

CHAPITRE III

Cinématique des milieux continus

EFFORT



TECHNICITE



RISQUE



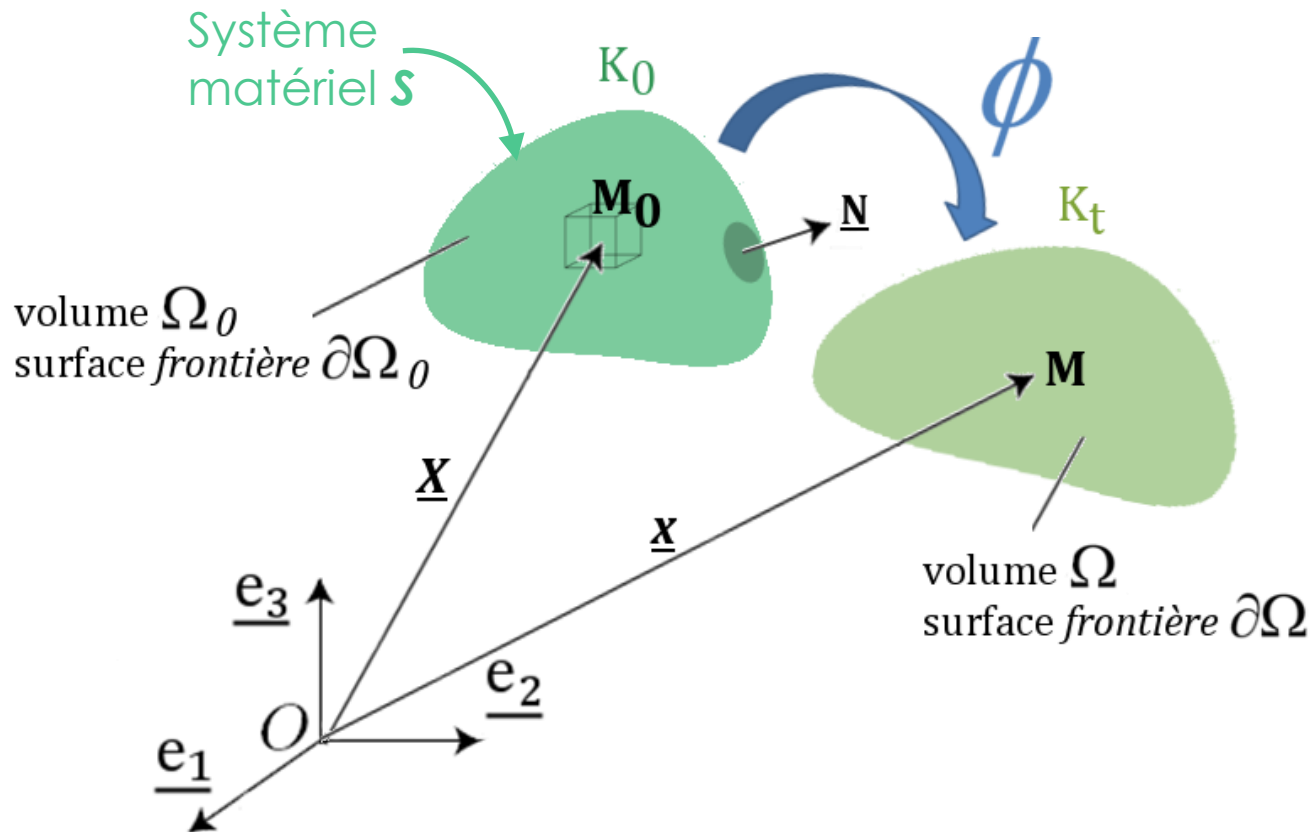
OBJECTIF

*Comment un corps se
« déforme »-t-il ?*

CHAP III: Cinématique des milieux continus

Représentation du mouvement

- Repérage des points matériels
- Descriptions lagrangienne ou eulérienne?
- Déplacement, vitesse, accélération
- Description de la transformation
- Gradient de la transformation
- Décomposition polaire
- Transport d'un volume
- Taux de dilatation volumique



Configuration de
référence

$$K_0, t_0$$

$$\underline{OM}_0 = \underline{X} = X_i \underline{e}_i$$

→ majuscules!

Configuration
actuelle

$$K_t, t$$

$$\underline{OM} = \underline{x} = x_i \underline{e}_i$$

→ minuscules!

Configuration de
référence

Transformation $\underline{\phi}$

Configuration
actuelle

Exemple

■ Soit la transformation : $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$
$$\begin{cases} x_1 = \phi_1(\underline{X}, t) = X_1 + \alpha t^2 \\ x_2 = \phi_2(\underline{X}, t) = \frac{t}{\tau} X_1 + X_2 \\ x_3 = \phi_3(\underline{X}, t) = X_3 \end{cases}$$

La fonction vectorielle $\underline{\phi}(\underline{X}, t)$ permet de passer de K_0 dans K_t

Point particulier (point rouge) :

$$\underline{X} = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \Rightarrow \underline{x} = 1.5\underline{e}_1 + 1.5\underline{e}_2$$

Condition initiale :

$$\underline{x}(\underline{X}, t = 0) = \underline{X}$$

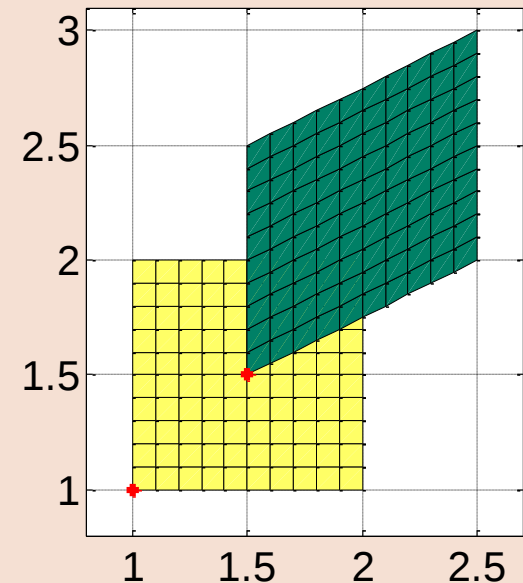
$$X_1 = [1, 2]$$

$$X_2 = [1, 2]$$

$$t = 0.5$$

$$\alpha = 2$$

$$\tau = 1$$



CHAP III: Cinématique des milieux continus

Représentation du mouvement

- Repérage des points matériels
- Descriptions lagrangienne ou eulérienne?
- Déplacement, vitesse, accélération
- Description de la transformation
- Gradient de la transformation
- Décomposition polaire
- Transport d'un volume
- Taux de dilatation volumique

Description lagrangienne

= description **par trajectoire**

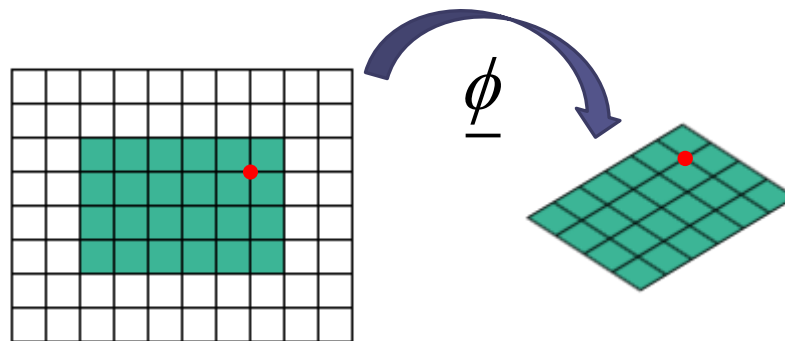
→ on suit le mouvement d'un point matériel au cours du temps

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \quad \text{avec} \quad \underline{\phi}(\underline{X}, t = t_0) = \underline{X}$$

Comme $\underline{\phi}$ est une bijection, on peut noter $\underline{\psi} = \underline{\phi}^{-1}$ et on a $\underline{X} = \underline{\psi}(\underline{x}, t)$

Variables de Lagrange: t, X_1, X_2, X_3 (« coordonnées matérielles »)

Inconnues de Lagrange: $\phi_1(\underline{X}, t), \phi_2(\underline{X}, t), \phi_3(\underline{X}, t)$



Description eulérienne

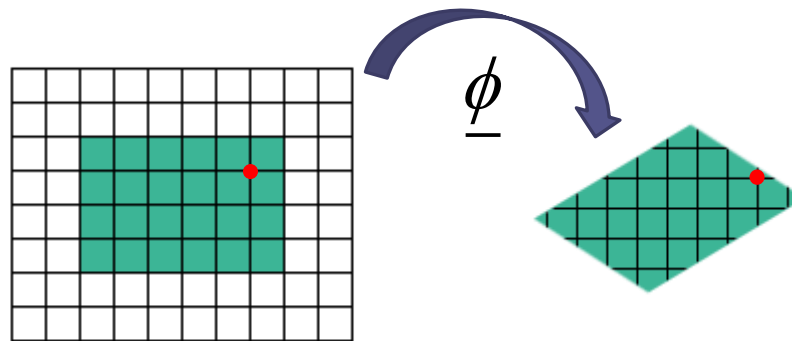
= description sans connaissance de la config. de référence

→ on décrit le mouvement par le champ de **vitesse**s dans K_t

$$\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi(\underline{X}, t)}{\partial t} = \underline{v}(\phi(\underline{X}, t), t) \quad \text{avec} \quad \phi(\underline{X}, t = t_0) = \underline{X}$$

Variables d'Euler: t, x_1, x_2, x_3 (« coordonnées spatiales »)

Inconnues d'Euler: $v_1(\underline{x}, t), v_2(\underline{x}, t), v_3(\underline{x}, t)$



Remarques de notation

→ Quantité tensorielle en description **lagrangienne**: $\mathbf{G}(\underline{X}, t)$

→ Quantité tensorielle en description **eulérienne**: $\mathbf{g}(\underline{x}, t)$

- Gradient (ou divergence) d'une fonction en description **lagrangienne**

= par rapport aux variables de **Lagrange**

$$\text{Grad}(\mathbf{G}(\underline{X}, t)) = \frac{\partial \mathbf{G}(\underline{X}, t)}{\partial \underline{X}}$$

- Gradient (ou divergence) d'une fonction en description **eulérienne**

= par rapport aux variables **d'Euler**

$$\text{grad}(\mathbf{g}(\underline{x}, t)) = \frac{\partial \mathbf{g}(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}}$$

Dérivée particulaire

Objectif : on veut calculer la **dérivée temporelle** (l'évolution) d'un champ dans le temps **pour une particule donnée**.

- Dérivée de la quantité **lagrangienne** $G(\underline{X}, t)$: facile car $\underline{X}$ est fixe

$$\dot{G}(\underline{X}, t) = \frac{dG(\underline{X}, t)}{dt} : \text{dérivée } \mathbf{particulaire} \text{ ou } \mathbf{matérielle}$$

- Dérivée partielle de la quantité eulérienne $g(\underline{x}, t)$ ($\underline{x}$ est fixe)

$$\frac{\partial g(\underline{x}, t)}{\partial t} : \text{dérivée } \mathbf{spatiale} \text{ ou } \mathbf{eulérienne}$$

→ **problème**: dérivée **particulaire** (totale) d'un quantité écrite en description **eulérienne** ?

