

TD1 : stabilité du barrage pesant

Objectif #1

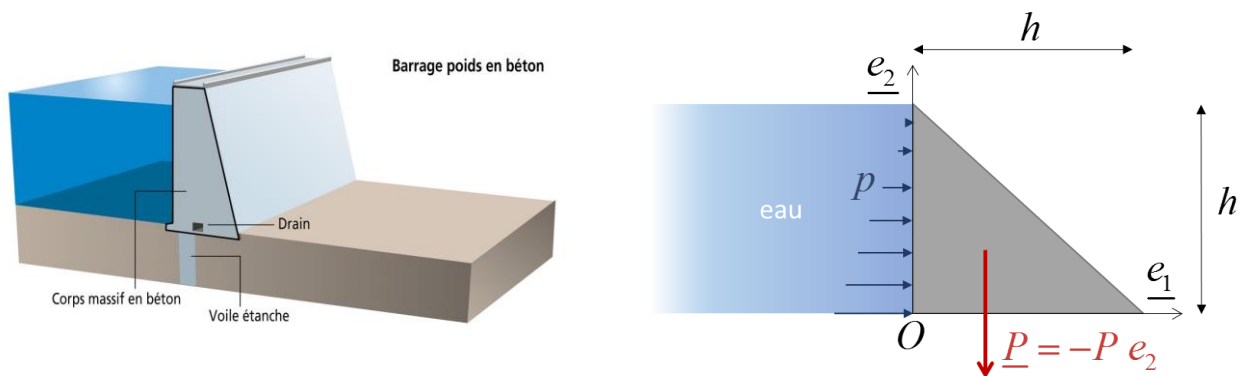
Différencier les notions de pression et d'effort résultant et écrire des conditions aux limites.

Objectif #2

Ecrire le principe fondamental de la statique et résoudre l'équilibre des efforts.

Enoncé du problème

Un barrage-poids (ou barrage pesant), est conçu pour retenir l'eau en utilisant le seul poids de la matière. Chaque section du barrage est stable, indépendamment du reste du barrage, contrairement au barrage voûte qui vient s'appuyer sur le flan d'une montagne. On peut donc facilement faire l'hypothèse d'un problème plan et effectuer cette modélisation :



Le matériau qui constitue le barrage possède une masse volumique ρ , tandis qu'on note ρ_0 la masse volumique de l'eau. La section du barrage est un triangle isocèle de côté h , et la longueur totale du barrage est L . On nomme f le coefficient de frottement entre le barrage et le socle rocheux sur lequel il est posé. L'évolution de la pression est évidemment linéaire avec la profondeur et de la forme $p = \rho_0 g \times \text{profondeur}$.

Problème posé

On cherche à déterminer la masse volumique ρ minimale pour que le barrage ne glisse pas sur le socle rocheux et ne bascule pas en raison de la pression de l'eau.

Hypothèses

- La pression de l'air est négligée
- Le barrage est rempli jusqu'à affleurement
- On se place dans le plan milieu du barrage

Questions

- 1) Ecrire la résultante des forces de pression qui s'exercent sur le barrage.
- 2) Déterminer le poids du barrage et son point d'application.
- 3) Ecrire l'équilibre des efforts et en déduire une condition nécessaire sur la masse volumique du barrage pour que le barrage ne glisse pas sur le socle rocheux.
- 4) On considère qu'il y a adhérence parfaite entre le socle rocheux et le barrage (il n'y a plus de glissement, contrairement à la première partie du TD) : écrire la condition de non basculement du barrage.
- 5) Application numérique : *quid* d'un barrage en béton ? en sapin ? en acier ?

$$\rho_{\text{sapin}} = 450 \text{ kg / m}^3 \quad \rho_{\text{béton}} = 2200 \text{ kg / m}^3 \quad \rho_{\text{acier}} = 7800 \text{ kg / m}^3$$

- 6) Effectuer la même démarche en utilisant la statique graphique.

Formules utiles

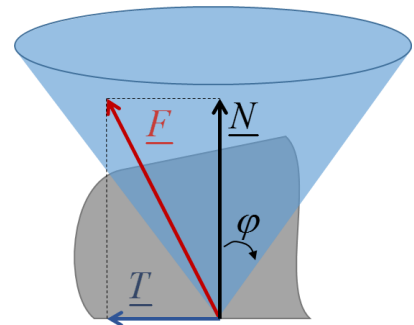
Loi de Coulomb :

Si une pièce exerce un effort $\underline{F}$ sur une autre, et qu'on appelle $\underline{T}$ et $\underline{N}$ respectivement les composantes tangentes et normales de cet effort, alors on peut introduire le coefficient de *frottement statique* f tel que :

- lorsque $\|\underline{T}\| < f \|\underline{N}\|$: le glissement ne se produit pas, on dit qu'on a adhérence

- à la limite $\|\underline{T}\| = f \|\underline{N}\|$: le glissement apparaît.

