

1er ordre Passe bas
En régime Harmonique :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{K}{1 + j\omega\tau_0} \text{ avec } \tau_0 = \frac{1}{\omega_0}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega\tau_0)^2}} \text{ avec } \varphi = -\arctg \frac{\omega}{\omega_0}$$

Pour le diagramme de Bode :

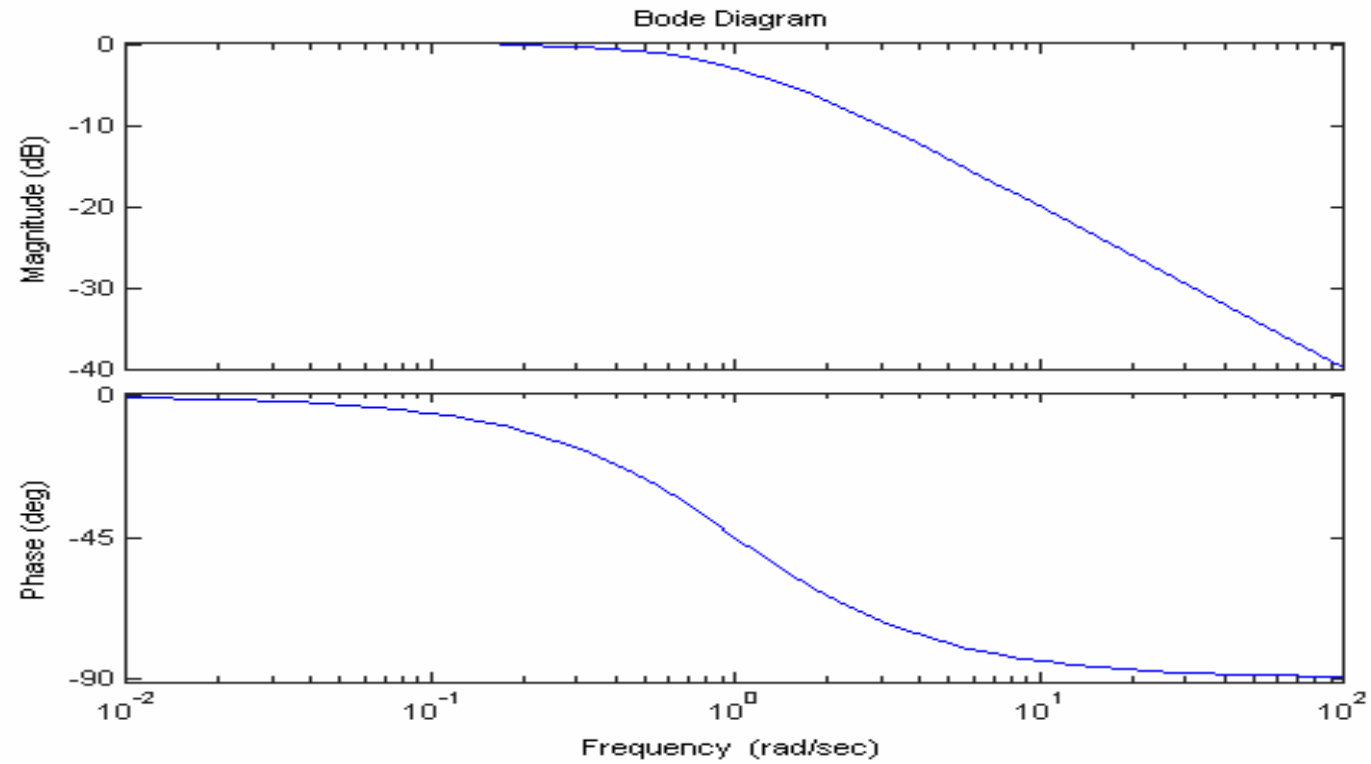
$$G = 20 \text{Log}|H(j\omega)| = 20 \text{Log} \frac{K}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

et $\varphi = -\arctg \frac{\omega}{\omega_0}$

Filtre du 1^{er} ordre Passe Bas : $n=1$

BODE

$K=1$ et $\omega_0=1\text{rad/s}$ et $\tau_0=1\text{s}$



Réponse d'un filtre du 1^{er} ordre à une entrée $x(t)$ connue

Réponse temporelle

$$H(j\omega) = \frac{K}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{K}{1+j\omega\tau_o} \text{ avec } \tau_o = \frac{1}{\omega_0}$$

Si l'entrée n'est pas en régime harmonique $\rightarrow$ étude du régime transitoire

$$H(p) = \frac{K}{1+p\tau_o} = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

Réponse impulsionnelle: $x(t) \rightarrow \delta(t)$

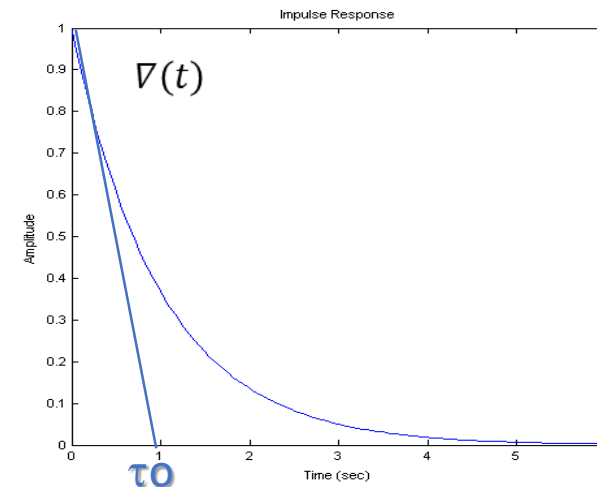
- Soit résoudre l'équation différentielle $y(t) + \tau_o \frac{dy(t)}{dt} = Kx(t)$

Soit passer par la transformée inverse de Laplace

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = \delta(t) \xLeftrightarrow{TL} X(p) = 1 \\ e^{-\alpha t} \xLeftrightarrow{TL} \frac{1}{p + \alpha} \end{array} \right\} \begin{array}{l} Y(p) = \frac{K}{1 + p\tau_o} \\ y(t) = \frac{K}{\tau_o} e^{-\frac{t}{\tau_o}} \end{array}$$

