

CHAPITRE IV

Dynamique des milieux continus

Modélisation des efforts intérieurs

EFFORT



TECHNICITE



RISQUE

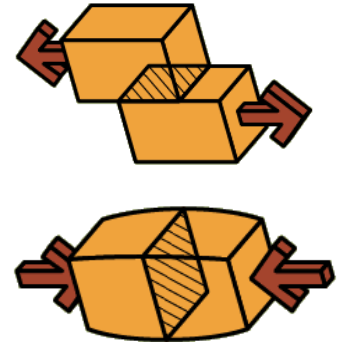


OBJECTIF

*Comment exprimer les
« contraintes » dans un
cors déformé ?*

Objectif : comment représenter les **efforts intérieurs** dans un milieu ?

- **Idée** : représentation par un champ **scalaire** (pression)
→ comment représenter le cisaillement??
- **Idée** : représentation par un champ **vectoriel** (force)
→ comment différencier les deux efforts ci-contre?



Deux démarches (et mêmes résultats!) :

- Approche **mathématique** (« à la française »)
 - idée : établir un bilan des puissances associées à n'importe quel mouvement = « **principe des puissances virtuelles** »
 - **élégant, très général, mais.... pas le temps** → dans le poly
- Approche physique (« à l'américaine »)
 - moins élégant, moins général, mais très physique !

Un des résultats notoires du principes des puissances virtuelles
application à un champ réel = théorème de l'énergie cinétique

$$\frac{d}{dt} \mathcal{K}(\underline{v}) - \mathcal{P}_i(\underline{v}) = \mathcal{P}_e(\underline{v})$$

Puissance des efforts extérieurs
= mise en mouvement – puissance « utilisée » pour déformer le milieu

→ solide indéformable :

$$\mathcal{P}_i(\underline{v}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \mathcal{K}(\underline{v}) = \mathcal{P}_e(\underline{v})$$

→ problème d'élastostatique :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{K}(\underline{v}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_i(\underline{v}) = \mathcal{P}_e(\underline{v})$$



CHAP IV: Dynamique des milieux continus

Modélisation des efforts intérieurs

Tenseur des contraintes de Cauchy

- Vecteur-contrainte
- Tenseur des contraintes de Cauchy
- Interprétation des composantes
- Equation de la dynamique
- Propriété du tenseur des contraintes de Cauchy

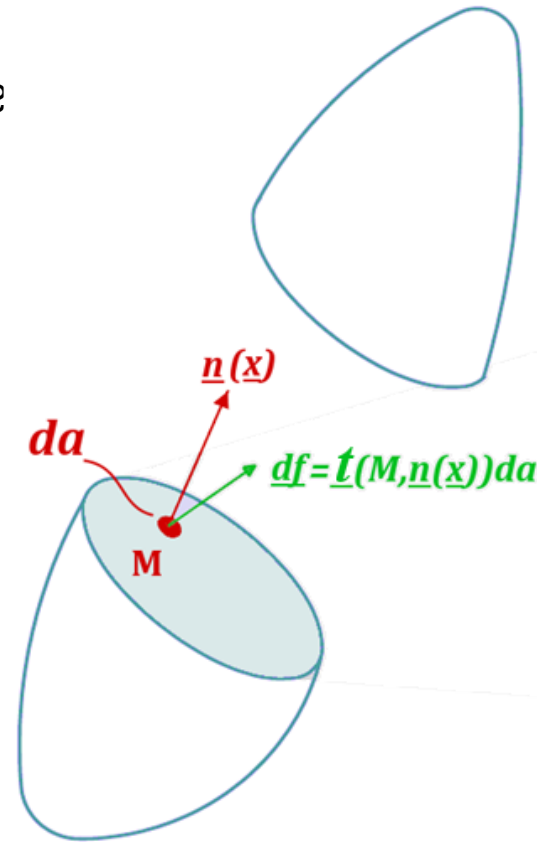
On se place dans la configuration actuelle : description **eulérienne**

- imaginons que l'on coupe de façon fictive un système matériel en M
- le plan de coupe s'appelle la **facette** $\underline{n}(\underline{x})$
- **résultante des efforts** d'une partie sur l'autre?

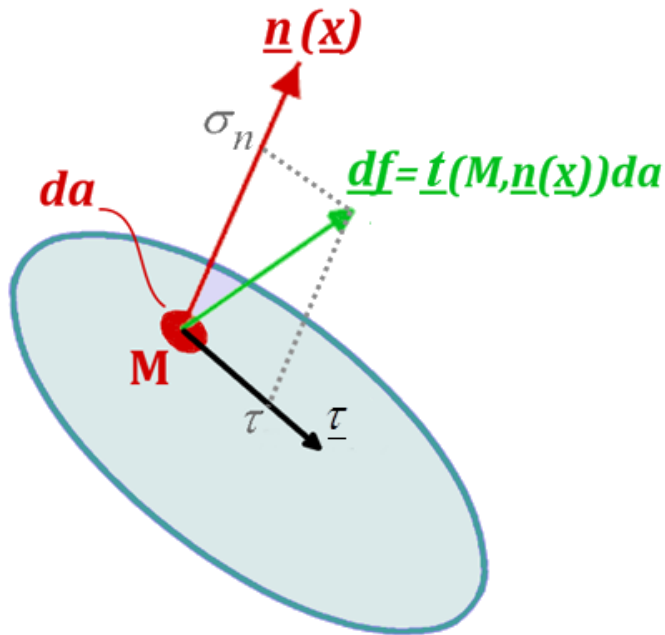
Densité surfacique de forces: $\underline{t}$

$$d\underline{f} = \underline{t}(M, \underline{n}(\underline{x})) da$$

$$\underline{t}(M, \underline{n}(\underline{x})) = \lim_{da \rightarrow 0} \frac{d\underline{f}}{da}$$



