

TD 1 : Fonctions holomorphes

Exercice 1. Pour $z = x + iy$, on pose $f(z) = x + iy^2$.

- (a) Montrer que f est $\mathbb{R}$ -différentiable sur $\mathbb{C}$ et calculer la différentielle de f .
- (b) En quels points f est-elle $\mathbb{C}$ -différentiable ? Existe-t-il un ouvert non vide U sur lequel la fonction f est holomorphe ?

Solution :

- (a) Vue en tant qu'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, f est un polynôme en deux variables, donc $\mathbb{R}$ -différentiable. En $z = x + iy$, les dérivées partielles de f sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(z) = 2iy.$$

Donc la différentielle de f en z est l'application $\mathbb{R}$ -linéaire sur $\mathbb{C}$ donnée par

$$D_z f(a + ib) = a + 2iyb.$$

- (b) On a vu que f est $\mathbb{C}$ -différentiable en z si et seulement si l'application $\mathbb{R}$ -linéaire $D_z f$ est en fait $\mathbb{C}$ -linéaire. Il suffit de regarder si $D_z f(i) = iD_z f(1)$. Pour $z \in \mathbb{C}$,

$$D_z f(i) = 2iy, \quad iD_z f(1) = i.$$

$D_z f$ est donc linéaire si et seulement si $y = 1/2$. L'ensemble $E = \{z = x + iy; y = 1/2\} = \{x + (1/2)i; x \in \mathbb{R}\}$ des points de différentiabilité de f est d'intérieur vide (il ne contient aucun ouvert) : en effet, si $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, la boule de centre $x + (1/2)i$ et de rayon r n'est **jamais** contenue dans E (par exemple, $x + (1/2)i + ri$ n'est pas dans E). Ainsi f n'est différentiable sur aucune boule ouverte, donc aucun ouvert.

Exercice 2. Soit $f = u + iv$ une fonction holomorphe sur un ouvert Ω . On suppose¹ que f est de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que u et v sont harmoniques, c'est-à-dire que $\Delta u = 0 = \Delta v$.

Solution :

Il suffit de dériver les équations de Cauchy-Riemann. Comme f est holomorphe, on sait que u et v vérifient les équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

Dérivant le système par rapport à x puis par rapport à y , on obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \tag{4}$$

Maintenant (3) – (2) donne $\Delta v = 0$ et (1) + (4) donne $\Delta u = 0$.

¹On montrera plus tard pourquoi ceci est automatiquement vrai.

Exercice 3. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur U . Soit $V = \{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} \in U\}$. Pour tout $z \in V$, on pose $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Montrer que g est holomorphe sur V .

Solution :

Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$ et $f = u + iv$, on a

$$g(z) = \overline{f(\bar{z})} = u(x, -y) - iv(x, -y).$$

On peut calculer les dérivées partielles de g en x et y :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(z) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, -y) - i \frac{\partial v}{\partial x}(x, -y) = \overline{\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{z})} \\ \frac{\partial g}{\partial y}(z) &= -\frac{\partial f}{\partial y}(x, -y) + i \frac{\partial v}{\partial y}(x, -y) = -\overline{\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{z})}\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{\partial g}{\partial x}(z) + i \frac{\partial g}{\partial y}(z) = \overline{\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{z})} - i \overline{\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{z})} = \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\bar{z})} = 0.$$

Exercice 4. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur Ω . On écrit $f = u + iv$, avec u et v à valeurs réelles. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes:

- (a) f est constante;
- (b) u est constante;
- (c) v est constante;
- (d) $\bar{f}$ est holomorphe;
- (e) $|f|$ est constante.

Exercice 5. Soient a, b et c des réels. Pour $z = x + iy$, on pose $P(z) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour qu'il existe une fonction holomorphe f sur $\mathbb{C}$ dont P soit la partie réelle. Lorsque cette condition est remplie, donner toutes les solutions f .

Solution :

Les dérivées partielles de P sont

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = 2ax + 2by, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2bx + 2cy.$$

S'il existe une fonction à valeurs réelles Q telle que $f = P + iQ$ soit holomorphe, alors on doit avoir

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2ax + 2by = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2bx + 2cy = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

En intégrant la première équation par rapport à y et la deuxième par rapport à x , Q doit s'écrire

$$Q(x, y) = 2axy + by^2 + u(x) = bx^2 + 2cxy + v(y),$$

où u est une fonction ne dépendant pas de y et v ne dépend pas de x .

Il suffit maintenant d'identifier tous les termes : on trouve $u(x) = bx^2, v(y) = by^2$ et $a = c$.