Dérivée particulaire

- Dérivée **totale** de la quantité eulérienne $\mathbf{g}(\underline{x}, t)$ ($\underline{X}$ est fixe)

$$\dot{\mathbf{g}}(\underline{x}, t) = \frac{d\mathbf{g}(\underline{x}, t)}{dt} = \frac{d\mathbf{g}(\phi(\underline{X}, t), t)}{dt}$$

- On peut écrire: $d\mathbf{g}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{g}(\underline{x}, t)}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathbf{g}(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} dt$

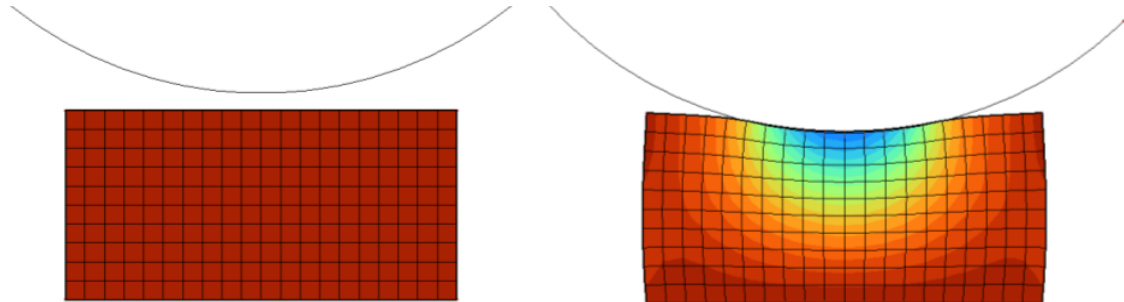
dérivée
particulaire

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{g}}(\underline{x}, t) &= \frac{d\mathbf{g}(\underline{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{g}(\underline{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{g}(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \mathbf{g}(\underline{x}, t)}{\partial t} + \text{grad}(\mathbf{g}(\underline{x}, t)) \cdot \underline{v}(\underline{x}, t) \end{aligned}$$

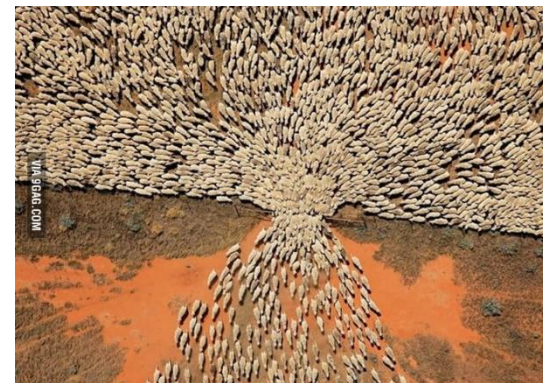
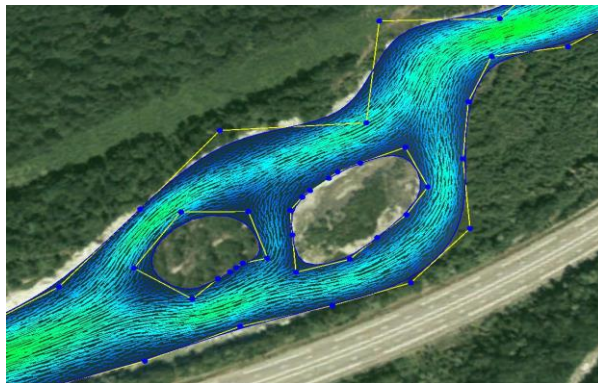
dérivée
eulérienne

Terme
d'advection

- Description **lagrangienne** : suivi des points matériels à partir d'une configuration de **référence** connue → mécanique du **solide**

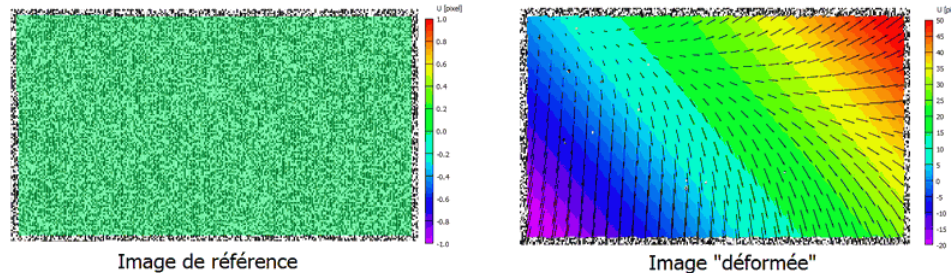


- Description **eulérienne**: description des vitesses à des points connus de la configuration **actuelle** → mécanique des **fluides**



- Méthode expérimentale en mécanique du solide :
suivi des points matériels à partir d'une configuration de **référence**

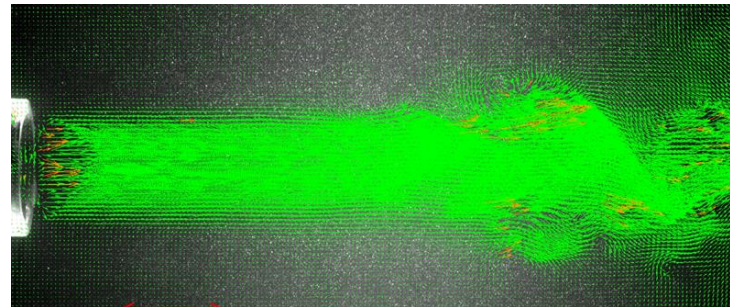
$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$$



DIC : Digital image correlation

- Méthode expérimentale en mécanique des fluides:
tracé du champ de vitesses

$$\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, t)$$



PIV : Particle Image Velocimetry

CHAP III: Cinématique des milieux continus

Représentation du mouvement

- Repérage des points matériels
- Descriptions lagrangienne ou eulérienne?
- Déplacement, vitesse, accélération
- Description de la transformation
- Gradient de la transformation
- Décomposition polaire
- Transport d'un volume
- Taux de dilatation volumique

Champ de déplacement

- Définition évidente d'après les notations précédentes :

$$\underline{U}(\underline{X}, t) = \underline{x}(\underline{X}, t) - \underline{X}$$

→ fonction des variables de Lagrange, donc quantité **lagrangienne**

- Alternative en description **eulérienne** : $\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{x} - \underline{X}(\underline{x}, t)$

- 2 définitions mais **mêmes valeurs**

→ notation minuscule pour la suite : $\underline{u}(\underline{X}, t)$

- Cinématique souvent décrite par un champ de **déplacement** en mécanique du solide

Exemple

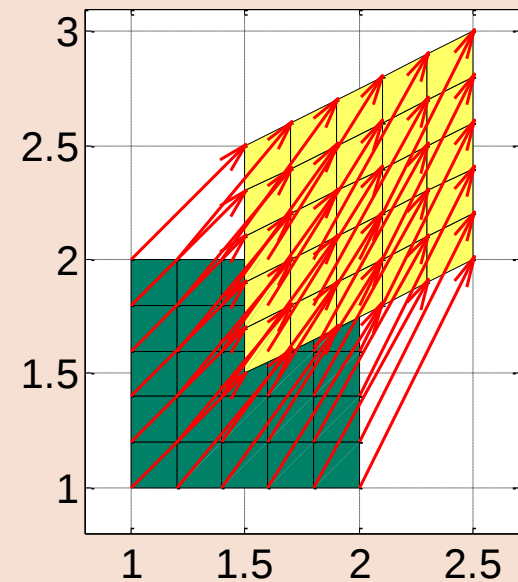
- Transformation plane :

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \begin{cases} x_1 = \phi_1(\underline{X}, t) = X_1 + \alpha t^2 \\ x_2 = \phi_2(\underline{X}, t) = \frac{t}{\tau} X_1 + X_2 \\ x_3 = \phi_3(\underline{X}, t) = X_3 \end{cases} \Rightarrow \underline{X} = \underline{\phi}^{-1}(\underline{x}, t) \begin{cases} X_1 = \phi_1^{-1}(\underline{x}, t) = x_1 - \alpha t^2 \\ X_2 = \phi_2^{-1}(\underline{x}, t) = x_2 - \frac{t}{\tau} x_1 + \frac{\alpha}{\tau} t^3 \\ X_3 = \phi_3^{-1}(\underline{x}, t) = x_3 \end{cases}$$

- Champ de déplacement:

$$\underline{U}(\underline{X}, t) = \underline{x}(\underline{X}, t) - \underline{X} \begin{cases} U_1 = x_1(\underline{X}, t) - X_1 = \alpha t^2 \\ U_2 = x_2(\underline{X}, t) - X_2 = \frac{t}{\tau} X_1 \\ U_3 = x_3(\underline{X}, t) - X_3 = 0 \end{cases}$$

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{x} - \underline{X}(\underline{x}, t) \begin{cases} u_1 = x_1 - X_1(\underline{x}, t) = \alpha t^2 \\ u_2 = x_2 - X_2(\underline{x}, t) = \frac{t}{\tau} (x_1 - \alpha t^2) \\ u_3 = x_3 - X_3(\underline{x}, t) = 0 \end{cases}$$



Champ de vitesse et d'accélération

- Si on suit un point matériel : définition évidente

$$\underline{V}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{x}(\underline{X}, t)}{\partial t} = \underline{v}(\underline{x}, t) \qquad \underline{A}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{V}(\underline{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \underline{x}(\underline{X}, t)}{\partial t^2}$$

→ fonctions des variables de Lagrange, donc quantités **lagrangiennes**

- Si on connaît la description **eulérienne** du mouvement (fluides):

→ accélération = dérivée **particulaire** du champ de vitesse

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}(\underline{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \underline{v}(\underline{x}, t)}{\partial t} + \underline{\underline{grad}}(\underline{v}(\underline{x}, t)) \cdot \underline{v}(\underline{x}, t)$$

→ description de l'accélération d'un point sans en connaître la cinématique

Exemple

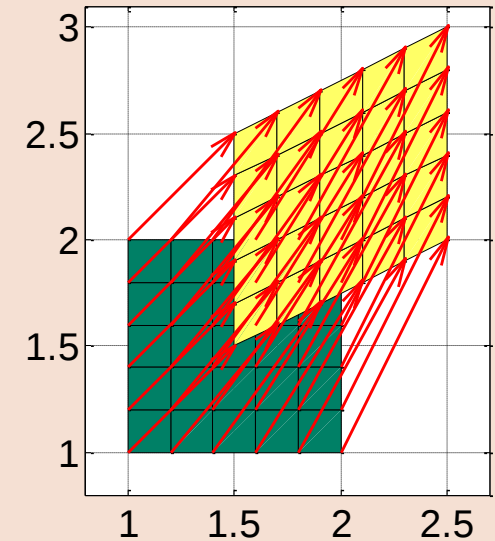
- Champ de déplacement:

$$\begin{cases} U_1(\underline{X}, t) = \alpha t^2 \\ U_2(\underline{X}, t) = \frac{t}{\tau} X_1 \\ U_3(\underline{X}, t) = 0 \end{cases}$$

formulation lagrangienne

$$\begin{cases} u_1(\underline{x}, t) = \alpha t^2 \\ u_2(\underline{x}, t) = \frac{t}{\tau} (x_1 - \alpha t^2) \\ u_3(\underline{x}, t) = 0 \end{cases}$$

formulation eulérienne



- Calcul de la vitesse et de l'accélération

formulation lagrangienne : **facile !**

$$\underline{V}(\underline{X}, t) = \frac{d\underline{U}(\underline{X}, t)}{dt}$$

$$\underline{A}(\underline{X}, t) = \frac{d\underline{V}(\underline{X}, t)}{dt}$$

formulation eulérienne : **attention : dérivée particulaire !**

Exemple

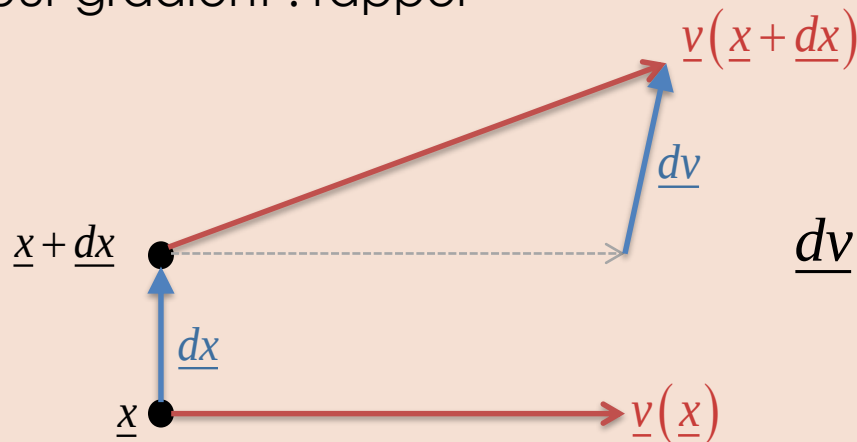
dérivée
particulaire

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{g}}(\underline{x}, t) &= \frac{d\mathbf{g}(\underline{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{g}(\underline{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{g}(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \mathbf{g}(\underline{x}, t)}{\partial t} + \text{grad}(\mathbf{g}(\underline{x}, t)) \cdot \underline{v}(\underline{x}, t) \end{aligned}$$

dérivée
eulérienne

Terme
d'advection

- Opérateur gradient : rappel

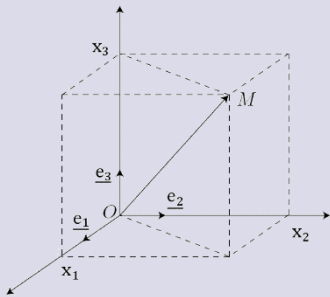


$$\underline{dv} = \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{v}(\underline{x}, t)) \cdot \underline{dx}$$

Exemple

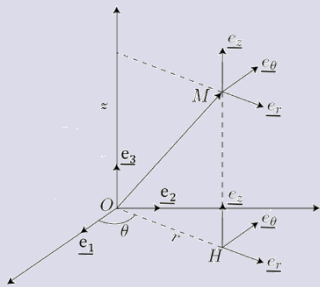
Gradient d'un champ scalaire

Coordonnées cartésiennes



$$[\underline{\text{Grad}} T] = \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x_1} \\ \frac{\partial T}{\partial x_2} \\ \frac{\partial T}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

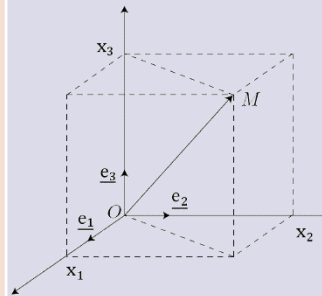
Coordonnées cylindriques



$$[\underline{\text{Grad}} T] = \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix}$$