- La densité surfacique de forces $\underline{t}$ s'appelle le **vecteur-contrainte**
- Le vecteur-contrainte dépend de la **position** $\underline{x}$ et de l'**orientation** $\underline{n}(\underline{x})$
- on peut décomposer le vecteur-contrainte :



composante **normale**

$$\sigma_n = \underline{t}(M, \underline{n}(\underline{x})) \cdot \underline{n}(\underline{x})$$

$$\tau_n = (\underline{t}(M, \underline{n}(\underline{x})) - \sigma_n \underline{n}(\underline{x})) \cdot \underline{\tau}(\underline{x})$$

composante **tangentielle**

$$\sigma_n < 0 \Rightarrow \text{compression}$$

$$\sigma_n > 0 \Rightarrow \text{traction}$$

→ composantes du vecteur-contrainte homogènes à une **pression (Pa)**

CHAP IV: Dynamique des milieux continus

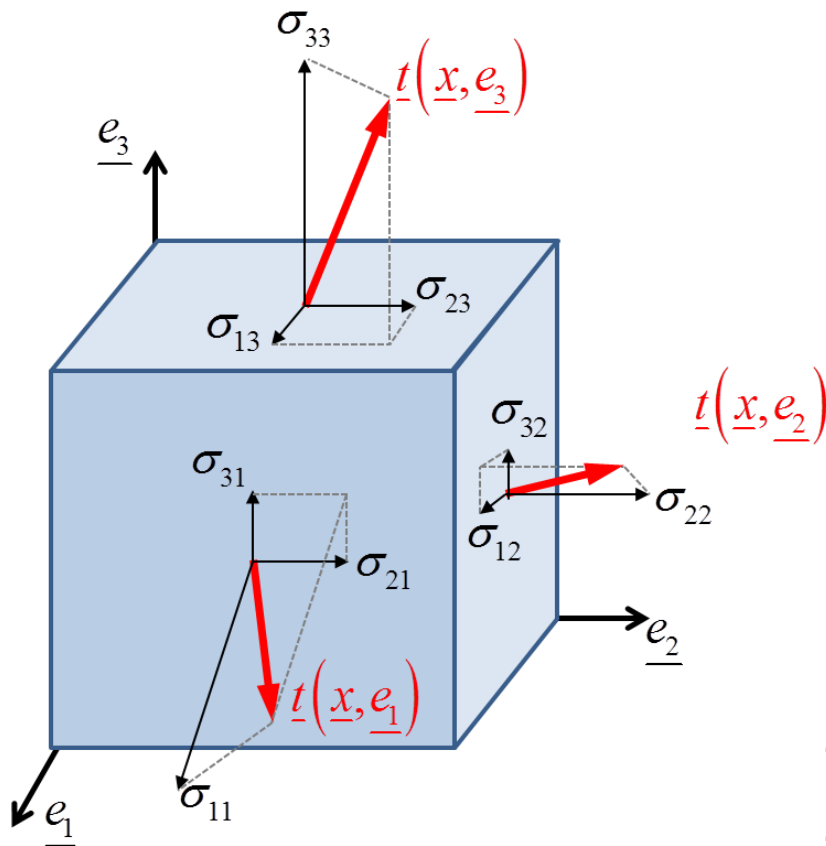
Modélisation des efforts intérieurs

Tenseur des contraintes de Cauchy

- Vecteur-contrainte
- Tenseur des contraintes de Cauchy
- Interprétation des composantes
- Equation de la dynamique
- Propriété du tenseur des contraintes de Cauchy

- le vecteur-contrainte dépend de la **facette** considéré
- « objet mathématique » qui contient **tous** les vecteurs-contrainte en M ?

élément parallélépipédique
infinitésimal centré en M



$$\underline{t}(\underline{x}, \underline{e}_1) = \sigma_{11} \underline{e}_1 + \sigma_{21} \underline{e}_2 + \sigma_{31} \underline{e}_3$$

$$\underline{t}(\underline{x}, \underline{e}_2) = \sigma_{12} \underline{e}_1 + \sigma_{22} \underline{e}_2 + \sigma_{32} \underline{e}_3$$

$$\underline{t}(\underline{x}, \underline{e}_3) = \sigma_{13} \underline{e}_1 + \sigma_{23} \underline{e}_2 + \sigma_{33} \underline{e}_3$$

$$\Rightarrow \underline{t}(\underline{x}, \underline{e}_i) = \sigma_{ji} \underline{e}_j$$

σ ji
Direction Facette

- composante σ_{ii} = effort **normal**
- composante σ_{ij} = effort **tangentiel**

→ On peut montrer que le vecteur-contrainte est linéaire vis-à-vis de la normale $\underline{n}(\underline{x}) = n_i \underline{e}_i$, et que par conséquent :