Il y a adhérence lorsque la résultante $\underline{F}$ se situe dans un cône de demi-angle au sommet φ , appelé *cône de frottement*, de telle sorte qu'on a la relation $f = \tan \varphi$.



Principe fondamental de la statique :

Variation de la quantité de mouvement : $\frac{d\underline{p}}{dt} = m\underline{a} = \sum \underline{F}^{ext}$

Variation du moment cinétique : $\frac{d\underline{L}_O}{dt} = \sum \underline{\mathcal{M}}_O(\underline{F}^{ext})$

Si le solide est à l'équilibre, ces deux quantités sont nulles et on a par conséquent :

$$\underline{0} = \sum \underline{F}^{ext}$$
$$\underline{0} = \sum \underline{\mathcal{M}}_O(\underline{F}^{ext}) \quad \forall O$$

Statique graphique :

Dans le cas d'un solide soumis à **trois** forces dans le même plan :

- les trois efforts forment un triangle fermé
- les trois droites d'action des efforts sont parallèles **ou** concourantes

TD2 : étude d'écoulements classiques

Objectif #1

Effectuer un rappel sur les systèmes de coordonnées

Objectif #2

Appréhender les notations matricielles ou tensorielles dans différents repères

Objectif #3

Manipuler les opérateurs divergence, gradient, laplacien et rotationnel

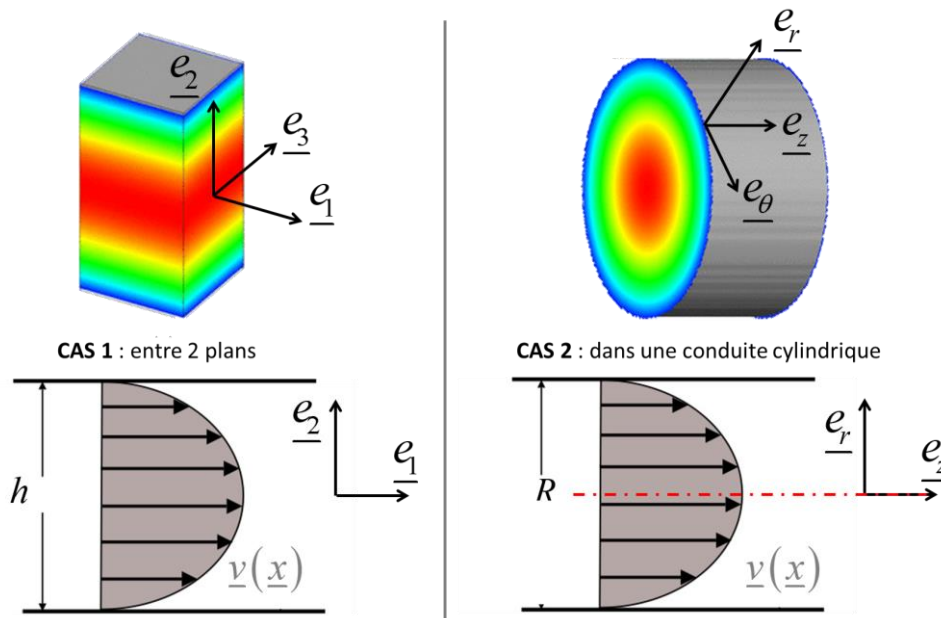
Objectif #4

Introduire de premières notions de mécanique des fluides

Enoncé du problème

Le cours de MMC fait intervenir de nouveaux outils mathématiques comme le calcul tensoriel ou l'analyse des champs : pour assimiler ces outils sous forme d'un exemple, on se propose d'analyser un écoulement et d'y appliquer les différents opérateurs qui seront utilisés dans toute la suite du cours. On considère pour cela un écoulement de **Poiseuille**, dans deux cas de figures différents :

- 1) un écoulement entre deux plans infinis et parallèles, espacés d'une distance h
- 2) un écoulement dans une conduite cylindrique de rayon R



Problème posé

Quelle est la forme du champ de vitesses au sein de cet écoulement, et comment appliquer les différents opérateurs différentiels à ce champ de vitesses ?