Équation de la tangente à l'origine:

$$\nabla(t) = \frac{K}{\tau} - \frac{K}{\tau^2} t$$

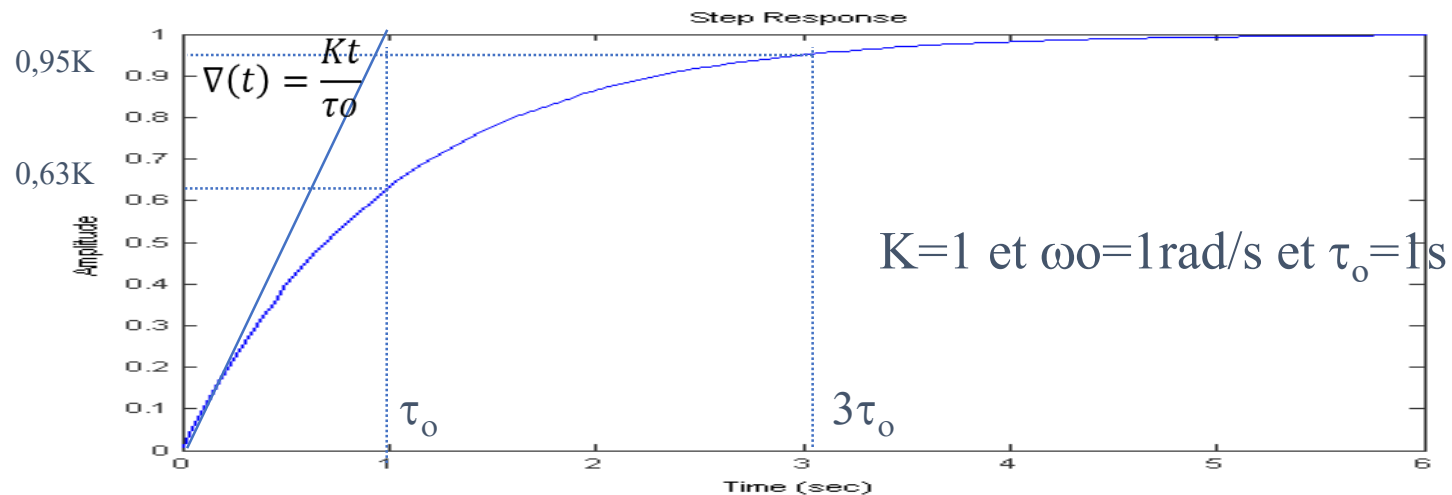


$K=1$ et $\omega_0=1\text{rad/s}$ et $\tau_o=1\text{s}$

Réponse d'un filtre du 1^{er} ordre à une entrée x(t) connue

Réponse indicielle: $x(t) \rightarrow u(t)$ =échelon

$$\left. \begin{array}{l} x(t)=u(t) \xLeftrightarrow{\text{TL}} X(p)=\frac{1}{p} \\ e^{-\alpha t} \xLeftrightarrow{\text{TL}} \frac{1}{p+\alpha} \end{array} \right\} \begin{array}{l} y(p)=\frac{K}{p(1+\tau_0 p)}=\frac{K}{p}-\frac{K\tau_0}{1+\tau_0 p} \\ y(t)=K(1-e^{-\frac{t}{\tau_0}}) \end{array}$$

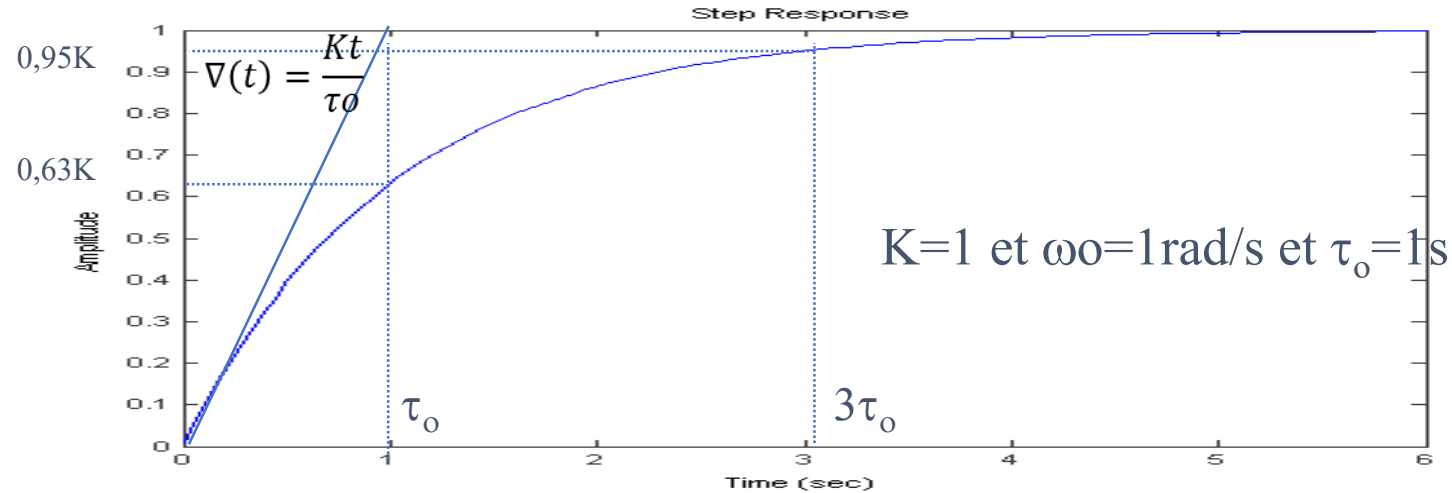


Pente à l'origine : $y'(0_+) = \frac{K}{\tau_0}$ à $t=\tau_0 \rightarrow 63\%$ de l'échelon est atteint

$\rightarrow$ C'est une méthode d'identification d'un 1er ordre

Réponse d'un filtre du 1^{er} ordre à une entrée $x(t)$ connue

Réponse indicielle: $x(t) \rightarrow u(t)=\text{échelon}$



à $t=\tau_0 \rightarrow$ 63% de l'échelon est atteint

On note le temps de réponse à 5% : $tr = -\ln(0,05)\tau_0 \sim 3\tau_0$

Filtre du 2^{me} ordre : n=2

Fonction de transfert d'un filtre de 2nd ordre

$$\frac{Y}{X} = \frac{\sum_{i=0}^2 b_i \cdot p^i}{\sum_{j=0}^2 a_j \cdot p^j} = H(p) = \frac{b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2}{a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2}$$

b0	b1	b2	Coefficients Numérateur
b0	0	0	Passe Bas
0	0	b2	Passe Haut
0	b1	0	Passe Bande

Filtre passe bas de second ordre

Toute fonction de transfert d'un filtre polynomial passe bas de second ordre peut se mettre sous la forme:

$$H(p) = \frac{K}{1 + 2\xi \cdot \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

ω_0 est la pulsation propre

ξ est le coefficient d'amortissement

K le gain statique

On appelle Q coefficient de qualité tel que : $Q = \frac{1}{2\xi}$

Décomposition en éléments simples de $H(p)$: Le dénominateur est un polynôme du second degré en p ($j\omega$) $\rightarrow$ en régime harmonique trois cas se présentent selon le discriminant:

$$\Delta = \frac{4\xi^2}{\omega_0^2} - \frac{4}{\omega_0^2} = \frac{4}{\omega_0^2}(\xi^2 - 1)$$