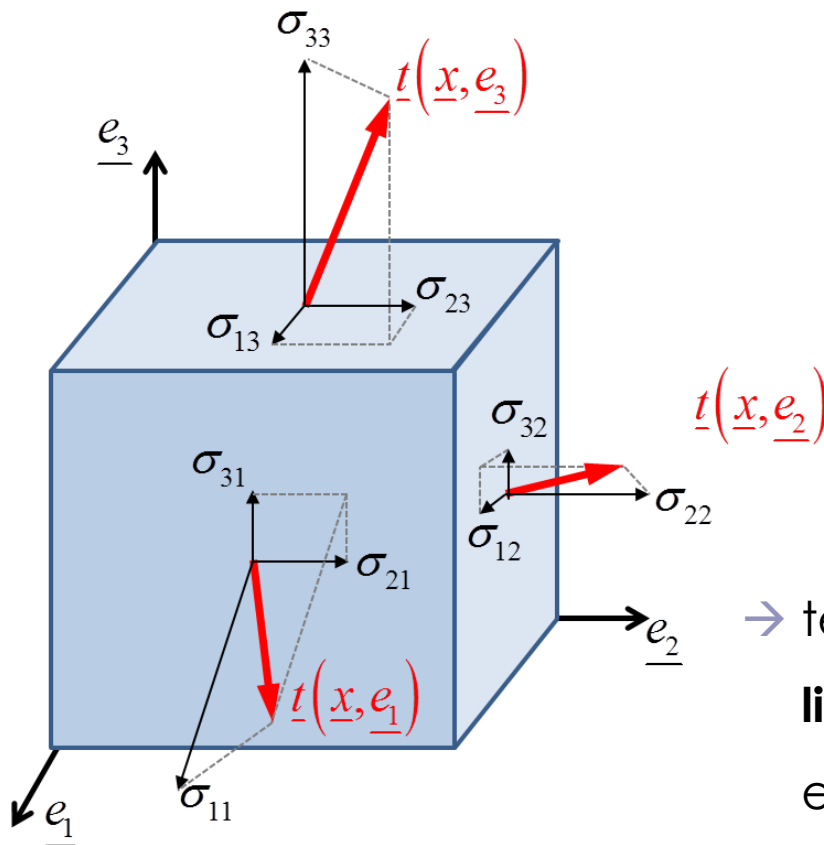
$$\begin{aligned} \underline{t}(\underline{x}, \underline{n}) &= \underline{t}(\underline{x}, n_i \underline{e}_i) = n_i \underline{t}(\underline{x}, \underline{e}_i) \\ &= n_i \sigma_{ji}(\underline{x}) = \underbrace{\sigma_{ji}(\underline{x}) n_i}_{t_j} \underline{e}_j \end{aligned}$$

→ on peut montrer alors que

$$\underline{t}(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x})) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x})$$

définition du vecteur-contrainte

→ tenseur d'ordre 2 $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$: **application linéaire** qui transforme un vecteur $\underline{n}(\underline{x})$ en un autre vecteur $\underline{t}(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}))$



Symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy

→ on se place en $M(x_1, x_2, x_3)$ au centre de l'élément de côté dx

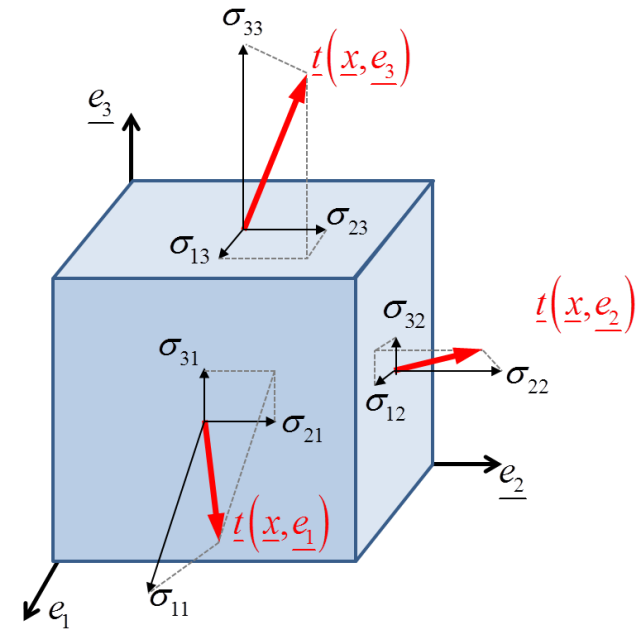
→ équilibre statique du parallélépipède?

Equation d'équilibre des moments :

$$\left(\underline{t}(\underline{e}_1) \wedge \frac{dx}{2} \underline{e}_1 - \underline{t}(-\underline{e}_1) \wedge \frac{dx}{2} \underline{e}_1 \right) + \left(\underline{t}(\underline{e}_2) \wedge \frac{dx}{2} \underline{e}_2 - \underline{t}(-\underline{e}_2) \wedge \frac{dx}{2} \underline{e}_2 \right) + \left(\underline{t}(\underline{e}_3) \wedge \frac{dx}{2} \underline{e}_3 - \underline{t}(-\underline{e}_3) \wedge \frac{dx}{2} \underline{e}_3 \right) = \underline{0}$$

$$\underline{t}(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x})) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x})$$

$$\begin{aligned} & (\sigma_{11} \underline{e}_1 + \sigma_{12} \underline{e}_2 + \sigma_{13} \underline{e}_3) \wedge dx \underline{e}_1 \\ & + (\sigma_{21} \underline{e}_1 + \sigma_{22} \underline{e}_2 + \sigma_{23} \underline{e}_3) \wedge dx \underline{e}_2 \\ & + (\sigma_{31} \underline{e}_1 + \sigma_{32} \underline{e}_2 + \sigma_{33} \underline{e}_3) \wedge dx \underline{e}_3 = \underline{0} \end{aligned}$$



Symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy

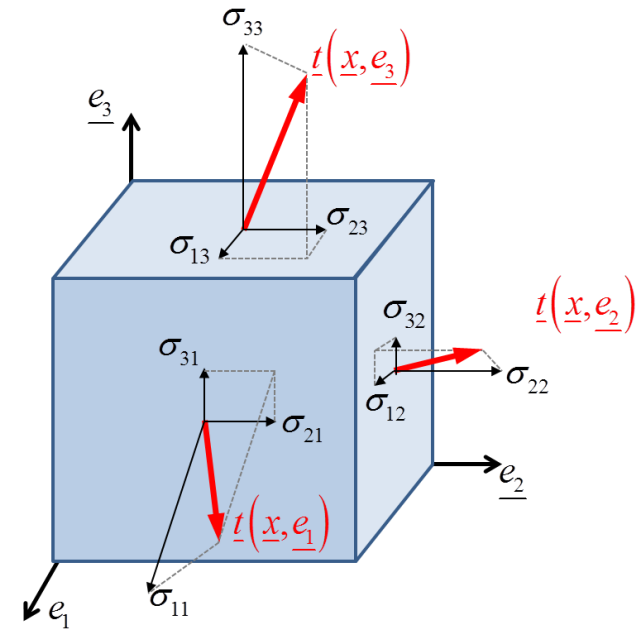
$$\Rightarrow dx \left(-\sigma_{12} \underline{e}_3 + \sigma_{13} \underline{e}_2 + \sigma_{21} \underline{e}_3 - \sigma_{23} \underline{e}_1 - \sigma_{31} \underline{e}_2 + \sigma_{32} \underline{e}_1 \right) = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{21} - \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{13} - \sigma_{31} = 0 \\ \sigma_{32} - \sigma_{23} = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad \sigma_{13} = \sigma_{31} \quad \sigma_{23} = \sigma_{32}$$

→ le tenseur des contraintes de Cauchy est **symétrique** !!!

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T \quad \text{soit} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$



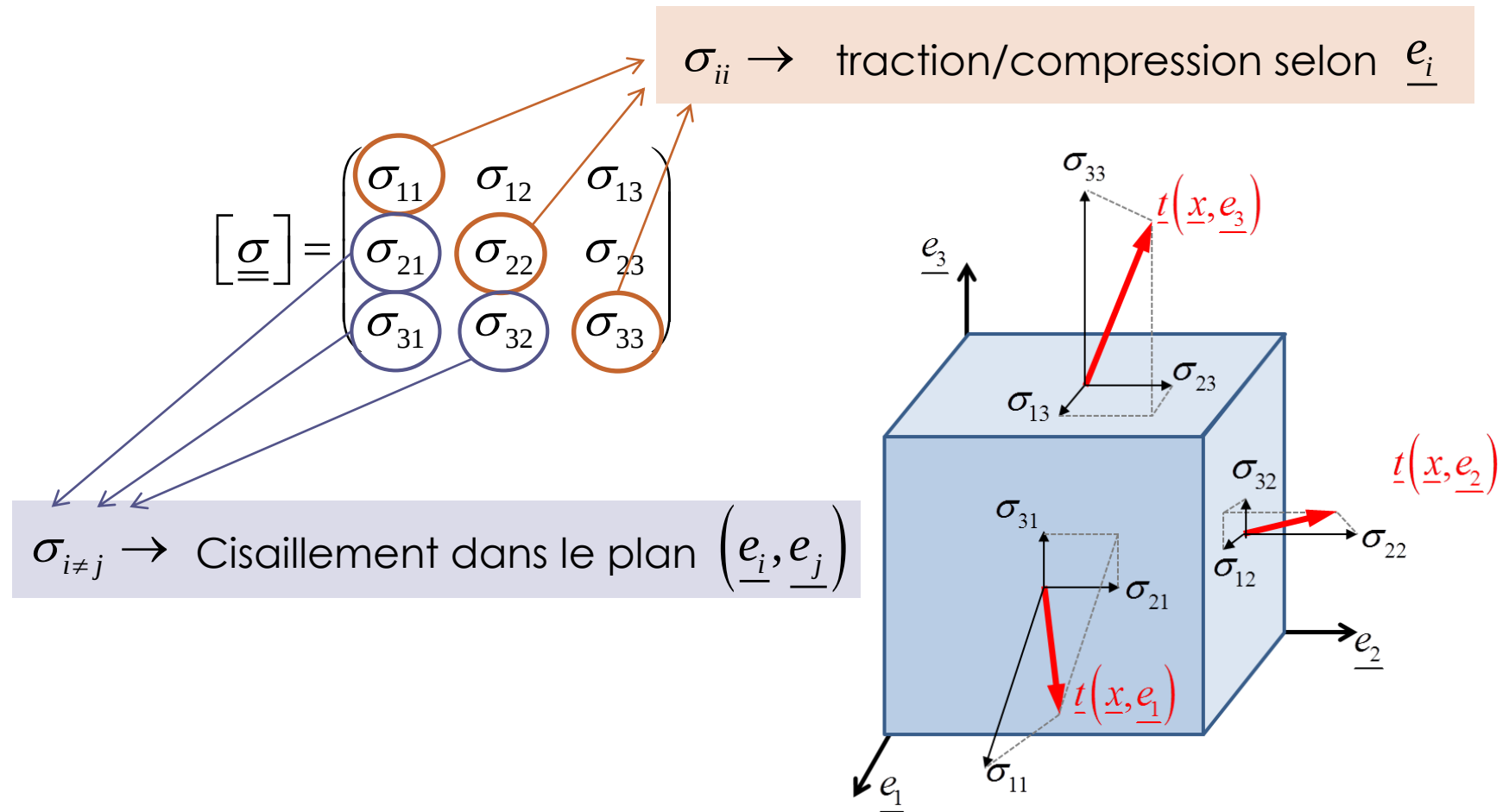
CHAP IV: Dynamique des milieux continus

Modélisation des efforts intérieurs

Tenseur des contraintes de Cauchy

- Vecteur-contrainte
- Tenseur des contraintes de Cauchy
- Interprétation des composantes
- Equation de la dynamique
- Propriété du tenseur des contraintes de Cauchy