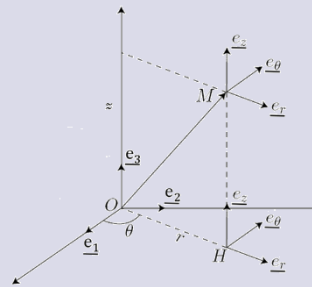
Gradient d'un champ de vecteurs

Coordonnées cartésiennes



$$[\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{T}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \frac{\partial T_1}{\partial x_2} & \frac{\partial T_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_2}{\partial x_1} & \frac{\partial T_2}{\partial x_2} & \frac{\partial T_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_3}{\partial x_1} & \frac{\partial T_3}{\partial x_2} & \frac{\partial T_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Coordonnées cylindriques



$$[\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{T}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_r}{\partial \theta} - T_\theta \right) & \frac{\partial T_r}{\partial z} \\ \frac{\partial T_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + T_r \right) & \frac{\partial T_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial T_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial T_z}{\partial \theta} & \frac{\partial T_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Exemple

$$\begin{cases} U_1(\underline{X}, t) = \alpha t^2 \\ U_2(\underline{X}, t) = \frac{t}{\tau} X_1 \\ U_3(\underline{X}, t) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_1(\underline{x}, t) = \alpha t^2 \\ u_2(\underline{x}, t) = \frac{t}{\tau} (x_1 - \alpha t^2) \\ u_3(\underline{x}, t) = 0 \end{cases}$$

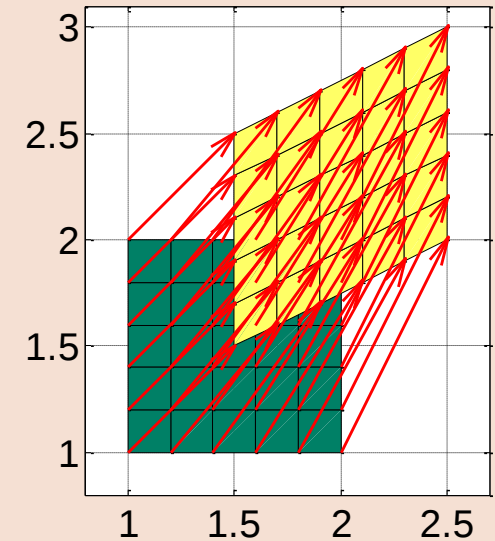
- description **lagrangienne**:

$$\underline{V}(\underline{X}, t) = \frac{d\underline{U}(\underline{X}, t)}{dt} = \frac{\partial \underline{U}(\underline{X}, t)}{\partial t} \quad [\underline{V}(\underline{X}, t)] = \begin{pmatrix} 2\alpha t \\ X_1/\tau \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Champ de vitesse à partir de la description **eulérienne**:

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \underline{u}(\underline{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \underline{u}(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} \quad [\underline{v}(\underline{x}, t)] = \begin{pmatrix} 2\alpha t \\ \frac{x_1}{\tau} - 3\frac{\alpha}{\tau}t^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{t}{\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\alpha t \\ \frac{X_1}{\tau} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha t \\ \frac{1}{\tau}(x_1 - \alpha t^2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ on vérifie: $\underline{v}(\underline{x}, t) = \underline{V}(\underline{X}, t)$



Exemple

$$\underline{V}(\underline{X}, t) = 2\alpha t \underline{e}_1 + X_1/\tau \underline{e}_2$$

- Champ de vitesse :

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = 2\alpha t \underline{e}_1 + \frac{1}{\tau} (x_1 - \alpha t^2) \underline{e}_2$$

- Champ d'accélération en description **lagrangienne** :

$$\underline{A}(\underline{X}, t) = \frac{d\underline{V}(\underline{X}, t)}{dt} = \frac{\partial \underline{V}(\underline{X}, t)}{\partial t} \quad [\underline{A}(\underline{X}, t)] = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Champ d'accélération en description **eulérienne** :

$$\underline{a}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \underline{v}(\underline{x}, t)}{\partial t} + \underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{v}(\underline{x}, t) \quad [\underline{a}(\underline{x}, t)] = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ -2\frac{\alpha}{\tau}t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\alpha t \\ \frac{1}{\tau}(x_1 - \alpha t^2) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ champ d'accélération déterminé sans connaître les **trajectoires**

CHAP III: Cinématique des milieux continus

Représentation du mouvement

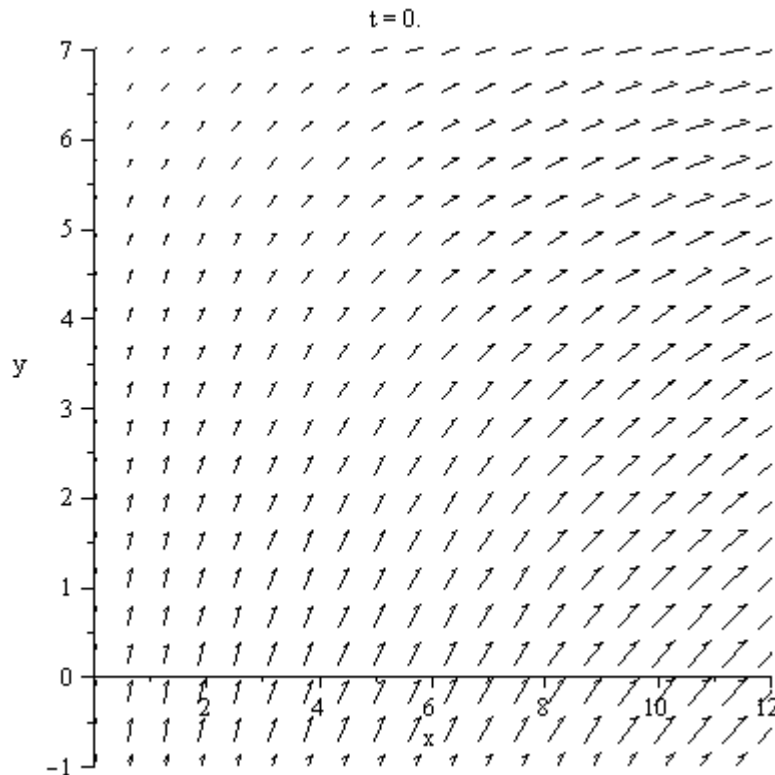
- Repérage des points matériels
- Descriptions lagrangienne ou eulérienne?
- Déplacement, vitesse, accélération
- Description de la transformation
- Gradient de la transformation
- Décomposition polaire
- Transport d'un volume
- Taux de dilatation volumique

Trajectoires

= lieu des positions occupées par un point matériel au cours du temps

→ courbe paramétrée indépendante du temps

→ il y a autant de trajectoires que de points matériels



→ Description **lagrangienne** :

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$$

→ Description **eulérienne** :

$$d\underline{x} = \underline{v}(\underline{x}, t)dt \quad \text{avec} \quad \underline{x}(t=0) = \underline{X}$$

Exemple

- On reprend la transformation: $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$

$$\begin{cases} x_1 = \phi_1(\underline{X}, t) = X_1 + \alpha t^2 \\ x_2 = \phi_2(\underline{X}, t) = \frac{t}{\tau} X_1 + X_2 \\ x_3 = \phi_3(\underline{X}, t) = X_3 \end{cases}$$

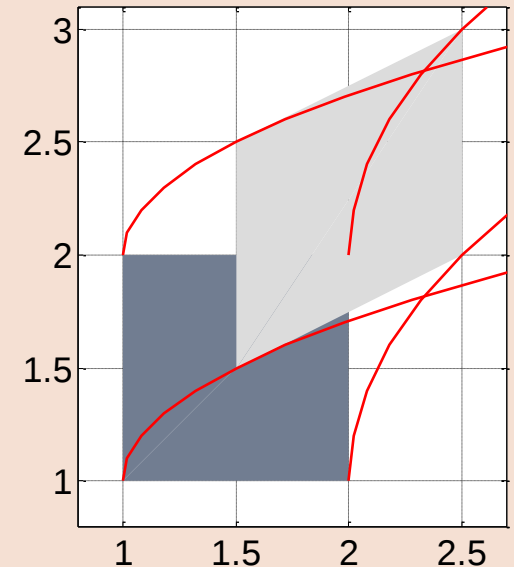
→ description **lagrangienne** = équation des **trajectoires**

- En description **eulérienne** on a vu : $\underline{v}(\underline{x}, t) = 2\alpha t \underline{e}_1 + \frac{1}{\tau} (x_1 - \alpha t^2) \underline{e}_2$

$$\underline{dx} = \underline{v}(\underline{x}, t) dt \Rightarrow \begin{cases} dx_1 = v_1(\underline{x}, t) dt = 2\alpha t dt \\ dx_2 = v_2(\underline{x}, t) dt = \frac{1}{\tau} (x_1 - \alpha t^2) dt \\ dx_3 = v_3(\underline{x}, t) dt = 0 \end{cases}$$

Condition initiale : $\underline{x}(t=0) = \underline{X}$

$$\begin{cases} x_1(t=0) = C_1 = X_1 \\ x_2(t=0) = C_2 = X_2 \\ x_3(t=0) = C_3 = X_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha t^2 + X_1 \\ x_2 = X_1 \frac{t}{\tau} + X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$



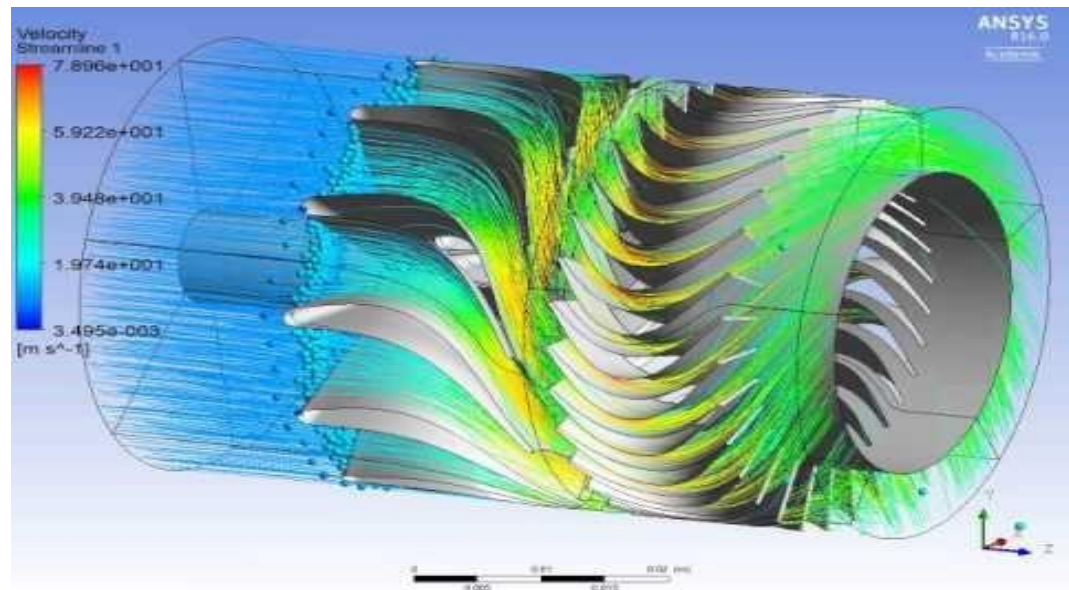
Lignes de courant

= enveloppe des champs des vecteurs vitesses à un instant t

→ Lignes tangentes à $\underline{v}(\underline{x}, t)$: $d\underline{x}$ est sur la ligne si $d\underline{x} \wedge \underline{v}(\underline{x}, t) = \underline{0}$

$$\underline{dx} \wedge \underline{v}(\underline{x}, t) = \underline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx_1}{v_1(\underline{x}, t)} = \frac{dx_2}{v_2(\underline{x}, t)} = \frac{dx_3}{v_3(\underline{x}, t)}$$

Exemple de visualisation:
(vraie à un instant donné)



Exemple

- Pour l'exemple précédent on a calculé le champ de vitesse :

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = 2\alpha t \underline{e}_1 + \frac{1}{\tau} (x_1 - \alpha t^2) \underline{e}_2$$

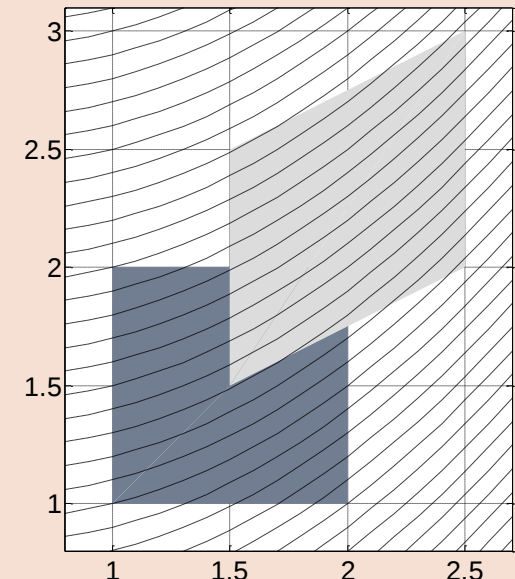
$$\frac{dx_1}{v_1(\underline{x}, t)} = \frac{dx_2}{v_2(\underline{x}, t)} = \frac{dx_3}{v_3(\underline{x}, t)} \Rightarrow \frac{dx_1}{2\alpha t} = \frac{dx_2}{\frac{1}{\tau} (x_1 - \alpha t^2)} \Rightarrow dx_1 \frac{1}{\tau} (x_1 - \alpha t^2) = 2\alpha t dx_2$$