1. $\xi > 1 \rightarrow 2$ pôles réels négatifs
2. $\xi = 1 \rightarrow 1$ pôle double réel négatif
3. $\xi < 1 \rightarrow 2$ pôles complexes conjugués à partie réelle < 0

$$\Delta = \frac{4}{\omega_0^2}(\xi^2 - 1)$$

Filtre passe bas de second ordre

Transfert

1^{er} cas : $\xi > 1$ régime aperiodique

Le dénominateur possède 2 racines réelles. La fonction de transfert est alors décomposable en deux facteurs du premier ordre

$$H(p) = \frac{K}{1 + 2\xi \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}} = K \frac{1}{1 + \tau_1 p} \cdot \frac{1}{1 + \tau_2 p}$$

En régime harmonique: $H(j\omega) = K \frac{1}{1 + \tau_1 j\omega} \cdot \frac{1}{1 + \tau_2 j\omega} = K \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_1}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_2}}$

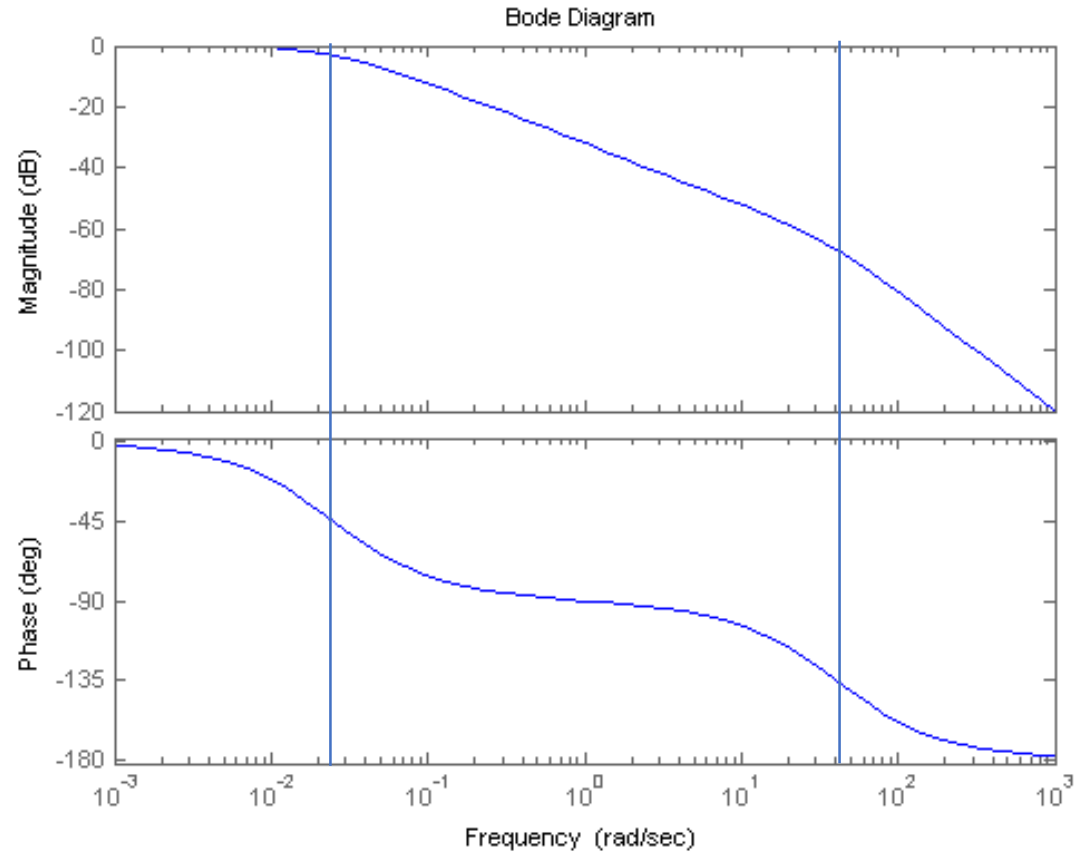
avec $\omega_1 = \omega_0 \left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$ et $\omega_2 = \omega_0 \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$

Remarque : $\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2$ et pour $\omega = \omega_0$ $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

Filtre passe bas de second ordre à pôles réels

$K=1$ et $\omega_0=1\text{rad/s}$ et $\xi=20$

→ $\omega_1=0.025\text{rad/s}$ et $\omega_2=40\text{ rad/s}$



→ Cela revient à la mise en cascade de 2 filtres du 1^{er} ordre

Filtre passe bas de second ordre à pôles complexes conjugués

2^{eme} cas : $\xi < 1$ système à faible amortissement – régime oscillant
Le dénominateur possède 2 racines complexes conjugués.

$$\Delta = \frac{4}{\omega_o^2}(\xi^2 - 1)$$

$$\Delta = \frac{4\xi^2}{\omega_o^2} - \frac{4}{\omega_o^2} = \frac{4}{\omega_o^2}(\xi^2 - 1)$$

$$p = \xi\omega_o \pm j\omega_o\sqrt{1 - \xi^2}$$

La fonction de transfert est:

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_o^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_o^2}}}$$

$$\varphi(j\omega) = -\operatorname{artg} \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_o}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_o^2}\right)}$$

Filtre passe bas de second ordre

$$|H(p)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \quad \varphi = -\operatorname{artg} \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_0}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}$$

Diagramme asymptotique

Si $\omega \ll \omega_0$ $G \approx 20 \operatorname{Log} K \rightarrow$ La courbe admet une asymptote horizontale d'ordonnée $20 \operatorname{Log} K$

Asymptote oblique: Pente avec $\omega_0 \ll \omega_1$ et on pose $\omega_2 = 10\omega_1$

$$\frac{G(\omega_2) - G(\omega_1)}{\operatorname{Log} \omega_2 - \operatorname{Log} \omega_1} = 20 \operatorname{Log} \frac{K}{\left(10 \frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2} - 20 \operatorname{Log} \frac{K}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2} = -20 \operatorname{Log} 100 = -40 \operatorname{dB} / \text{décade}$$

Généralisation : *Pente $\approx -20.n \operatorname{dB} / \text{décade}$*

avec $n = \text{ordre du filtre}$

Filtre passe bas de second ordre

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_b^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_b^2}}}$$

$$\frac{d|H(p)|}{d\left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)} = 2K \frac{\omega}{\omega_b} \frac{2\xi^2 - 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)^2}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_b^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_b^2}\right]^{3/2}}$$

En dehors de $\omega=0$ la dérivée ne peut s'annuler que si $2\xi^2 - 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)^2 = 0$