Interprétation des composantes du tenseur des contraintes



CHAP IV: Dynamique des milieux continus

Modélisation des efforts intérieurs

Tenseur des contraintes de Cauchy

- Vecteur-contrainte
- Tenseur des contraintes de Cauchy
- Interprétation des composantes
- Equation de la dynamique
- Propriété du tenseur des contraintes de Cauchy

- Élément de matière :

volume $d\Omega_t$

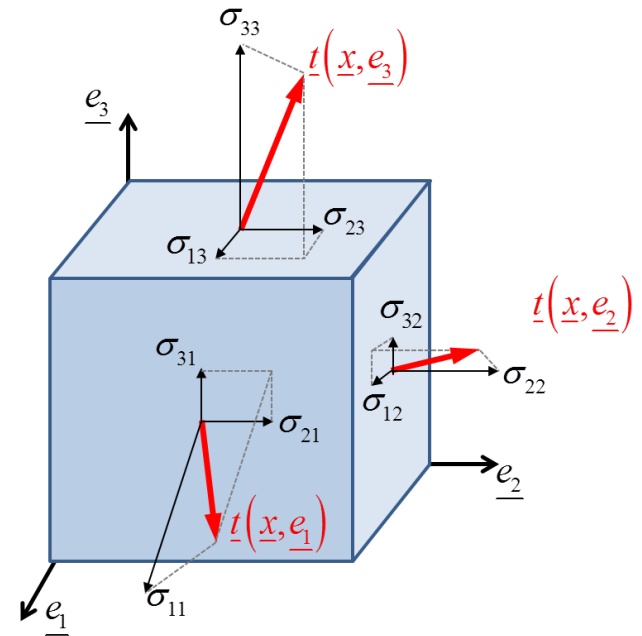
masse dm

frontière $\partial\Omega_t$ (fermée)

- Bilan des efforts:

efforts de volume $\int_{\Omega_t} \rho \underline{f}^m d\Omega_t$

efforts de surface $\int_{\partial\Omega_t} \underline{t} da$



- Principe fondamental de la dynamique :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \underline{v} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho \underline{f}^m d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \underline{t} da$$

variation de la quantité
de mouvement

efforts de volume

efforts de surface

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \underline{v} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho \underline{f}^m d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \underline{t} da$$

vecteur-contrainte

$$\underline{t} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \underline{v} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho \underline{f}^m d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} da$$

théorème de la divergence

$$\int_{\Omega_t} \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}) d\Omega = \int_{\partial\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} da$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \underline{v} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho \underline{f}^m d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}) d\Omega_t$$

On peut montrer que : $\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \underline{v} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho \frac{d\underline{v}}{dt} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho \underline{a} d\Omega_t$

avec $\underline{a}$ la dérivée **particulaire** du champ de vitesse

- Le PFD devient alors :

$$\int_{\Omega_t} \rho \underline{a} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho \underline{f}^m d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \underline{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) d\Omega_t$$

= Formulation **faible** (intégrale) de l'**équation d'équilibre**

- Cette équation est vraie quelque soit le volume d'intégration:

$$\rho \underline{a} = \underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{f}^m$$

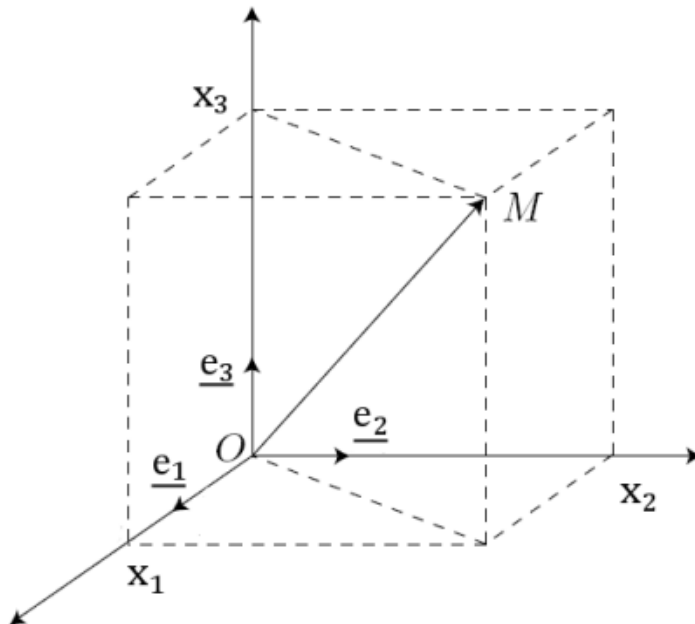
= Formulation **forte** (locale) de l'**équation d'équilibre**

Expression explicite de l'équation de la dynamique

$$\rho \underline{a} = \underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{f}^m$$

= équation vectorielle $\rightarrow$ 3 équations

- exemple en en coordonnées cartésiennes :



$$\begin{aligned} \rho (f_x^m - a_x) + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \rho (f_y^m - a_y) + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \rho (f_z^m - a_z) + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

CHAP IV: Dynamique des milieux continus

Modélisation des efforts intérieurs

Tenseur des contraintes de Cauchy

- Vecteur-contrainte
- Tenseur des contraintes de Cauchy
- Interprétation des composantes
- Equation de la dynamique
- Propriétés du tenseur des contraintes de Cauchy

Interlude mathématique

Directions et valeurs principales d'un tenseur

- Soit un tenseur d'ordre 2 **symétrique** $\underline{\underline{T}}$
- On appelle **valeur propre** (ou **principale**) et **vecteur propre** (ou **direction principale**) le **scalaire** λ et le **vecteur** $\underline{v}$ tels que:

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v} = \lambda \underline{v}$$

- On détermine les valeurs principales en résolvant : $\det(\underline{\underline{T}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0$
 $\rightarrow$ on les note T_I, T_{II}, T_{III}

- On détermine la direction principale T_i en résolvant :
$$\begin{cases} (\underline{\underline{T}} - T_i \underline{\underline{I}}) \cdot \underline{e}_i = \underline{0} \\ \underline{e}_i \cdot \underline{e}_i = 1 \end{cases}$$

 $\rightarrow$ on note les directions principales $\underline{e}_I, \underline{e}_{II}, \underline{e}_{III}$



Interlude mathématique

Directions et valeurs principales d'un tenseur

- Sans démonstration: si les trois valeurs principales de $\underline{\underline{T}}$ sont **distinctes**, alors les trois directions principales sont **orthogonales**
- La base formée par les vecteurs $\underline{e_I}, \underline{e_{II}}, \underline{e_{III}}$ est la base **principale**
- Dans **cette base principale** on a:

$$\underline{\underline{T}} = T_I \underline{e_I} \otimes \underline{e_I} + T_{II} \underline{e_{II}} \otimes \underline{e_{II}} + T_{III} \underline{e_{III}} \otimes \underline{e_{III}}$$

$$[\underline{\underline{T}}]_{(\underline{e_I}, \underline{e_{II}}, \underline{e_{III}})} = \begin{pmatrix} T_I & 0 & 0 \\ 0 & T_{II} & 0 \\ 0 & 0 & T_{III} \end{pmatrix}$$



Valeurs et directions principales

$\underline{\underline{\sigma}}$ est un tenseur symétrique d'ordre 2 :

→ Il existe une base $(\underline{e}_I, \underline{e}_{II}, \underline{e}_{III})$ appelée **base principale** telle que:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_I \underline{e}_I \otimes \underline{e}_I + \sigma_{II} \underline{e}_{II} \otimes \underline{e}_{II} + \sigma_{III} \underline{e}_{III} \otimes \underline{e}_{III} \quad \left[\underline{\underline{\sigma}} \right]_{(\underline{e}_I, \underline{e}_{II}, \underline{e}_{III})} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix}$$

Par convention: $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$

→ les facettes $(\underline{e}_I, \underline{e}_{II}, \underline{e}_{III})$ ne subissent que des contraintes **normales**

→ par exemple, pour la facette $\underline{e}_I$: $\underline{t} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_I = \sigma_I \underline{e}_I$

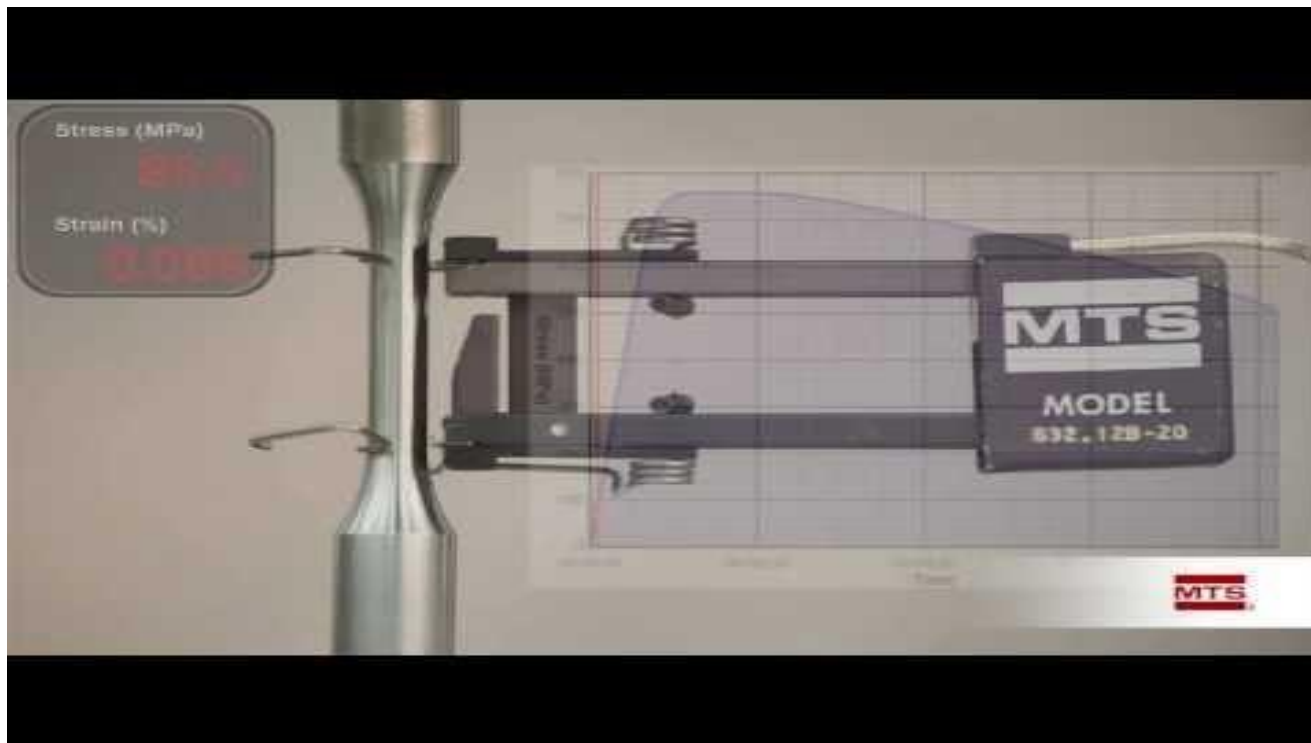
→ $\underline{e}_I$ est la **direction principale** associée à la **valeur principale** σ_I