Une condition nécessaire sur la fonction P pour qu'elle soit la partie réelle d'une fonction holomorphe est donc que $a = c$. Si $a = 0$, la fonction $f(x + iy) = P(x, y) + i(bx^2 + by^2 + 2axy)$ est bien holomorphe d'après les calculs précédents.

Exercice 6. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Existe-t-il une fonction holomorphe f sur U telle que $f(z) \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in U$?

Solution : Les seules fonctions holomorphes f à valeurs dans $\mathbb{R}$ sont constantes. En effet, si on pose $f = u + iv$, alors $v = 0$. Les équations de Cauchy-Riemann donnent alors $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Ainsi, $u = f$ est constante.

Exercice 7. (a) Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Obtenir la forme polaire des conditions de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \text{ et } \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}.$$

(b) En déduire l'existence d'une primitive holomorphe F de $z \mapsto 1/z$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ telle que $F(1) = 0$.
Solution :

Notons $f = P + iQ$. On écrit

$$\partial_r P = \partial_x P \partial_r x + \partial_y P \partial_r y = \partial_x P \cos(\theta) + \partial_y P \sin(\theta)$$

De même

$$\partial_r Q = \partial_x Q \partial_r x + \partial_y Q \partial_r y = \partial_x Q \cos(\theta) + \partial_y Q \sin(\theta).$$

Ensuite, on écrit $\partial_\theta P$ et $\partial_\theta Q$, on utilise les relations de Cauchy-Riemann pour avoir la relation demandée.

Exercice 8. Soit f une fonction complexe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$.

(a) Montrer que $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}$.

(b) On dit que f est antiholomorphe si $\bar{f}$ est holomorphe. Montrer que f est antiholomorphe ssi $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

(c) Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, montrer que $\Delta f = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} f$.

(d) On suppose que f est holomorphe. Montrer que $\Delta(|f|^2) = 4|f'(z)|^2$.

(e) On considère $f_1, \dots, f_p$ des fonctions holomorphes sur Ω telles que $|f_1|^2 + \dots + |f_p|^2$ soit constante. Montrer que toutes les fonctions sont constantes.

Solution :

(a) Posons $f = u + iv$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial(u - iv)}{\partial \bar{z}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(u - iv)}{\partial x} + i \frac{\partial(u - iv)}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} - i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \\ &= \overline{\frac{\partial f}{\partial z}} \end{aligned}$$

(b) $\bar{f}$ est holomorphe ssi $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = 0$, on utilise la question précédente.

(c) Il suffit de développer $4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} f = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$.

(d) $|f|^2 = f \bar{f}$. Comme f est holomorphe, on a $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ et $\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = 0$. On développe l'égalité précédente.

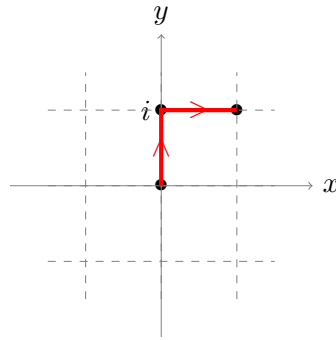
(e) D'après la question précédente, pour tout z ,

$$\Delta(|f_1(z)|^2 + \dots + |f_p(z)|^2) = 4(|f_1'(z)|^2 + \dots + |f_p'(z)|^2) = 0,$$

donc $|f_1'(z)|^2 = \dots = |f_p'(z)|^2 = 0$ (somme nulle de nombres positifs), c'est à dire $f_1'(z) = \dots = f_p'(z) = 0$ pour tout z .

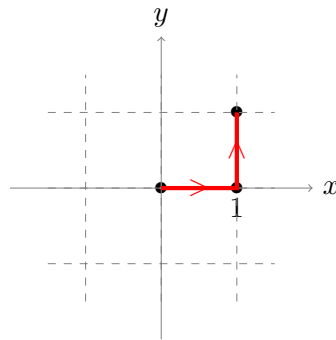
Exercice 9. Dessiner les deux chemins γ suivants et calculer à chaque fois $\int_{\gamma} |z|^2 dz$:

(a) Le segment allant de 0 à i suivi du segment allant de i à $1 + i$;



$$\int_{\gamma} |z|^2 dz = \int_0^1 i |it|^2 dt + \int_0^1 |t+i|^2 dt = i \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 (t^2 + 1) dt = \frac{i}{3} + \frac{4}{3}.$$

(b) Le segment allant de 0 à 1 suivi du segment allant de 1 à $1 + i$.



$$\int_{\gamma} |z|^2 dz = \int_0^1 |t|^2 dt + \int_0^1 i |1+it|^2 = \frac{1}{3} + i \int_0^1 (1+t^2) dt = \frac{1}{3} + i \frac{4}{3}.$$