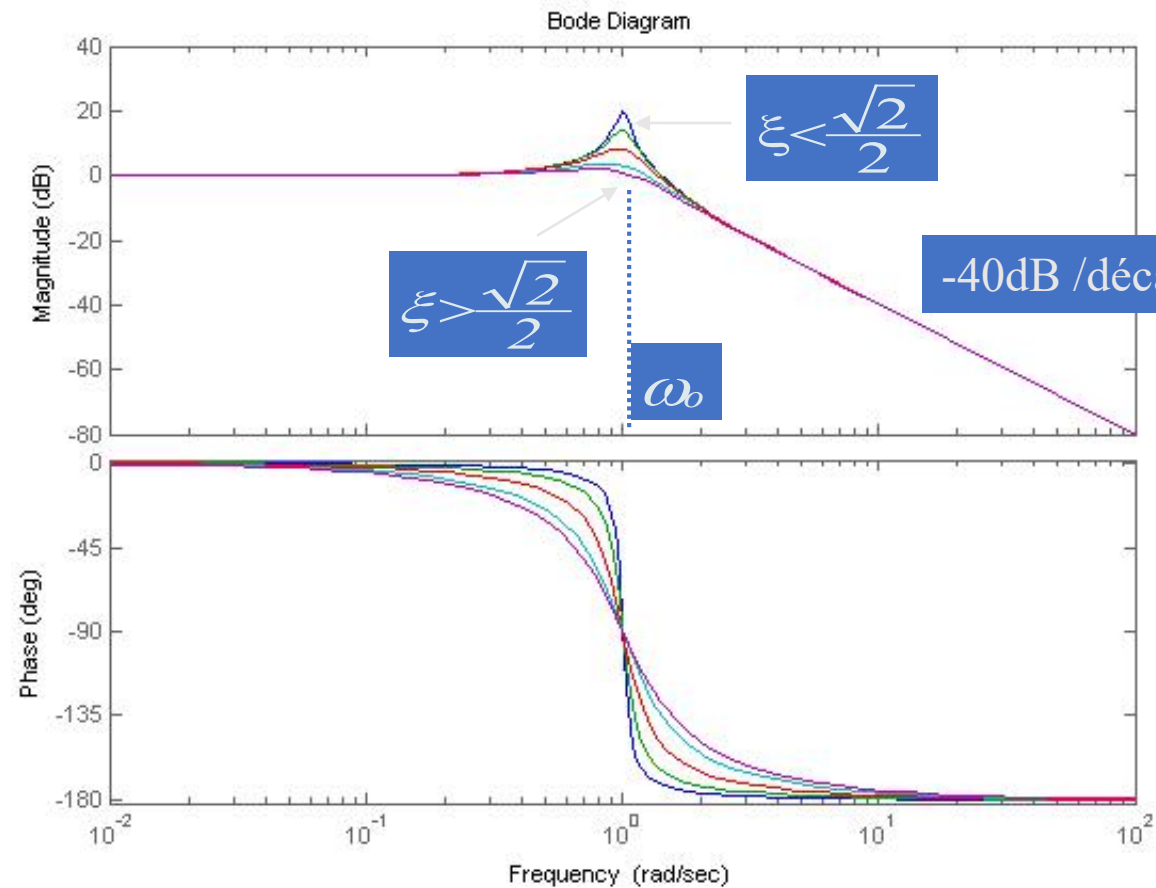
Donc la courbe ne présente de maximum que si $2\xi^2 - 1 < 0$

$$\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Réponse Filtre passe bas de second ordre

Les coordonnées du maximum sont telles que:

$$\left(\frac{\omega_M}{\omega_0} = \sqrt{1-2\xi^2}, \quad |H_M| = \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \right)$$



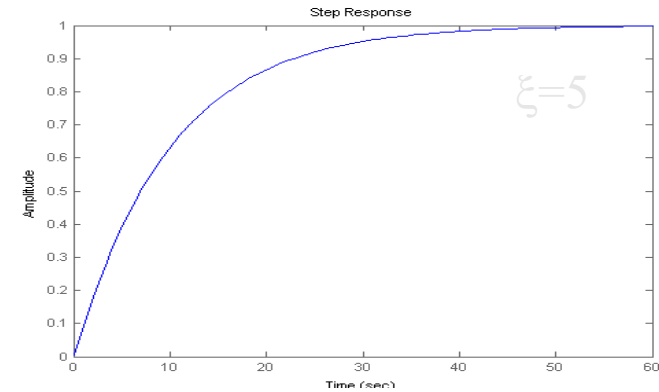
Filtre passe bas de second ordre

Réponse temporelle

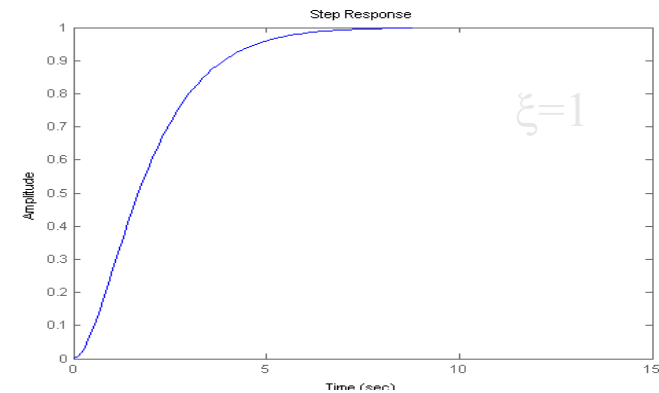
$\omega_0=1\text{rad/s}$ et $K=1$

Réponse indicielle: $x(t) \rightarrow u(t)$

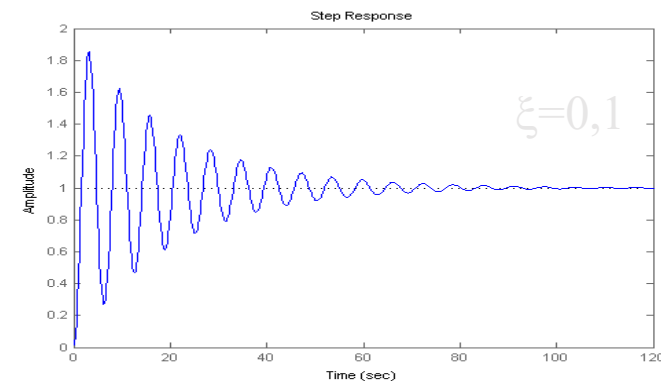
1. $\xi > 1 \rightarrow 2$ pôles réels négatifs