Traction uniaxiale

$$\sigma_{zz} > 0$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{zz} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$$

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} \sigma_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

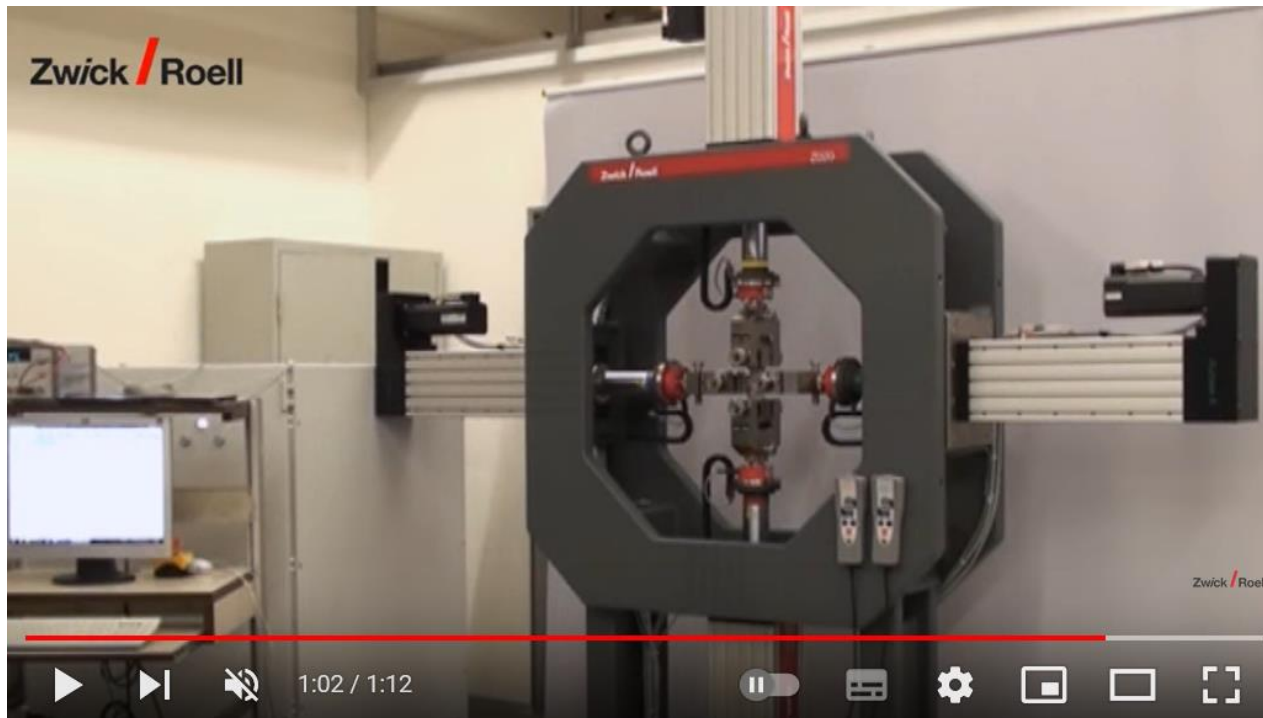


Traction biaxiale

$$\sigma_{11} > 0 \quad \sigma_{22} > 0$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{11} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sigma_{22} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2$$