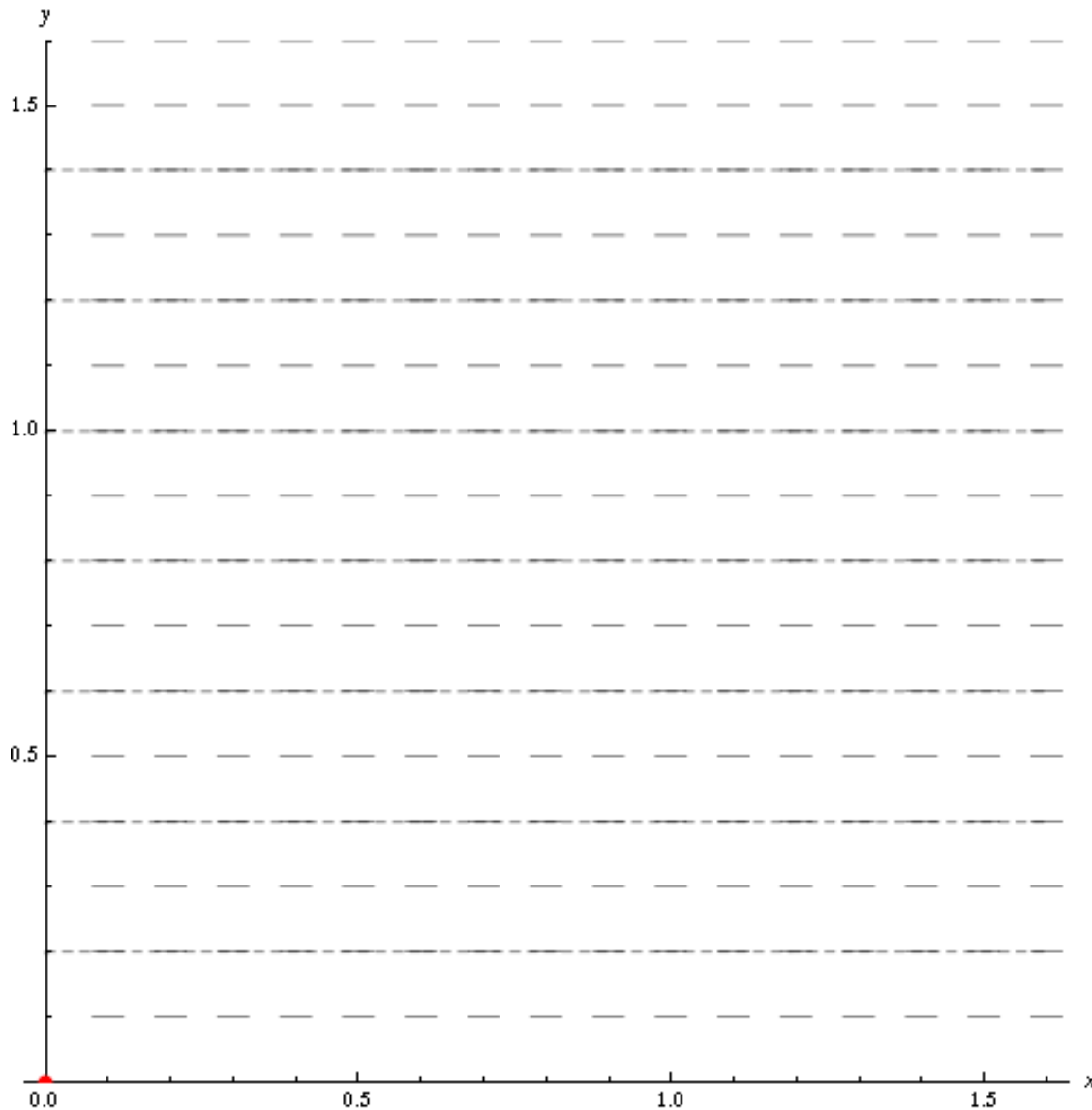
→ Résolution de l'équation différentielle :

$$\frac{1}{\tau} dx_1 x_1 - \frac{\alpha}{\tau} t^2 dx_1 = 2\alpha t dx_2$$

$$\Rightarrow \frac{x_1^2}{2\tau} - \frac{\alpha}{\tau} t^2 x_1 = 2\alpha t x_2 + cste$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{x_1}{2\alpha t \tau} \left(\frac{x_1}{2} - \alpha t^2 \right) + cste$$





En rouge: **trajectoires**

Pointillés: **lignes de courant**

(En bleu: **ligne d'émission** du point d'origine.)

■ Cas du mouvement stationnaire

= sa description eulérienne n'est pas fonction du temps

= champ de vecteurs vitesse fonction de l'espace uniquement

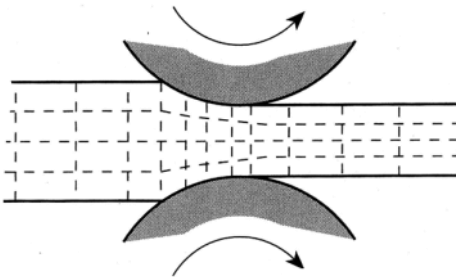
$$\underline{v}(\underline{x}, t) = \underline{v}(\underline{x})$$

Conséquences:

$$\begin{cases} \underline{dx} = \underline{v}(\underline{x})dt \\ \underline{x}(t=0) = \underline{X} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{dx_1}{v_1(\underline{x})} = \frac{dx_2}{v_2(\underline{x})} = \frac{dx_3}{v_3(\underline{x})}$$

= lignes de courant et trajectoires sont identiques

Laminage: stationnaire



Extrusion: non-stationnaire



CHAP III: Cinématique des milieux continus

Représentation du mouvement

- Repérage des points matériels
- Descriptions lagrangienne ou eulérienne?
- Déplacement, vitesse, accélération
- Description de la transformation
- Gradient de la transformation
- Décomposition polaire
- Transport d'un volume
- Taux de dilatation volumique

Tenseur gradient de la transformation

Vecteur élémentaire liant le point M et le point P infiniment proche de M

$$\underline{dX} = \underline{X}^P - \underline{X}^M \quad \rightarrow \text{dans } K_0$$

Après déformation on a:

$$\underline{x}^M = \underline{\phi}(\underline{X}^M, t) \quad \underline{x}^P = \underline{\phi}(\underline{X}^P, t)$$

Le vecteur élémentaire devient dans K_t :

$$\underline{dx} = \underline{x}^P - \underline{x}^M = \underline{\phi}(\underline{X}^M + \underline{dX}, t) - \underline{\phi}(\underline{X}^M, t)$$

Taylor:
$$f(x + dx) = f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} \frac{1}{1!} dx + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \frac{1}{2!} dx^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} \frac{1}{n!} dx^n$$

Au premier ordre:
$$\underline{dx} = \underline{x}^P - \underline{x}^M = \underline{\phi}(\underline{X}^M + \underline{dX}, t) - \underline{\phi}(\underline{X}^M, t) = \frac{\partial \underline{\phi}(\underline{X}^M, t)}{\partial \underline{X}^M} \cdot d \underline{X}$$

Tenseur gradient de la transformation

$$\underline{dx} = \underline{x}^P - \underline{x}^M = \underline{\phi}(\underline{X}^M + \underline{dX}, t) - \underline{\phi}(\underline{X}^M, t) = \frac{\partial \underline{\phi}(\underline{X}^M, t)}{\partial \underline{X}^M} \cdot \underline{dX}$$

On exprime alors le **tenseur gradient de la transformation**:

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{\phi}(\underline{X}, t)}{\partial \underline{X}} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{Grad}} \underline{\phi}(\underline{X}, t)$$

= **application linéaire tangente** (approximation linéaire locale)

Formule de transport d'un vecteur matériel

- Pour un vecteur élémentaire $\underline{dl}$: $\underline{dl} = \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{dL}$

→ tenseur gradient de la transformation = tenseur *mixte*

→ dans le cas général **non-symétrique**

→ il existe un tenseur **inverse** $\underline{\underline{F}}^{-1}$ tel que: $\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \underline{X}}{\partial \underline{x}} = \underline{\underline{grad}} (\underline{X}(\underline{x}, t))$

Interlude mathématique

Inverse d'un tenseur d'ordre 2:

- Le tenseur $\underline{\underline{T}}$ est dit **singulier** si $\det \underline{\underline{T}} = 0$
- S'il est non singulier, on dit qu'il est **inversible**
→ Il existe un tenseur **inverse** de $\underline{\underline{T}}$ noté $\underline{\underline{T}}^{-1}$ qui satisfait la relation:

$$\underline{\underline{T}}^{-1} \cdot \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T}}^{-1}$$

- Si deux tenseurs $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ sont **inversibles**, on a alors:

$$\left(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \right)^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1}$$

$$\left(\underline{\underline{A}}^{-1} \right)^{-1} = \underline{\underline{A}}$$



Jacobien de la transformation

- La transformation est homogène : $\underline{\underline{F}}$ est indépendant de $\underline{X}$
- Matrice des composantes de $\underline{\underline{F}}$ = matrice **jacobienne**

$$\left[\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \right] = \begin{pmatrix} \partial x_1 / \partial X_1 & \partial x_1 / \partial X_2 & \partial x_1 / \partial X_3 \\ \partial x_2 / \partial X_1 & \partial x_2 / \partial X_2 & \partial x_2 / \partial X_3 \\ \partial x_3 / \partial X_1 & \partial x_3 / \partial X_2 & \partial x_3 / \partial X_3 \end{pmatrix}$$

- Déterminant de la matrice jacobienne = J = **jacobien** de la transfo

Gradient de la transformation en fonction du déplacement

- On a vu précédemment : $\underline{u}(\underline{X}, t) = \underline{x}(\underline{X}, t) - \underline{X}$

$$\Rightarrow \underline{x}(\underline{X}, t) = \underline{u}(\underline{X}, t) + \underline{X}$$

- On peut réécrire le tenseur gradient de la transformation:

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{X}}(\underline{X}, t) + \frac{\partial \underline{X}}{\partial \underline{X}} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{X}}(\underline{X}, t) + \underline{\underline{I}} \quad \Rightarrow \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{Grad}}(\underline{u}(\underline{X}, t)) + \underline{\underline{I}}$$

- La matrice jacobienne devient alors:

$$[\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)] = \begin{pmatrix} 1 + \partial u_1 / \partial X_1 & \partial u_1 / \partial X_2 & \partial u_1 / \partial X_3 \\ \partial u_2 / \partial X_1 & 1 + \partial u_2 / \partial X_2 & \partial u_2 / \partial X_3 \\ \partial u_3 / \partial X_1 & \partial u_3 / \partial X_2 & 1 + \partial u_3 / \partial X_3 \end{pmatrix}$$

Mouvement de corps rigide

- le milieu subit uniquement une translation

→ champ de déplacement uniforme → $\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u} = \underline{0} \rightarrow \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}}$

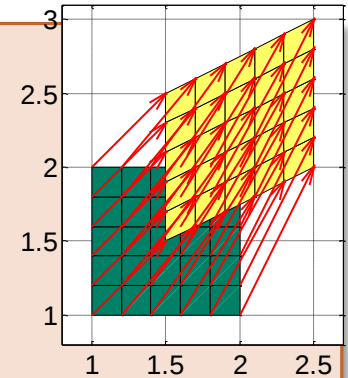
Dilatation

- Transport d'un vecteur matériel : $\underline{dl} = \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{dL}$
- Appliqué à un vecteur matériel quelconque $\underline{A}$: $\underline{a} = \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{A}$
- Dilatation = rapport des normes entre $\underline{A}$ et son transformé $\underline{a}$

$$\lambda = \frac{|\underline{a}|}{|\underline{A}|} = \frac{|\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{A}|}{|\underline{A}|}$$

Exemple

- On reprend la transformation précédente :
$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \alpha t^2 \\ x_2 = \frac{t}{\tau} X_1 + X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$



- Tenseur **gradient de la transformation** :

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{x}(\underline{X}, t)}{\partial \underline{X}} = \frac{\partial x_i(\underline{X}, t)}{\partial X_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{t}{\tau} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$$

$$[\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t/\tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Champ de déplacement calculé: $\underline{u}(\underline{X}, t) = \alpha t^2 \underline{e}_1 + \frac{t}{\tau} X_1 \underline{e}_2$
- Autre calcul possible :

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{Grad}} \underline{u}(\underline{X}, t) = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 + \frac{t}{\tau} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1$$

Exemple

- Le tenseur **gradient de la transformation** s'exprime :

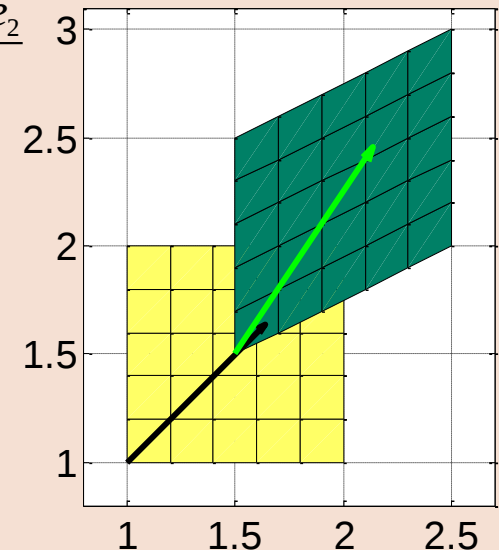
$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{t}{\tau} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad [\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t/\tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- On considère le vecteur unitaire: $\underline{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_1 + \underline{e}_2)$