2. $\xi = 1 \rightarrow 1$ pôle double réel négatif



3. $\xi < 1 \rightarrow 2$ pôles complexes conjugués à partie réelle < 0

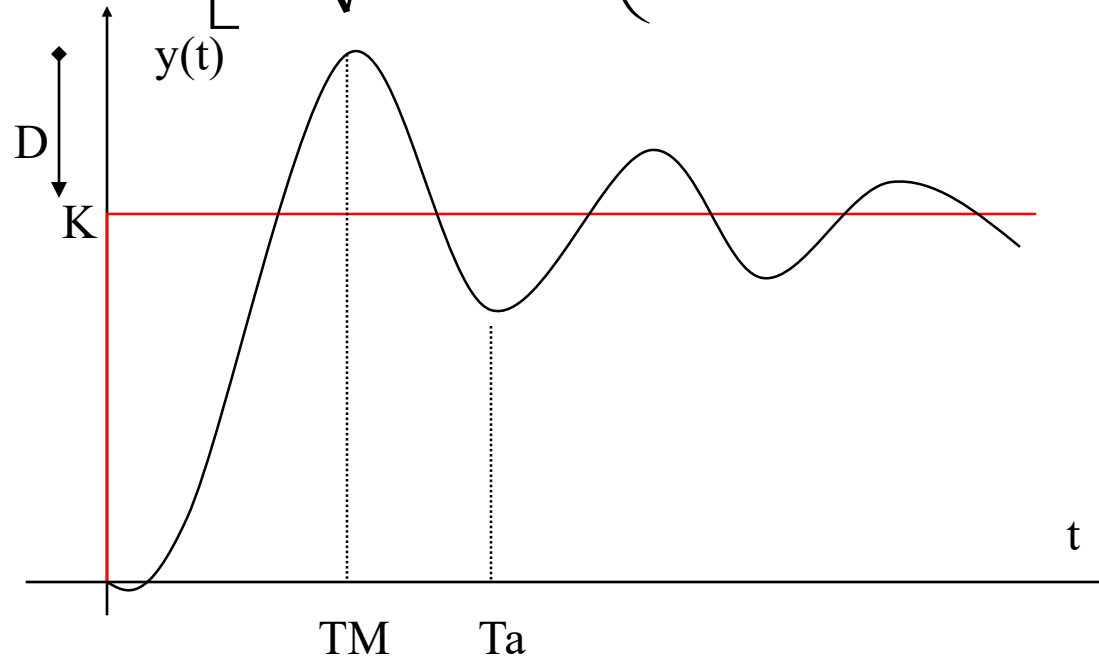


Filtre passe bas de second ordre

Réponse indicielle: $x(t) \rightarrow u(t)=\text{échelon}$

$$x(t)=u(t) \xLeftrightarrow{\text{TL}} X(p)=\frac{1}{p}$$

$$y(t)=K \left[1 - \frac{e^{-\xi \omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos \left(\omega_0 t \sqrt{1-\xi^2} - \text{artg} \left(\frac{3}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \right) \right]$$



$T_a =$ Pseudo période

$T_M =$ l'instant du 1er max 1er dépassement par rapport à K

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$$

$$T_M = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{T_a}{2}$$

$$D = \frac{e^{-\xi \omega_0 T_M}}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

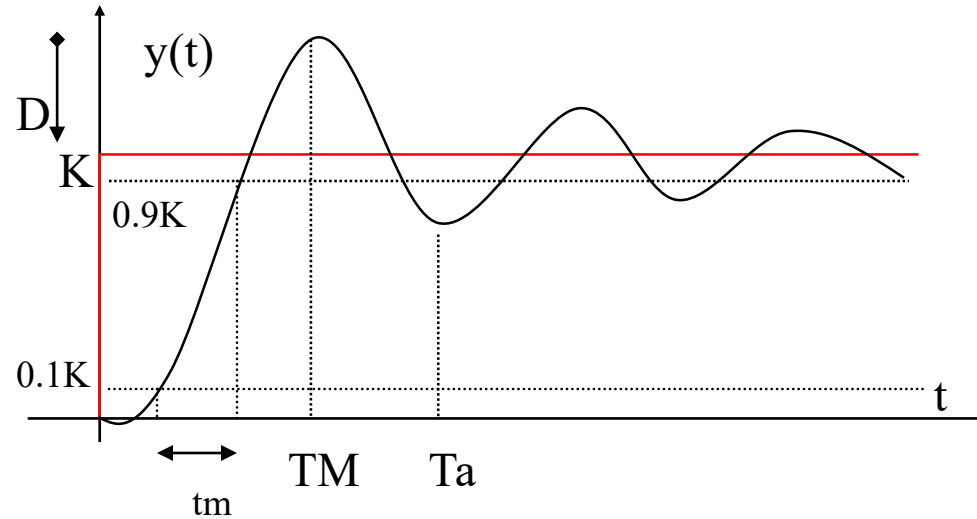
Filtre passe bas de second ordre

Réponse indicielle: $x(t) \rightarrow u(t)=\text{échelon}$

t_m est appelé temps de montée

Pseudo période :

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_o \sqrt{1-\xi^2}}$$



Plus la bande passante B d'un filtre est faible (ie ω_0 pour un passe bas) plus sa réponse à un échelon converge lentement vers la valeur de l'échelon $\rightarrow + t_m, TM, T_a$ sont grands

Gabarit des filtres

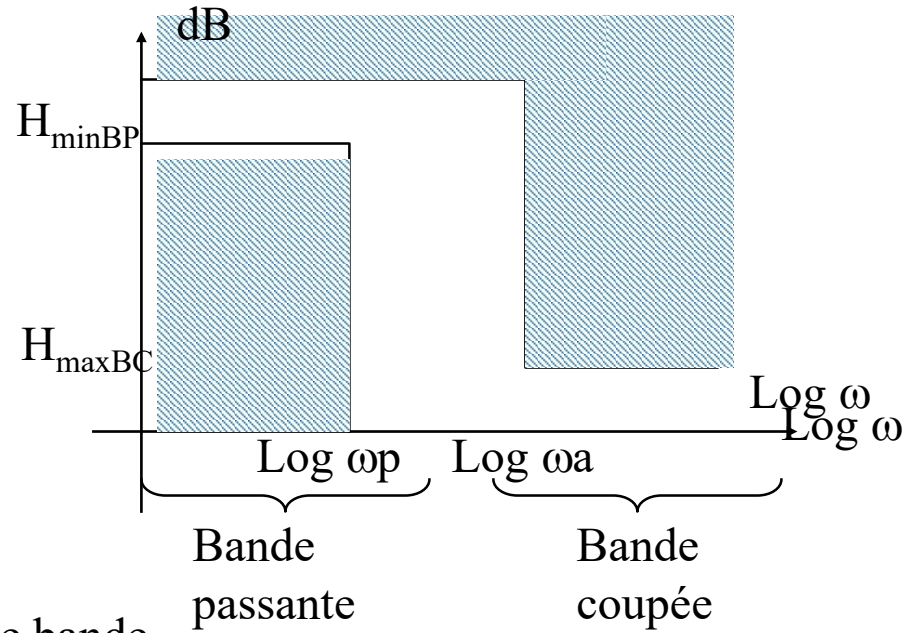
En pratique, un filtre est défini par son gabarit.