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

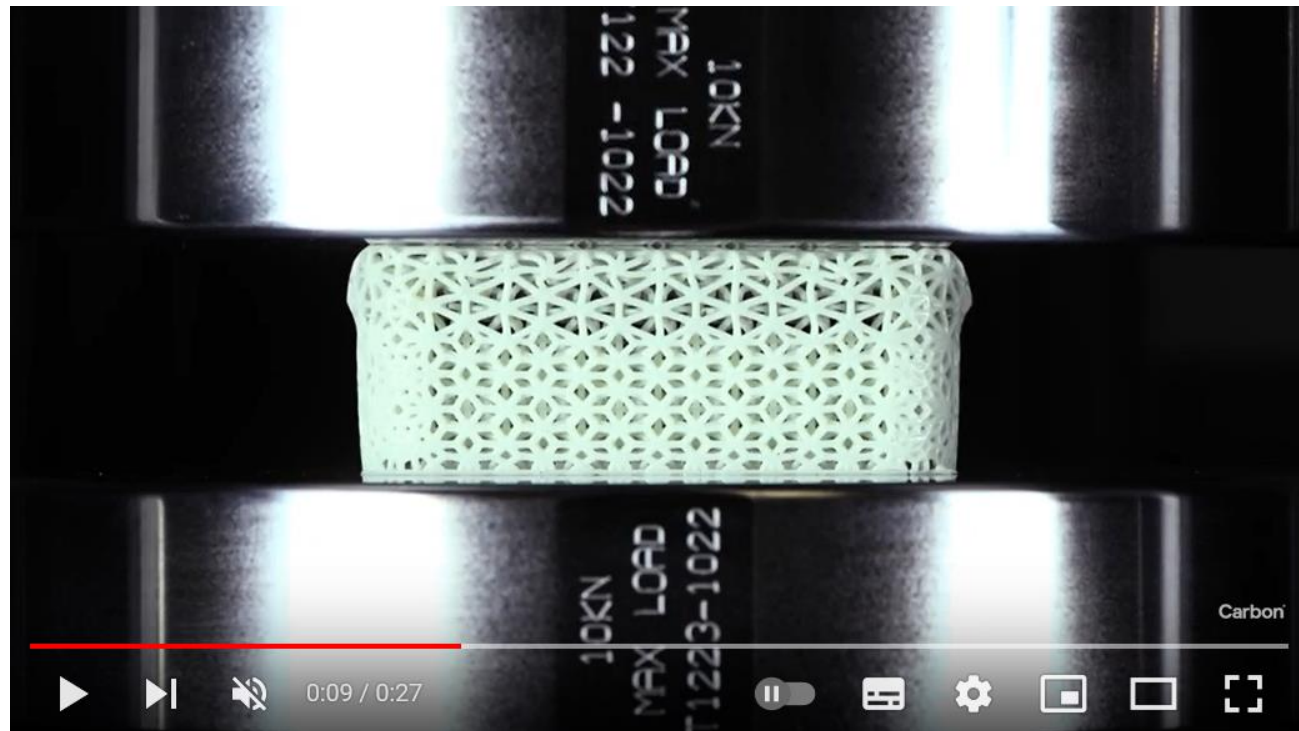


Compression uniaxiale

$$\sigma_{zz} < 0$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{zz} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$$

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} \sigma_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

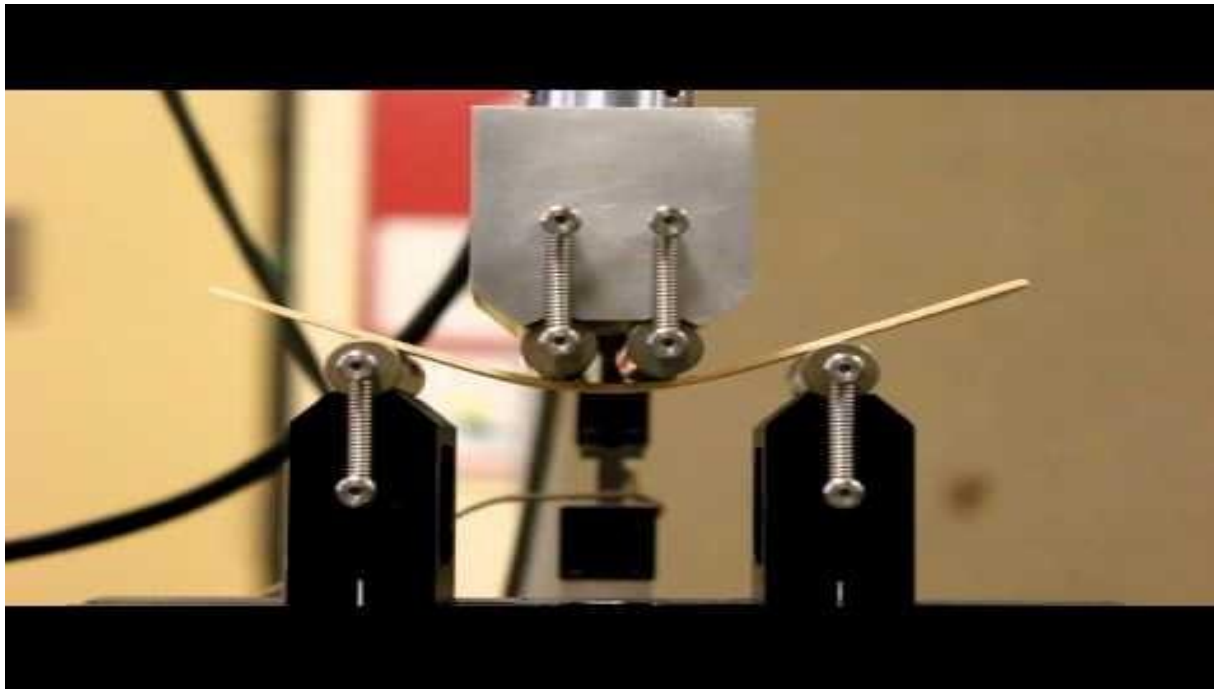
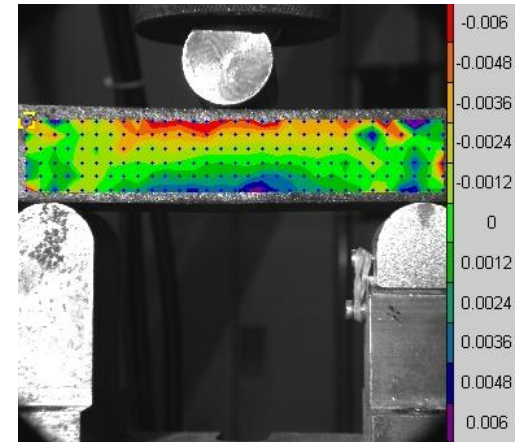


Flexion

$\sigma_{11}(x) < 0$ ou $\sigma_{11}(x) > 0$ suivant x

$$\underline{\underline{\sigma}}(x) = \sigma_{11}(x) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$$

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Torsion (cisaillement)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{\theta z} \underline{e}_{\theta} \otimes \underline{e}_z + \sigma_{z\theta} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_{\theta} = \tau (\underline{e}_{\theta} \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_{\theta})$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \tau (\underline{e}_I \otimes \underline{e}_I - \underline{e}_{III} \otimes \underline{e}_{III})$$

$$[\underline{\underline{\sigma}}]_{(\underline{e}_r, \underline{e}_{\theta}, \underline{e}_z)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta z} = \tau \\ 0 & \sigma_{z\theta} = \tau & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad [\underline{\underline{\sigma}}]_{(\underline{e}_I, \underline{e}_{II}, \underline{e}_{III})} = \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau \end{pmatrix}$$



Principe des puissances virtuelles : philosophie

Définition et interprétation du vecteur-contrainte

Définition et interprétation du tenseur des contraintes

Propriétés du tenseur des contraintes

Equation d'équilibre