- Transformée du vecteur: $\underline{a} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) \underline{e}_2$

$$[\underline{a}] = [\underline{\underline{F}}] \cdot [\underline{A}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t/\tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + t/\tau \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Dilatation: $\lambda = |\underline{a}| / |\underline{A}| = |\underline{\underline{F}} \cdot \underline{A}| / |\underline{A}| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1+t/\tau}{\sqrt{2}}\right)^2}$



CHAP II: Cinématique des milieux continus

Représentation du mouvement

- Repérage des points matériels
- Descriptions lagrangienne ou eulérienne?
- Déplacement, vitesse, accélération
- Description de la transformation
- Gradient de la transformation
- Décomposition polaire
- Transport d'un volume
- Taux de dilatation volumique

Interlude mathématique

Tenseur d'ordre 2 orthogonal:

- On définit le tenseur **orthogonal** $\underline{\underline{R}}$ comme l'application linéaire:

$$\forall (\underline{x}, \underline{y}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad (\underline{\underline{R}} \cdot \underline{x}) \cdot (\underline{\underline{R}} \cdot \underline{y}) = \underline{x} \cdot \underline{y}$$

- Cette application ne modifie pas le produit scalaire $\underline{x} \cdot \underline{y}$:

→ les normes des vecteurs $\underline{x}$ et $\underline{y}$ sont conservées

→ l'angle θ entre $\underline{x}$ et $\underline{y}$ est conservé

- Le tenseur $\underline{\underline{R}}$ a la propriété suivante:

$$\underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{R}}^T = \underline{\underline{I}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{R}}^{-1} = \underline{\underline{R}}^T$$

- En anticipant sur la suite: si $\det \underline{\underline{R}} = 1$, $\underline{\underline{R}}$ est une **rotation**



- Propriétés algébriques (non démontrées ici):

PROP I: tout tenseur inversible se décompose de manière unique en:

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}} \quad \underline{\underline{R}} \text{ est orthogonal: } \begin{cases} \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{I}} \\ \det \underline{\underline{R}} = 1 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{U}} \text{ est symétrique défini positif: } \forall \underline{\underline{b}} \neq \underline{\underline{0}}, \underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{b}} > 0$$

PROP II: tout tenseur inversible se décompose de manière unique en:

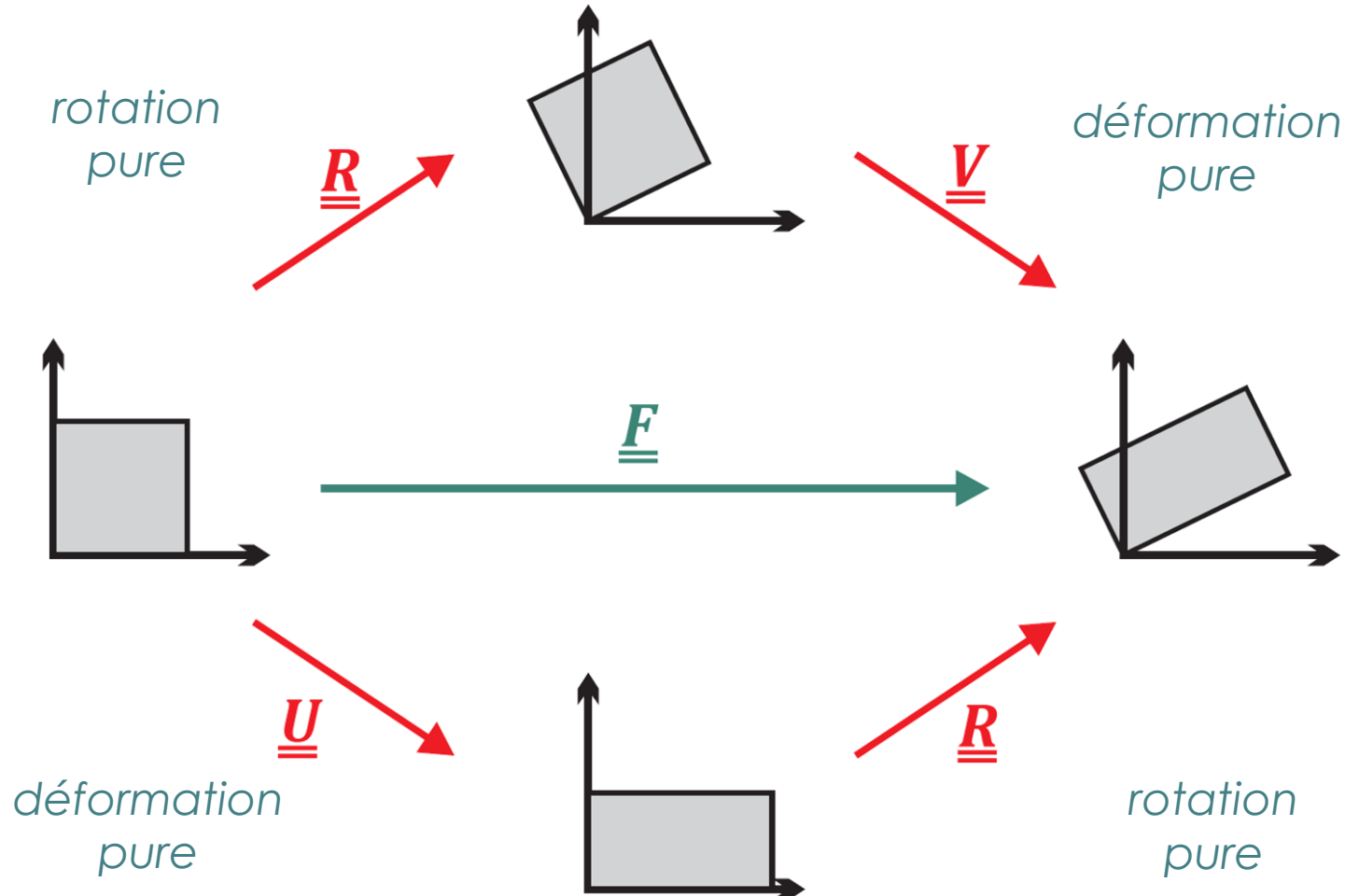
$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{R}} \quad \underline{\underline{R}} \text{ est orthogonal: } \begin{cases} \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{I}} \\ \det \underline{\underline{R}} = 1 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{V}} \text{ est symétrique défini positif: } \forall \underline{\underline{b}} \neq \underline{\underline{0}}, \underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{b}} > 0$$

$\underline{\underline{R}}$ est un tenseur mixte

$\underline{\underline{U}}$ est lagrangien

$\underline{\underline{V}}$ est eulérien



Exemple

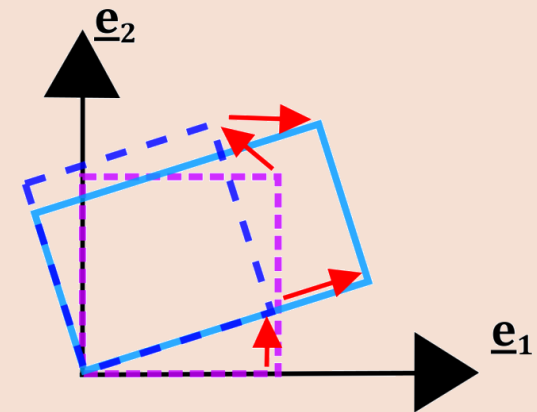
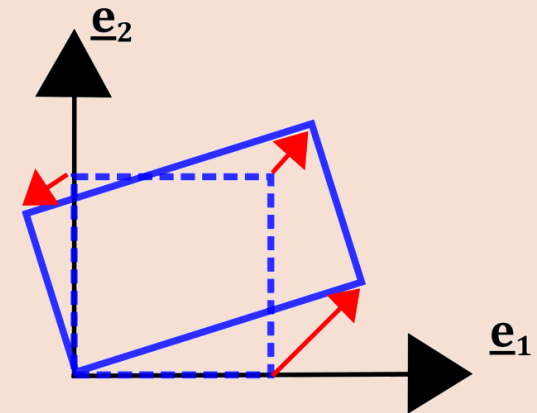
$$\begin{cases} x_1 = 2 X_1 - 0.4 X_2 \\ x_2 = 0.8 X_1 + X_2 \end{cases} \Rightarrow [\underline{\underline{F}}] = \begin{pmatrix} 2 & -0.4 \\ 0.8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}} \Rightarrow \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{U}}^T \cdot \underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}}^2$$

$$\Rightarrow [\underline{\underline{U}}] = \begin{pmatrix} \sqrt{4.64} & 0 \\ 0 & \sqrt{1.16} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}} \Rightarrow \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{U}}^{-1}$$

$$\Rightarrow [\underline{\underline{R}}] = \begin{pmatrix} 0.93 & -0.37 \\ 0.37 & 0.93 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$



CHAP II: Cinématique des milieux continus

Représentation du mouvement

- Repérage des points matériels
- Descriptions lagrangienne ou eulérienne?
- Déplacement, vitesse, accélération
- Description de la transformation
- Gradient de la transformation
- Décomposition polaire
- Transport d'un volume
- Taux de dilatation volumique

174

Interlude mathématique

Déterminant d'un tenseur d'ordre 2:

- On introduit maintenant le symbole de **permutation circulaire**:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \text{ ou } i = k \text{ ou } j = k \\ 1 & \text{si } \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\} \text{ ou } \{3, 1, 2\} \text{ ou } \{2, 3, 1\} \\ -1 & \text{si } \{i, j, k\} = \{1, 3, 2\} \text{ ou } \{2, 1, 3\} \text{ ou } \{3, 2, 1\} \end{cases}$$

- On montre alors que le produit mixte s'écrit:

$$(\underline{x} \wedge \underline{y}) \cdot \underline{z} = \varepsilon_{ijk} x_i y_j z_k$$

- On peut définir de plus le **déterminant** d'un tenseur d'ordre 2 :

$$\det \underline{\underline{T}} = \varepsilon_{ijk} T_{1i} T_{2j} T_{3k}$$

- C'est un **scalaire**, qui possède notamment la propriété:

$$\det(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) = \det \underline{\underline{A}} \det \underline{\underline{B}}$$



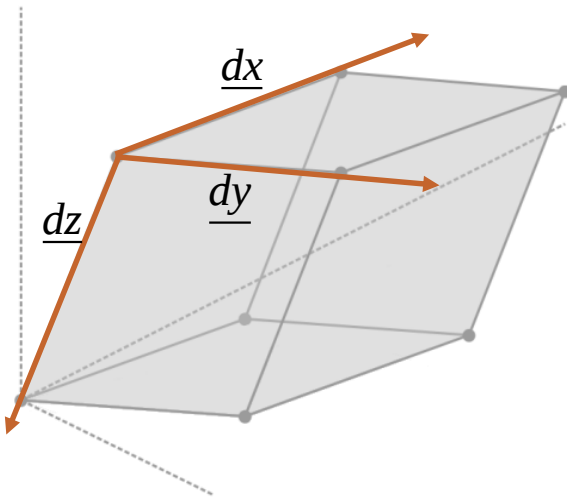
Transport d'un volume

- Pour que la transformation soit bijective (et que $\underline{\underline{F}}^{-1}$ existe), le déterminant J de la matrice jacobienne est nécessairement non nul

$$J = \det \underline{\underline{F}} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial X_i} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} \frac{\partial x_3}{\partial X_k} \neq 0$$

- Le volume $d\Omega$ du parallélépipède formé par $(\underline{dx}, \underline{dy}, \underline{dz})$ s'écrit :

$$d\Omega = \det(\underline{dx}, \underline{dy}, \underline{dz}) = \varepsilon_{ijk} dx_i dy_j dz_k$$



→ On montre que (pas ici ...) : $d\Omega = \det \underline{\underline{F}} d\Omega_0$

Au final: $\frac{d\Omega}{d\Omega_0} = \det \underline{\underline{F}} = J$

$$0 < \det \underline{\underline{F}} = J < +\infty$$

Jacobien = **variation locale de volume**

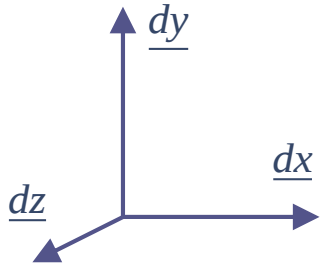
CHAP II: Cinématique des milieux continus

Représentation du mouvement

- Repérage des points matériels
- Descriptions lagrangienne ou eulérienne?
- Déplacement, vitesse, accélération
- Description de la transformation
- Gradient de la transformation
- Décomposition polaire
- Transport d'un volume
- Taux de dilatation volumique