Le gabarit d'un filtre est constitué des limites de tolérance pour les différentes éléments du filtre:

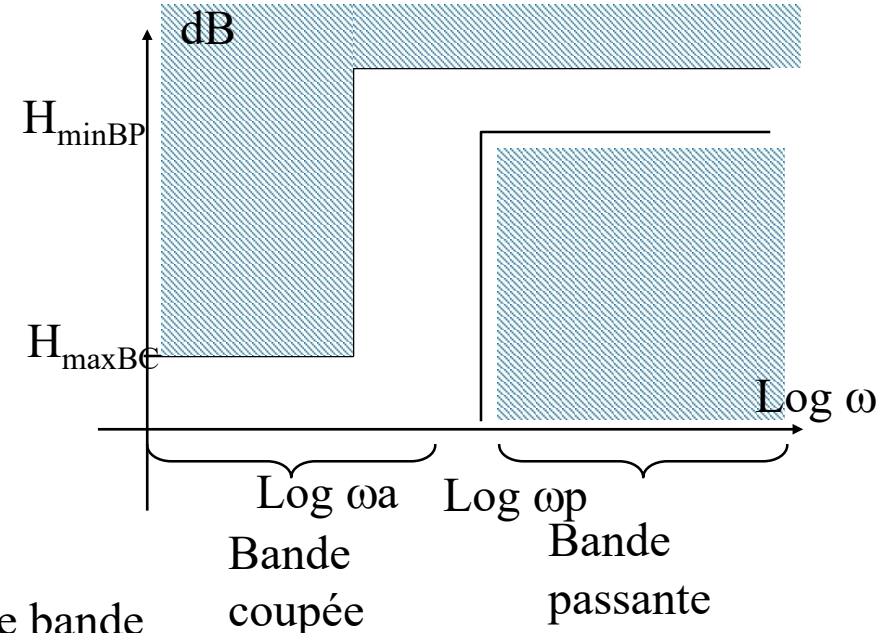
- ✓ La fréquence de coupure,
- ✓ L'atténuation dans la bande coupée, en dB,
- ✓ L'ondulation dans la bande passante, en dB,
- ✓ La largeur de la bande de transition, située entre la fréquence de coupure et la zone atténuée,

Filtre réel et gabarit

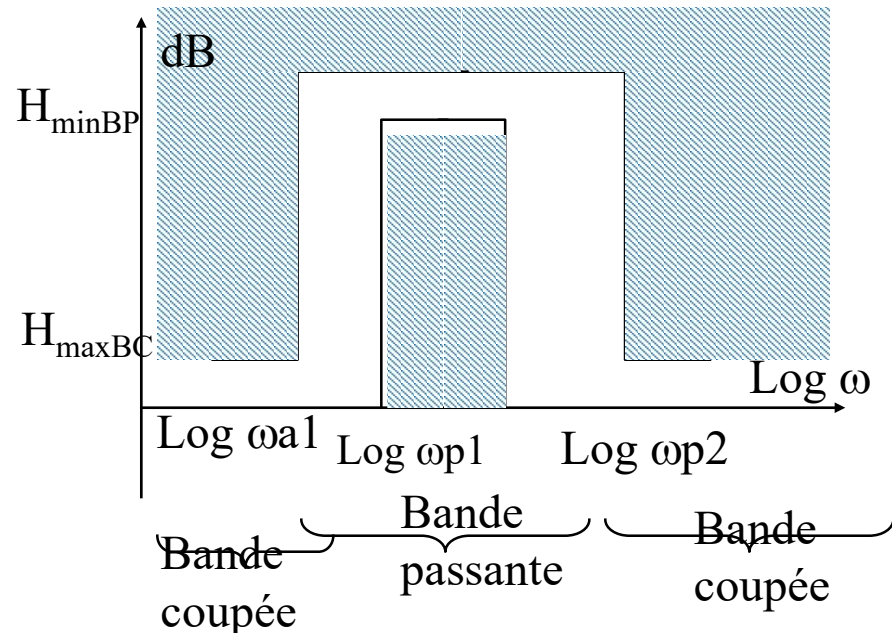
Passé bas



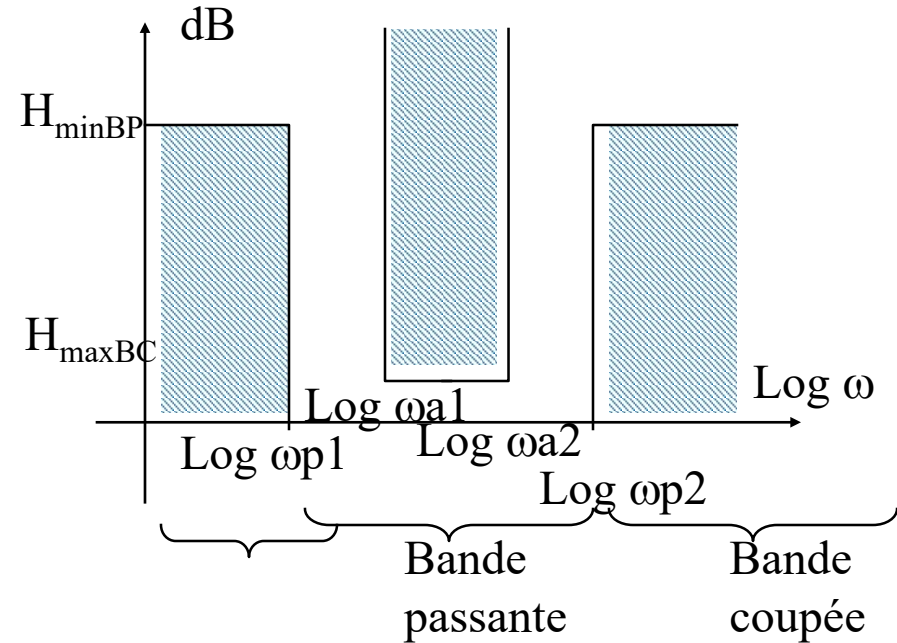
Passé haut



Passé bande



Coupe bande



Les fonctions d'approximations Filtre de Butterworth

Une infinité de fonctions de transfert peuvent satisfaire les conditions imposées par un gabarit

Objectif : Trouver la fonction de transfert de plus faible degré qui entre dans un gabarit

→ Filtre de Butterworth

Approximation du filtre de Butterworth : Filtre '*maximally flat*'

→ c'est un filtre très proche de l'asymptote horizontale (dans la bande passante)

$$H(X)H(-X) = \frac{1}{1 + (-1)^n (X)^{2n}} \quad \begin{array}{l} n = \text{ordre du filtre} \\ X = j\omega/\omega_0 \end{array}$$

$$\text{Les pôles sont : } 0 = 1 + (-1)^n (X)^{2n} \quad X_{n,k} = e^{j(\frac{n-1+2k}{2n})\pi}$$

Dans le cadre de la stabilité des systèmes : seuls les pôles à parties réelles négatives sont conservés

Exemple pour n=3

$$H(X) = \frac{1}{(X - X_{3,1})(X - X_{3,2})(X - X_{3,3})}$$

Les fonctions d'approximations : Filtre de Chebychev

Polynôme de Chebychev $P_n(x) = \Re_{eel} \left[x + j\sqrt{1-x^2} \right]^n$ avec $x = \frac{j\omega}{\omega_o}$

Les Polynômes de Chebychev obéissent à la relation de récurrence:

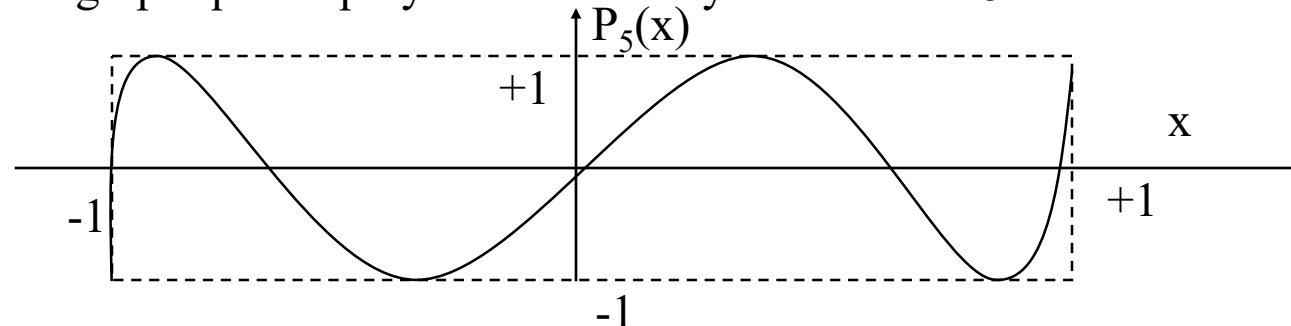
n=0	initialisation $P_0(x)=1$
n=1	initialisation $P_1(x)=x$
n=2	$P_2(x)=2x^2-1$
n=3	$P_3(x)=4x^3-3x$
n=4	$P_4(x)=8x^4-8x^2+1$

$$P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x)$$

Autre représentation du polynôme:

$$P_n(x) = \begin{cases} \cos(n \operatorname{Arc} \cos(x)) & \text{si } x \leq 1 \\ \operatorname{ch}(n \operatorname{Argch}(x)) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Représentation graphique du polynôme de Chebychev d'ordre 5



Les fonctions d'approximations : Filtre de Chebychev

Avec les polynômes de Chebychev on peut définir un filtre de type polynomial dont la réponse est ondulatoire dans la bande passante

Filtre de Chebychev $|H(p)|^2 = H(p)H(-p) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cdot P_n^2(\Omega)}$

ε caractérise l'amplitude max des oscillations dans la bande passante

Dans la bande passante :

- pour $\Omega = \omega/\omega_0 = 0 \rightarrow |H(p)| = 1$
- pour $\Omega = 1 \rightarrow |H(p)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$

Les pôles sont : $1 + \varepsilon^2 \cdot P_n^2(\Omega) = 0$

Les pôles de la fonction de transfert se trouvent sur une ellipse

Remarque : les filtres de Chebychev présentent un bon comportement dans la bande coupée

Les fonctions d'approximations : Filtre de Bessel

Les filtres de Bessel sont des filtres polynomiaux pour lesquels le critère d'optimisation est la régularité du temps de propagation dans la bande passante

→ Filtre à phase linéaire: la phase est une fonction linéaire de la fréquences $\tau_g = -\frac{d\phi}{d\omega}$

Si les réponses montrent une atténuation faible en bande coupée , les transitoires sont transmis dans de meilleures conditions

- absence d'oscillations
- temps de montée minimum
- temps d'établissement très court

La fonction de Bessel :
$$H(p) = e^{-p} = \frac{1}{\frac{e^{+p} + e^{-p}}{2} + \frac{e^{+p} - e^{-p}}{2}} = \frac{1}{ch(p) + sh(p)}$$

Les développements de ch(p) et sh(p) :

$$ch(p) = ch(0) + \frac{p}{1!}sh(0) + \frac{p^2}{2!}ch(0) + \frac{p^3}{3!}sh(0) + \dots = 1 + \frac{p^2}{2!} + \frac{p^4}{4!} + \dots$$

$$sh(p) = sh(0) + \frac{p}{1!}ch(0) + \frac{p^2}{2!}sh(0) + \frac{p^3}{3!}ch(0) + \dots = p + \frac{p^3}{3!} + \dots$$

Les fonctions d'approximations : Filtre de Bessel

Si on développe $\text{cth}(p)$:

$$\text{cth}(p) = \frac{\text{ch}(p)}{\text{sh}(p)} = \frac{1 + \frac{p^2}{2!} + \frac{p^4}{4!} + \dots}{p + \frac{p^1}{1!} + \frac{p^3}{3!} + \dots}$$

La division polynomiale par puissances croissantes de p et permet d'écrire $\text{cth}(p)$ sous forme de fraction en **limitant** le développement à l'ordre n