■ Taux de dilatation volumique

$$\Omega_t = J(t) \Omega_0 = \det \underline{\underline{F}}(t) \Omega_0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\Omega}_t = \dot{J}(t) \Omega_0 \quad ?$$



Considérons le parallélépipède formé par:

$$(\underline{dx}, \underline{dy}, \underline{dz}) = (dx \underline{e}_1, dy \underline{e}_2, dz \underline{e}_3)$$

$$\dot{\Omega}_t = \frac{d\Omega_t}{dt} = \frac{d \det(\underline{dx}, \underline{dy}, \underline{dz})}{dt} = \varepsilon_{ijk} \dot{dx}_i dy_j dz_k + \varepsilon_{ijk} dx_i \dot{dy}_j dz_k + \varepsilon_{ijk} dx_i dy_j \dot{dz}_k$$

Après un (très!) long développement:

$$\dot{\Omega}_t = \text{Tr}(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t)) \Omega_t = \text{div} \underline{v}(\underline{x}, t) J \Omega_0 \Rightarrow$$

$$\dot{J} = \text{div} \underline{v}(\underline{x}, t) J$$

$$\rightarrow \text{Pas de variation de volume} \quad \Rightarrow \quad \dot{J} = 0$$

$$J \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{div} \underline{v}(\underline{x}, t) = 0$$

CHAP III: Cinématique des milieux continus

Déformation du milieu continu

- Tenseurs des déformations
- Transformations infinitésimales
- Mouvement de corps rigide
- Compatibilité d'un champ de déformation
- Taux de déformation
- Conservation de la masse

Rappel : gradient de la transformation et décomposition polaire

- On a introduit précédemment $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} = \underline{\underline{Grad}}(\underline{u}(\underline{X}, t)) + \underline{\underline{I}}$

→ Tenseur mixte et unitaire lors d'un MCR

- Il se décompose en une *rotation pure* et une *déformation pure*

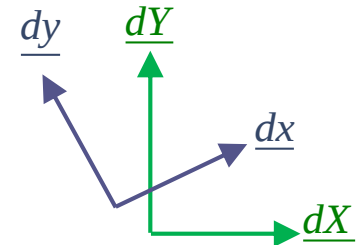
$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}}$$

$\underline{\underline{R}}$ est un tenseur mixte
 $\underline{\underline{U}}$ est lagrangien
 $\underline{\underline{V}}$ est eulérien

Objectif : construire un tenseur **déformations**, qui ne contient pas la rotation $\underline{\underline{R}}$, et qui est **nul** lors d'un mouvement de corps rigide

Idée : évolution du **produit scalaire** entre deux vecteurs:

✓ Pas modifié lors d'un mouvement de corps rigide



Tenseur de Green-Lagrange

- Considérons en M deux vecteurs matériels $\underline{dX}, \underline{dY}$

→ Après transformation on a: $\underline{dx} = \underline{F}(\underline{X}, t) \cdot \underline{dX}$ $\underline{dy} = \underline{F}(\underline{X}, t) \cdot \underline{dY}$

- Evolution du produit scalaire de ces vecteurs:

$$\underline{dx} \cdot \underline{dy} = (\underline{F} \cdot \underline{dX}) \cdot (\underline{F} \cdot \underline{dY}) = \underline{dX} \cdot \underline{F}^T \cdot \underline{F} \cdot \underline{dY}$$

$$\underline{dx} \cdot \underline{dy} - \underline{dX} \cdot \underline{dY} = \underline{dX} \cdot \underline{F}^T \cdot \underline{F} \cdot \underline{dY} - \underline{dX} \cdot \underline{I} \cdot \underline{dY} = \underline{dX} \cdot \underbrace{(\underline{F}^T \cdot \underline{F} - \underline{I})}_{2\underline{E}} \cdot \underline{dY}$$

- On introduit le tenseur de Green-Lagrange :

$$\underline{E} = \frac{1}{2} (\underline{F}^T \cdot \underline{F} - \underline{I})$$

→ Il est **lagrangien** et **symétrique**:

→ La rotation pure n'apparaît plus: $\underline{E} = \frac{1}{2} \left(\underline{U}^T \cdot \underbrace{\underline{R}^T \cdot \underline{R}}_{\underline{I}} \cdot \underline{U} - \underline{I} \right) = \frac{1}{2} (\underline{U}^T \cdot \underline{U} - \underline{I})$

Tenseur de Green-Lagrange en fonction du déplacement

- Tenseur de déformation de Green-Lagrange : $\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}})$
- On a vu précédemment : $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u}(\underline{X}, t)$

$$\begin{aligned}\underline{\underline{E}} &= \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) = \frac{1}{2}((\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u})^T \cdot (\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u}) - \underline{\underline{I}}) \\ &= \frac{1}{2}(\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u} + (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u})^T + (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u})^T \cdot \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u})\end{aligned}$$

- Si l'on connaît $\underline{\underline{E}}$, le champ $\underline{u}$ s'obtient par intégration (si intégrable... voir « conditions de compatibilité »)
- le champ $\underline{u}$ s'obtient à un mouvement de corps rigide près

Exemple

- On a calculé le gradient de la transformation précédente :

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 + \frac{t}{\tau} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1$$

$$[\underline{\underline{E}}] = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & t/\tau & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t/\tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = [\underline{\underline{E}}] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (t/\tau)^2 & t/\tau & 0 \\ t/\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

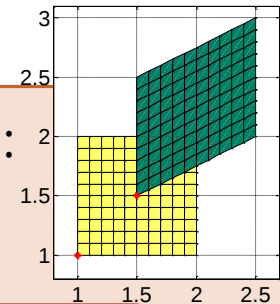
- Deuxième forme en fonction du déplacement

$$\underline{u}(\underline{X}, t) = \alpha t^2 \underline{e}_1 + \frac{t}{\tau} X_1 \underline{e}_2$$

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u} + (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u})^T + (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u})^T \cdot \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u} \right)$$

$$[\underline{\underline{E}}] = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t/\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t/\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t/\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t/\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (t/\tau)^2 & t/\tau & 0 \\ t/\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

OK !

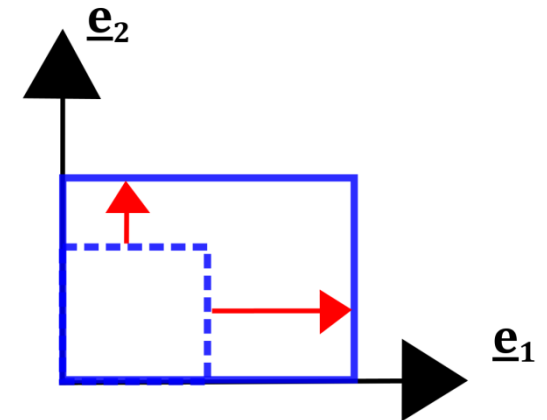


■ **Traction biaxiale:**

$$\begin{cases} x_1 = \phi_1(X, t) = a(t) X_1 \\ x_2 = \phi_2(X, t) = b(t) X_2 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{F}}(X, t) = \underline{\underline{Grad}} \phi(X, t) \Rightarrow [\underline{\underline{F}}] = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) \Rightarrow [\underline{\underline{E}}] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a^2 - 1 & 0 \\ 0 & b^2 - 1 \end{pmatrix}$$

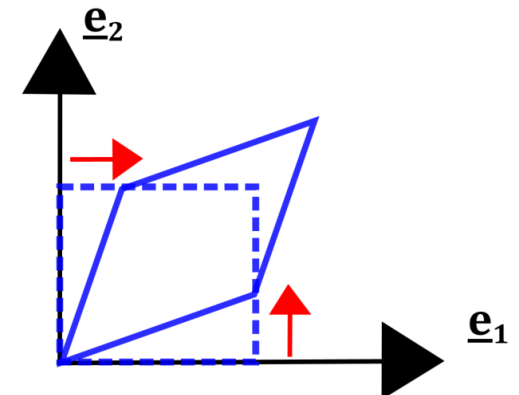


■ **Cisaillement:**

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + a(t) X_2 \\ x_2 = b(t) X_1 + X_2 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{F}}(X, t) = \underline{\underline{Grad}} \phi(X, t) \Rightarrow [\underline{\underline{F}}] = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) \Rightarrow [\underline{\underline{E}}] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b^2 & a+b \\ a+b & a^2 \end{pmatrix}$$



Equivalent en description eulérienne : tenseur d'Euler-Almansi

- Tenseur des déformations Green-Lagrange : symétrique, **lagrangien**
- Calculons $\underline{dx} \cdot \underline{dy} - \underline{dX} \cdot \underline{dY}$ avec $\underline{dX} = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{dx}$ plutôt que $\underline{dx} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{dX}$

$$\underline{dx} \cdot \underline{dy} - \underline{dX} \cdot \underline{dY} = \underline{dx} \cdot \underline{dy} - \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{dx} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{dy} = \underline{dx} \cdot \left(\underbrace{\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{F}}^{-T} \underline{\underline{F}}^{-1}}_{2\underline{\underline{e}}} \right) \cdot \underline{dy}$$

- On introduit le tenseur d'Euler-Almansi :

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{F}}^{-T} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \right)$$

→ Il est **eulérien** et **symétrique**:

→ La rotation pure n'apparaît plus:

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{V}}^{-T} \cdot \underbrace{\underline{\underline{R}}^{-T} \cdot \underline{\underline{R}}^{-1}}_{\underline{\underline{I}}} \cdot \underline{\underline{V}}^{-1} \right) = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{V}}^{-T} \cdot \underline{\underline{V}}^{-1} \right)$$

Exemple

- On a calculé le gradient de la transformation précédente :

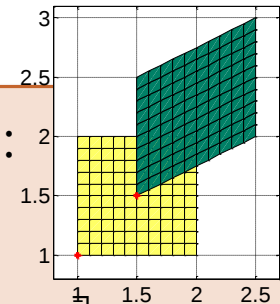
$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + t \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$$

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} \left[\underline{\underline{I}} - \left(1 + \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \right) \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 + \frac{t}{\tau} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2) \right]$$

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{t}{\tau} \right)^2 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \frac{t}{\tau} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2) \right)$$

$$[\underline{\underline{e}}] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & t/\tau & 0 \\ t/\tau & (t/\tau)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq [\underline{\underline{E}}] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (t/\tau)^2 & t/\tau & 0 \\ t/\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

→ équivalents **lorsque la transformation est petite**



A retenir absolument :

Les composantes des tenseurs de déformation sont sans dimension

CHAP III: Cinématique des milieux continus

Déformation du milieu continu

- Tenseurs des déformations
- Transformations infinitésimales
- Mouvement de corps rigide
- Compatibilité d'un champ de déformation
- Taux de déformation
- Conservation de la masse

Tenseur de déformation de Green-Lagrange:

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{Grad}} \underline{u}(\underline{X}, t) + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u}(\underline{X}, t))^T + \underbrace{\underline{\underline{Grad}} \underline{u}(\underline{X}, t)^T \cdot (\underline{\underline{Grad}} \underline{u}(\underline{X}, t))}_{\text{terme non-linéaire}} \right)$$

terme non-linéaire

→ cas des **petites déformations** : $\underline{\underline{Grad}} \underline{u}(\underline{X}, t) \ll 1$

$$\underline{\underline{Grad}} \underline{u}^T \cdot (\underline{\underline{Grad}} \underline{u}) \ll \underline{\underline{Grad}} \underline{u}$$

→ cas des **petits déplacements**: on peut confondre K_0 et K_t

petits déplacements + petites déformations =

hypothèses des petites perturbations (HPP)

→ Dans ce cas on note :

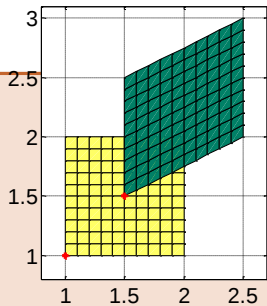
$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \lim_{\underline{\underline{Grad}} \underline{u} \rightarrow 0} \underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T + \cancel{(\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T \cdot \underline{\underline{Grad}} \underline{u}} \right)$$

On introduit le **tenseur des déformations linéarisé (en HPP)**:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{Grad}} \underline{u}(\underline{X}, t) + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u}(\underline{X}, t))^T \right)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$\Rightarrow [\underline{\underline{\varepsilon}}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) \\ & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \\ \text{sym} & & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}$$



Exemple

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \alpha t^2 \\ x_2 = (t/\tau) X_1 + X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{Grad}} \underline{u}(\underline{X}, t) = \frac{t}{\tau} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1$$

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left((t/\tau)^2 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + t/\tau (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2) \right)$$

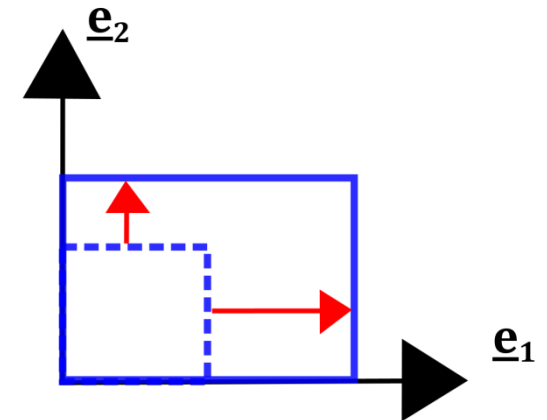
$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{Grad}} \underline{u}(\underline{X}, t) + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u}(\underline{X}, t))^T \right) = \frac{1}{2} \frac{t}{\tau} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2)$$

Equivalents
quand
 $t^2 \ll 1$

■ **Traction biaxiale:**
$$\begin{cases} x_1 = \phi_1(X, t) = a(t) X_1 \\ x_2 = \phi_2(X, t) = b(t) X_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = (a-1) X_1 \\ u_2 = (b-1) X_2 \end{cases} \Rightarrow [\underline{\underline{Grad}} \underline{u}] = \begin{pmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & b-1 \end{pmatrix}$$

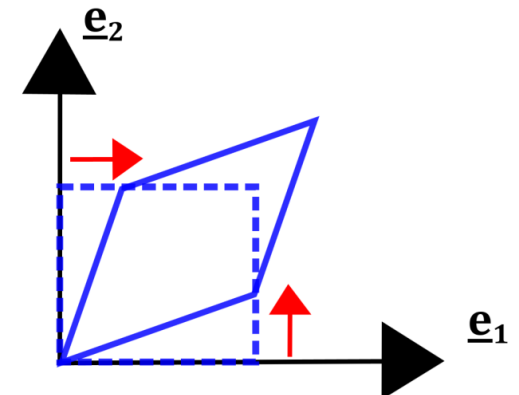
$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T) \Rightarrow [\underline{\underline{\varepsilon}}] = \begin{pmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & b-1 \end{pmatrix}$$



■ **Cisaillement:**
$$\begin{cases} x_1 = X_1 + a(t) X_2 \\ x_2 = b(t) X_1 + X_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = a X_2 \\ u_2 = b X_1 \end{cases} \Rightarrow [\underline{\underline{Grad}} \underline{u}] = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T) \Rightarrow [\underline{\underline{\varepsilon}}] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ b+a & 0 \end{pmatrix}$$



Tenseur des déformations linéarisées (HPP): interprétation

- Tenseur de déformation de **Green-Lagrange**: évolution du produit $\underline{dx} \cdot \underline{dy}$

$$\underline{dx} \cdot \underline{dy} - \underline{dX} \cdot \underline{dY} = \underline{dX} \cdot \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{dY} - \underline{dX} \cdot \underline{\underline{I}} \cdot \underline{dY} = 2\underline{dX} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{dY}$$

- En **HPP** on peut donc noter : $\underline{dx} \cdot \underline{dy} - \underline{dX} \cdot \underline{dY} \approx 2\underline{dX} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{dY}$

- On choisit $\underline{dX} = \underline{dY} = dX \underline{e}_1$: $\underline{dx} \cdot \underline{dx} = dx^2 \approx 2\underline{dX} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{dX} + \underline{dX} \cdot \underline{dX}$
 $\Rightarrow dx^2 \approx 2\varepsilon_{11} dX^2 + dX^2 = dX^2 (1 + 2\varepsilon_{11})$

- HPP** : développement limité au premier ordre : $\frac{dx}{dX} \approx \sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}} \approx 1 + \varepsilon_{11}$

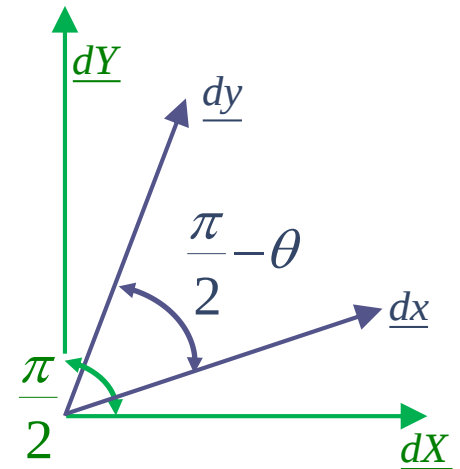
→ ε_{11} est l'**allongement**(si >0) ou **rétrécissement** (si <0) relatif selon $\underline{e}_1$

Tenseur des déformations linéarisées (HPP): interprétation

On choisit maintenant $\underline{dX} = dX \underline{e}_1$ et $\underline{dY} = dY \underline{e}_2$

$$\underline{dx} \cdot \underline{dy} \approx 2 \underline{dX} \cdot \underline{\varepsilon} \cdot \underline{dY} + \cancel{\underline{dX} \cdot \underline{dY}}$$

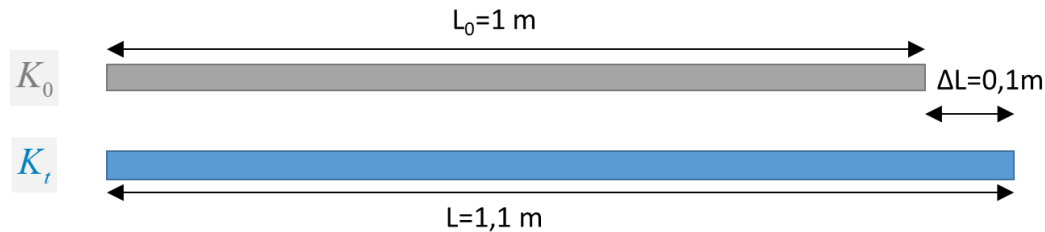
$$\widehat{(\underline{dx}, \underline{dy})} = \frac{\pi}{2} - \theta \Rightarrow \underline{dx} \cdot \underline{dy} = dx dy \sin \theta \approx dx dy \theta \approx 2 dX^2 \varepsilon_{12}$$



HPP $\rightarrow$ on s'arrête au premier ordre : $\theta \approx 2\varepsilon_{12}$

$\rightarrow \varepsilon_{12}$ représente la moitié de la **variation d'angle** entre $\underline{dx}$ et $\underline{dy}$

Concrètement : quelle déformation utiliser ???



- Nouvelle longueur après allongement : $L = L_0 + \Delta L$
- Déplacement (1D) : $u(X) = \Delta L \left(\frac{X}{L} \right)$
- Déformation de Green-Lagrange: $E = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta L}{L} + \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2 \right) = \frac{\Delta L}{L} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2$
- Déformation en HPP: $\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta L}{L} \right) = \frac{\Delta L}{L}$

- Application numérique

$\begin{cases} E = 0.105 = 10.5\% \\ \varepsilon = 0.10 = 10\% \end{cases}$	$\rightarrow 5\% \text{ d'erreur !}$
---	--------------------------------------

CHAP III: Cinématique des milieux continus

Déformation du milieu continu

- Tenseurs des déformations
- Transformations infinitésimales
- Mouvement de corps rigide
- Compatibilité d'un champ de déformation
- Taux de déformation
- Conservation de la masse

- On considère un solide **indéformable** en déplacement

→ Décomposition polaire $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{R}}$

- Tenseur de Green-Lagrange :

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{R}} - \underline{\underline{I}}) = \underline{\underline{0}} \quad \text{car} \quad \underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{I}}$$

- Déplacements importants : HPP non satisfaite ! Si HPP: $\underline{\underline{\varepsilon}} \approx \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{0}}$

- Rappel : décomposition partie symétrique / antisymétrique

→ $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{u}} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{u}})^T)$ est la partie symétrique de $\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{u}}$

→ $\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{\Lambda}} + \cancel{\underline{\underline{\Omega}}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{u}} - (\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{u}})^T) \Rightarrow \underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{\Lambda}}$

- Par intégration : $\frac{d\underline{\underline{u}}}{d\underline{\underline{X}}} = \underline{\underline{\Lambda}} \Rightarrow \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}}_0 + \underline{\underline{\Lambda}} \cdot \underline{\underline{X}} \Rightarrow \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}}_0 + \underline{\underline{\Omega}} \wedge \underline{\underline{X}}$
vecteur adjoint

Exemple

- Solide indéformable en rotation : rotation $\underline{\Omega} = \Omega \underline{e}_z$
- Ecriture évidente du déplacement : $\underline{u} = \Omega R \underline{e}_\theta$
- Calcul du gradient du déplacement (formulaire) :

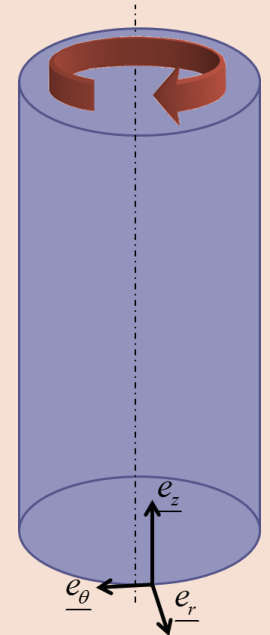
$$\underline{\underline{Grad}} \underline{u} = \frac{-u_\theta}{R} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial R} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r = -\Omega \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \Omega \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r$$

→ tenseur antisymétrique , on note : $\underline{\underline{Grad}} \underline{u} = \underline{\underline{\Lambda}}$

- Déformation du solide (indéformable !) :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T \right) = \frac{1}{2} \left(-\Omega \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \Omega \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \Omega \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta - \Omega \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r \right) = \underline{\underline{0}}$$

- Déplacement du point $\underline{X} = R \underline{e}_r$:
$$[\underline{u}] = \cancel{[\underline{u}_0]} + \begin{pmatrix} 0 & -\Omega & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \Omega R \underline{e}_\theta$$



CHAP III: Cinématique des milieux continus

Déformation du milieu continu

- Tenseurs des déformations
- Transformations infinitésimales
- Mouvement de corps rigide
- Compatibilité d'un champ de déformation
- Taux de déformation
- Conservation de la masse

Interlude mathématique

Théorème de Cauchy

- **Potentiel scalaire** : champ scalaire $\phi(\underline{x})$ tq $\forall \underline{x} \in \Omega, \underline{T}(\underline{x}) = \underline{\text{Grad}}(\phi(\underline{x}))$
- Théorème (admis) :

$$\underline{\text{Rot}}(\underline{T}(\underline{x})) = \underline{0} \Leftrightarrow \exists \phi(\Omega \rightarrow \mathbb{R}), \underline{T}(\underline{x}) = \underline{\text{Grad}}(\phi(\underline{x}))$$

Théorème de Cauchy généralisé

- **Potentiel vecteur** : champ vectoriel $\underline{v}(\underline{x})$ tq $\forall \underline{x} \in \Omega, \underline{T}(\underline{x}) = \underline{\underline{\text{Grad}}}(\underline{v}(\underline{x}))$
- Théorème (admis) :

$$\underline{\underline{\text{Rot}}}^d(\underline{\underline{\text{Rot}}}^g(\underline{T})) = \underline{\underline{\text{Rot}}}^g(\underline{\underline{\text{Rot}}}^d(\underline{T})) = \underline{0} \Leftrightarrow \exists \underline{v}(\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3), \underline{T} = \underline{\underline{D}}(\underline{v})$$

avec le tenseur **symétrique** : $\underline{\underline{D}}(\underline{v}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\text{Grad}}}(\underline{v}) + \underline{\underline{\text{Grad}}}(\underline{v})^T)$



On connaît un champ de déformation = 6 composantes (sym.)

→ Existence d'un champ de déplacement (3 composantes) en préservant la **continuité** du milieu?