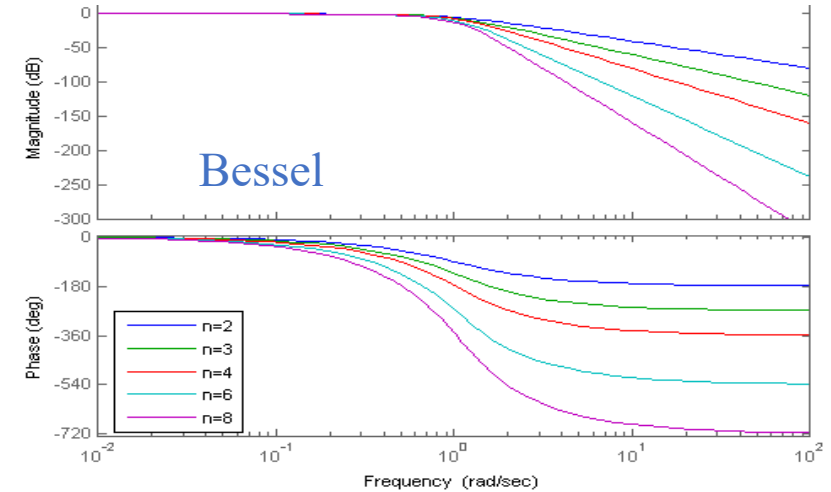
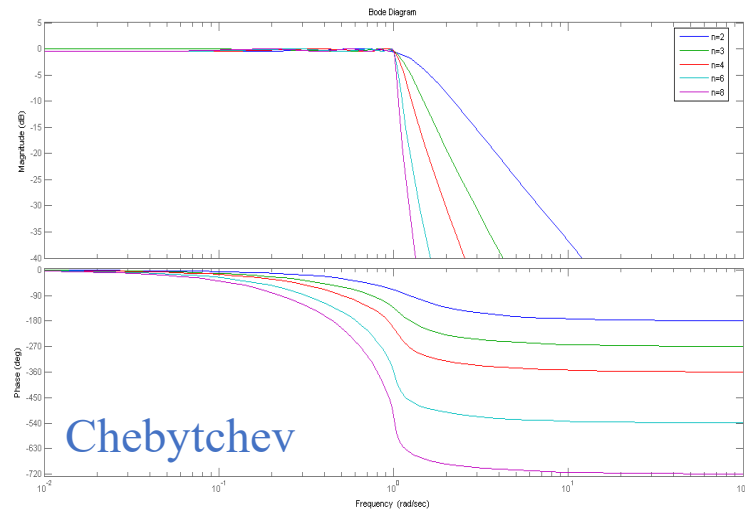
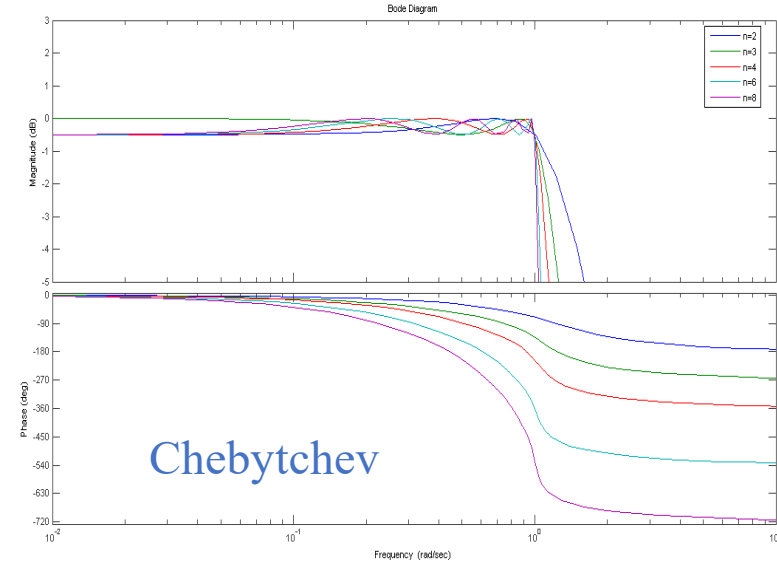
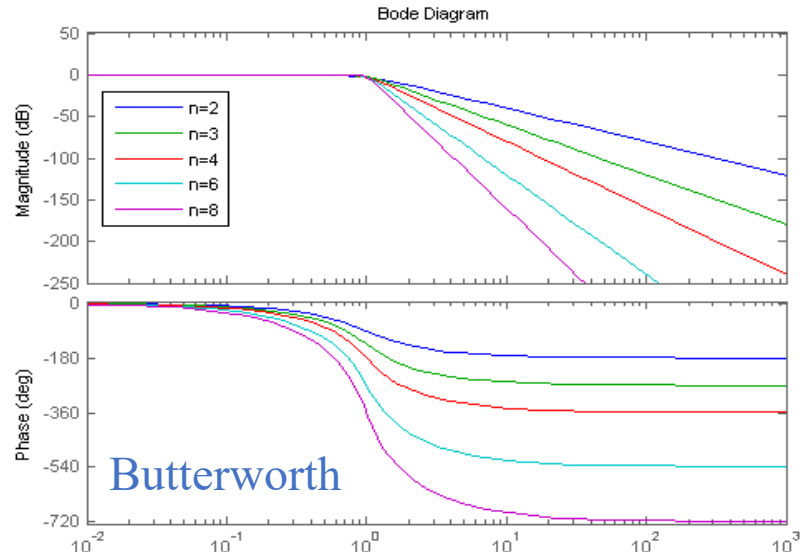
Exemple pour $n=3$ $\text{cth}(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\frac{3}{p} + \frac{1}{5}} = \frac{15 + 6p^2}{15p + p^3} = \frac{\text{ch}(p)}{\text{sh}(p)}$

$$H(p) = e^{-p} = \frac{1}{\text{ch}(p) + \text{sh}(p)} \quad p$$

$$H(p) = \frac{1}{15 + 15p + 6p^2 + p^3}$$

Il n'existe pas de méthode analytique pour déterminer l'ordre d'un polynôme de Bessel répondant aux paramètres d'un gabarit. Il faut le déterminer par approximations successives à l'aide de solveurs numériques.

Module de la fonction de transfert en fonction f pour $n=2\dots 8$



Remarque sur la Bande Passante

Exemple:

$$H(p) = \frac{K}{1 + 2\xi \cdot \frac{p}{\omega_o} + \frac{p^2}{\omega_o^2}} = \frac{K}{1 + \frac{1}{Q} \cdot \frac{p}{\omega_o} + \frac{p^2}{\omega_o^2}}$$

Avec le facteur de qualité $Q = \frac{1}{2\xi}$ $Q = \frac{f_0}{\Delta f}$

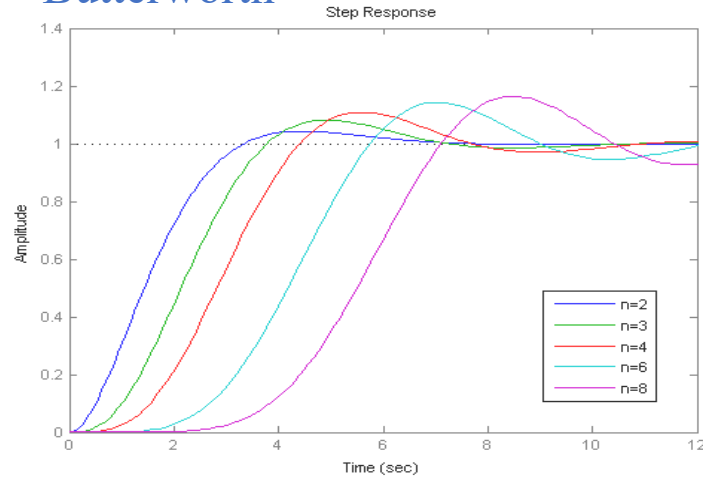
≈ 0

Selon la valeur de Q, les filtres portent des noms différents :

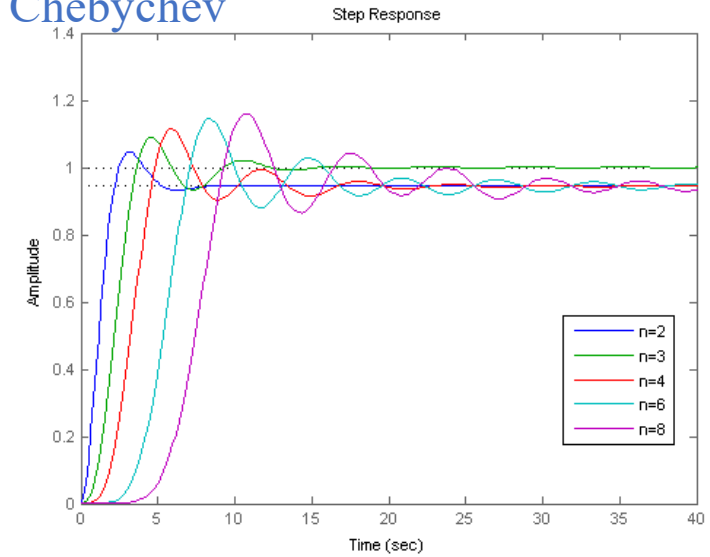
- Q=0.707 filtre de Butterworth
- Q=0.577 filtre de Bessel
- Q=0.863 filtre de Tchebycheff (ripple band 0.5 dB)
- Q=1.128 filtre de Tchebycheff (ripple band 2 dB)

Réponse à un échelon (indicielle) pour une ordre $n=2$ ou 3, 4, 6, 8

Butterworth



Chebyshev



Bessel