Théorème de Cauchy généralisé

Il existe un champ $\underline{\underline{v}}$ tel que $2\underline{\underline{T}} = \left(\underline{\underline{Grad}}(\underline{\underline{v}}) + \underline{\underline{Grad}}(\underline{\underline{v}})^T \right)$ ssi :

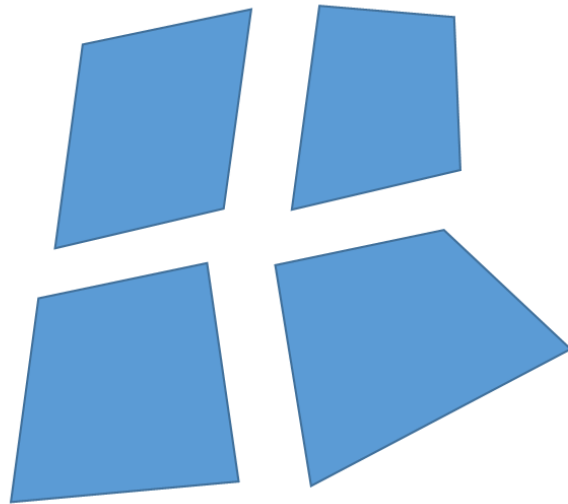
$$\underline{\underline{Rot}}^d \left(\underline{\underline{Rot}}^g \left(\underline{\underline{T}} \right) \right) = \underline{\underline{Rot}}^g \left(\underline{\underline{Rot}}^d \left(\underline{\underline{T}} \right) \right) = \underline{\underline{0}}$$

Application au champ $\underline{\underline{\varepsilon}}$

Il existe un champ $\underline{\underline{u}}(\underline{\underline{X}})$ tel que $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{u}} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{u}})^T \right)$ à la condition:

$$\underline{\underline{Rot}}^g \left(\underline{\underline{Rot}}^d \left(\underline{\underline{\varepsilon}} \right) \right) = \underline{\underline{Rot}}^d \left(\underline{\underline{Rot}}^g \left(\underline{\underline{\varepsilon}} \right) \right) = \underline{\underline{0}}$$

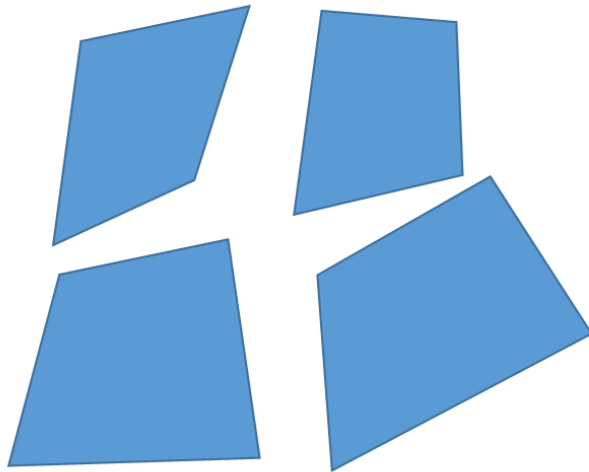
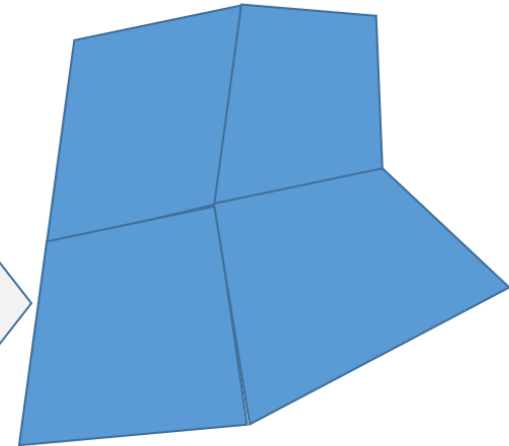
= condition de compatibilité géométrique



$$\underline{\underline{Rot^d}} \left(\underline{\underline{Rot^g}} \left(\underline{\underline{\varepsilon}} \right) \right) = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{Rot^g}} \left(\underline{\underline{Rot^d}} \left(\underline{\underline{\varepsilon}} \right) \right) = \underline{\underline{0}}$$

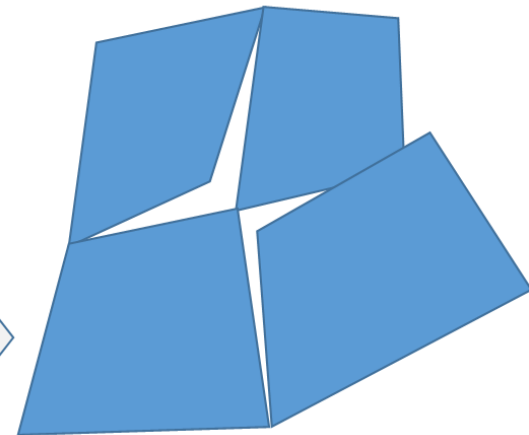
Champ de
déformation
compatible



$$\underline{\underline{Rot^d}} \left(\underline{\underline{Rot^g}} \left(\underline{\underline{\varepsilon}} \right) \right) \neq \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{Rot^g}} \left(\underline{\underline{Rot^d}} \left(\underline{\underline{\varepsilon}} \right) \right) \neq \underline{\underline{0}}$$

Champ de
déformation
incompatible



CHAP III: Cinématique des milieux continus

Déformation du milieu continu

- Tenseurs des déformations
- Transformations infinitésimales
- Mouvement de corps rigide
- Compatibilité d'un champ de déformation
- Taux de déformation
- Conservation de la masse

- On se place en description eulérienne : $\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, t)$
- Dérivation par rapport au temps du produit scalaire :

$$\underline{\dot{dx}} \cdot \underline{dy} - \cancel{\underline{\dot{dX}} \cdot \underline{\dot{dY}}} = \underline{\dot{dx}} \cdot \underline{dy} + \underline{dx} \cdot \underline{\dot{dy}}$$

- Définition de l'opérateur gradient $\rightarrow$

$$\begin{cases} \underline{\dot{dx}} = \underline{dv} = \underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{dx} \\ \underline{\dot{dy}} = \underline{dv} = \underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{dy} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{k}} = \underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) = \text{tenseur de description eulérienne}$$

- Evolution du produit scalaire :

$$\underline{\dot{dx}} \cdot \underline{dy} - \cancel{\underline{\dot{dX}} \cdot \underline{\dot{dY}}} = \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{dx} \right) \cdot \underline{dy} + \underline{dx} \cdot \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{dy} \right)$$

$$\underline{\dot{dx}} \cdot \underline{dy} = \underline{dx} \cdot \left(\left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \right)^T + \underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \right) \cdot \underline{dy} = \underline{dx} \cdot 2\underline{\underline{d}} \cdot \underline{dy}$$

→ On introduit le tenseur **vitesse** (ou **taux**) **de déformation** eulérienne :

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) + \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \right)^T \right) \quad \text{ou encore} \quad d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

= partie symétrique du gradient du champ de vitesses

A partir du tenseur de description eulérienne on décompose:

$$\underline{\underline{k}} = \underline{\underline{d}} + \underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{k}} + \underline{\underline{k}}^T) + \frac{1}{2} (\underline{\underline{k}} - \underline{\underline{k}}^T)$$

→ On introduit le tenseur **vitesse de rotation** :

$$\underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) - \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \right)^T \right) \quad \text{ou encore} \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

= partie antisymétrique du gradient du champ de vitesses

Exemple

- On reprend la transformation précédente :

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = 2\alpha t \underline{e}_1 + \frac{1}{\tau} (x_1 - \alpha t^2) \underline{e}_2$$

- Le tenseur de description eulérienne s'écrit :

$$\underline{\underline{k}} = \underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) = \frac{1}{\tau} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1$$

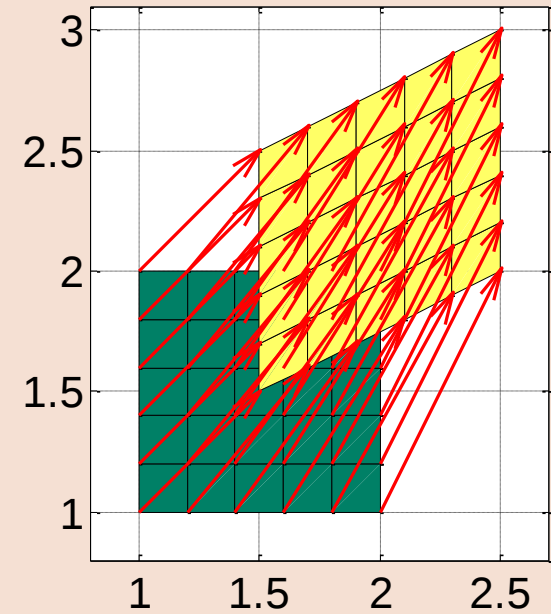
- En en déduit les deux quantités:

$$2\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) + \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \right)^T = \frac{1}{\tau} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2)$$

$$2\underline{\underline{\Omega}} = \underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) - \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \right)^T = \frac{1}{\tau} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 - \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2)$$

→ taux de déformation constant et homogène

→ vitesse de rotation constante et homogène



CHAP III: Cinématique des milieux continus

Déformation du milieu continu

- Tenseurs des déformations
- Transformations infinitésimales
- Mouvement de corps rigide
- Compatibilité d'un champ de déformation
- Taux de déformation
- Conservation de la masse

Dérivée particulière d'une intégrale de volume

- **Problématique:**

On veut exprimer la conservation d'une quantité $b(\underline{x}, t)$

→ évolution temporelle de quantités eulériennes intégrées sur un volume

- Soit un volume Ω_t de frontière $\partial\Omega_t$ dans la configuration actuelle K_t

→ on cherche à exprimer : $\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t) d\Omega_t = ?$

- D'après ce qui précède :

$$\begin{cases} \frac{d\Omega}{d\Omega_0} = \det \underline{\underline{F}} = J \\ \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t) d\Omega_t = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} b(\phi(\underline{X}, t), t) J d\Omega_0$$

Dérivée particulaire d'une intégrale de volume

- Le volume Ω_0 dans la configuration de référence est fixe et donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t) d\Omega_t &= \int_{\Omega_0} \frac{d}{dt} \left(b(\underline{\phi}(\underline{X}, t), t) J \right) d\Omega_0 \\ &= \int_{\Omega_0} \left(\underbrace{\frac{d}{dt} \left(b(\underline{\phi}(\underline{X}, t), t) \right)}_{\text{dérivée particulaire}} J + b(\underline{\phi}(\underline{X}, t), t) \frac{d}{dt} (J) \right) d\Omega_0 \end{aligned}$$

- On a vu que $\dot{J} = \text{div } \underline{v} J$, et on exprime la dérivée particulaire :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t) d\Omega_t = \int_{\Omega_0} \left(\underline{\text{grad}}(b) \cdot \underline{v} + \frac{\partial b}{\partial t} + b \text{div}(\underline{v}) \right) J d\Omega_0$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t) d\Omega_t = \int_{\Omega_0} \left(\text{div}(b \underline{v}) + \frac{\partial b}{\partial t} \right) J d\Omega_0$$

$$\text{div}(\alpha \underline{a}) = \underline{\text{grad}} \alpha \cdot \underline{a} + \alpha \text{div}(\underline{a})$$

Dérivée particulière d'une intégrale de volume

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t) d\Omega_t = \int_{\Omega_0} \left(\operatorname{div}(b \underline{v}) + \frac{\partial b}{\partial t} \right) J d\Omega_0$$

$$\curvearrowright d\Omega_t = J d\Omega_0$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t) d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \left(\operatorname{div}(b(\underline{x}, t) \underline{v}) + \frac{\partial b(\underline{x}, t)}{\partial t} \right) d\Omega_t$$

$$\curvearrowright \int_{\Omega_t} \operatorname{div}(\underline{v}) d\Omega = \int_{\partial\Omega_t} \underline{v} \cdot \underline{n} da$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t) d\Omega_t = \underbrace{\int_{\partial\Omega_t} b(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot d\underline{a}}_{\text{effet de la convection due à la variation de volume}} + \underbrace{\int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} b(\underline{x}, t) d\Omega_t}_{\text{variation au cours du temps dans un volume considéré fixe}}$$

effet de la convection due à la
variation de volume

variation au cours du temps dans
un volume considéré fixe

Conservation de la masse : équation de continuité

- En description **lagrangienne** :
$$\begin{cases} M_0(t) = \int_{\Omega_0} \rho_0(\underline{X}) d\Omega_0 \\ M(t) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) d\Omega_t \end{cases}$$

Conservation de la masse:

$$\forall t, M(t) - M_0 = 0 \Rightarrow M(t) - M_0 = \int_{\Omega_0} (\rho J - \rho_0) d\Omega_0 \quad \forall \Omega_0 \Rightarrow \begin{cases} \rho J = \rho_0 \\ \rho d\Omega = \rho_0 d\Omega_0 \end{cases}$$

- En description **eulérienne** :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) d\Omega_t = 0 \quad \text{dérivée particulière d'une intégrale de volume}$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} b d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \left(\operatorname{div}(b \underline{v}) + \frac{\partial b}{\partial t} \right) d\Omega_t$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \left(\operatorname{div}(\rho(\underline{x}, t) \underline{v}) + \frac{\partial \rho(\underline{x}, t)}{\partial t} \right) d\Omega_t$$

Conservation de la masse : équation de continuité

- Formulation intégrale (globale) = formulation **faible**

$$\int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial \rho(\underline{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t)) \right) d\Omega_t = 0$$

$$\int_{\Omega_t} \operatorname{div}(\underline{v}) d\Omega = \int_{\partial\Omega_t} \underline{v} \cdot \underline{n} da$$

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial \rho(\underline{x}, t)}{\partial t} d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{da} = 0$$

variation dans le temps
de la masse volumique

flux de matière sortant

Conservation de la masse : équation de continuité

- Formulation locale = formulation **forte**

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial \rho(\underline{x}, t)}{\partial t} d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{da} = 0$$

→ vrai **quelque soit le volume d'intégration**

$$\frac{\partial \rho(\underline{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t)) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\operatorname{grad}}(\rho) \cdot \underline{v} \\ \operatorname{div}(\alpha \underline{a}) = \underline{\operatorname{grad}} \alpha \cdot \underline{a} + \alpha \operatorname{div}(\underline{a}) \end{cases}$$

$$\frac{d\rho(\underline{x}, t)}{dt} + \rho(\underline{x}, t) \operatorname{div}(\underline{v}(\underline{x}, t)) = 0$$

= **conservation de la masse**

- Cas **incompressible** : masse volumique constante !

$$\cancel{\frac{d\rho(\underline{x}, t)}{dt}} + \rho(\underline{x}, t) \operatorname{div}(\underline{v}(\underline{x}, t)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{div}(\underline{v}(\underline{x}, t)) = 0}$$

Descriptions de la transformation

Gradient de la transformation

Tenseurs des déformations

Hypothèse des petites perturbations

Vitesse de déformation

Conservation de la masse