Hypothèses

- Dans une zone suffisamment loin des sections d'entrée et de sortie, on considère que l'écoulement est établi
- On s'intéresse à un écoulement incompressible (eau, huile, etc...)
- On considère une adhérence parfaite du fluide aux parois

Questions

Première partie : écoulement entre 2 plans infinis

- 1) Faire des hypothèses sur le champ de vecteurs vitesse lorsque l'écoulement est établi, pour arriver à une forme la plus réduite possible.
- 2) Nous verrons plus tard que pour un fluide incompressible, la divergence du champ de vitesses est nécessairement nulle : montrer alors que $\underline{v} = v_1(x_2)\underline{e}_1 + K\underline{e}_2$
- 3) On fait l'hypothèse que le frottement implique une vitesse nulle aux niveau des parois : traduire proprement cette condition.
- 4) On se propose d'adopter une forme parabolique pour le champ de vitesses : proposer une forme en fonction de $v_{\max}$, la vitesse maximale du fluide.
- 5) Nous verrons plus tard que l'écoulement d'un fluide visqueux entraîne un cisaillement au niveau de la paroi, proportionnel à la viscosité du fluide et au gradient du champ de vitesses. Calculer le gradient du champ de vitesses.
- 6) Les parties symétriques et antisymétriques de ce gradient correspondent aux vitesses de déformation et de rotation du fluide : calculer ces deux termes.
- 7) Montrer que l'information sur la rotation du fluide est également contenue dans le rotationnel du champ de vitesses.
- 8) L'équation de Navier-Stokes, que nous verrons à la fin du cours, régit l'écoulement du fluide et fait intervenir le laplacien du vecteur vitesse : calculer ce laplacien.
- 9) A partir du théorème de flux-divergence, retrouver la condition de conservation du débit volumique durant cet écoulement.

Seconde partie : écoulement dans une conduite cylindrique

- 10) Reprendre toutes les questions précédentes dans le cas d'une conduite cylindrique (en montrant notamment que $\underline{v} = v_z(r)\underline{e}_z$)

TD3 : écrasement d'un pneu plein

Objectif #1

Différencier les notions de ligne de courant et de trajectoire.

Objectif #2

Comparer les formalismes lagrangiens et eulériens.

Objectif #3

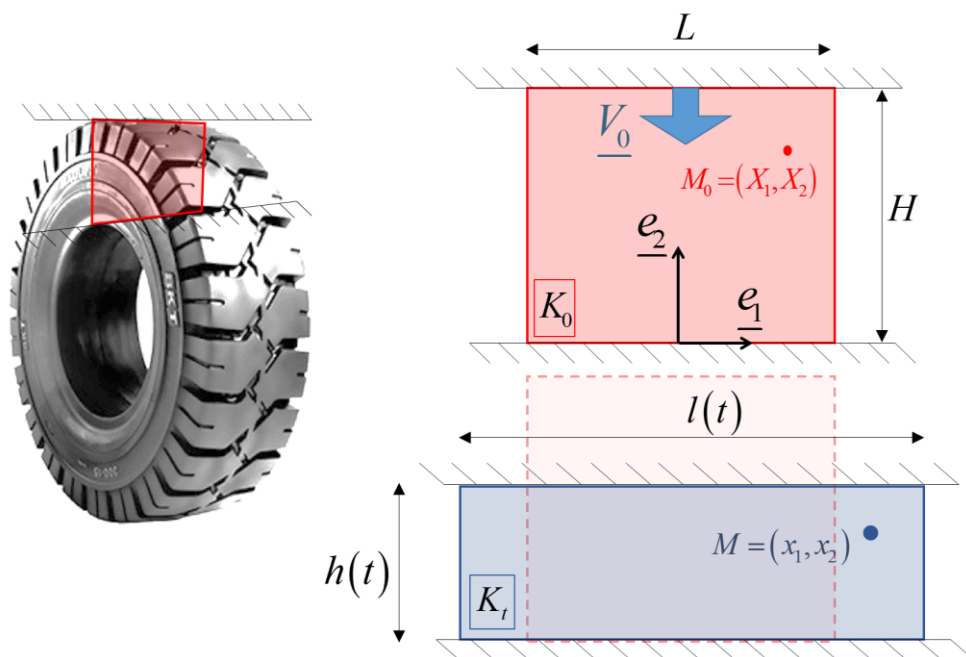
Manipuler les notations indicielles, matricielles et tensorielles.

Objectif #4

Calculer le gradient de la transformation et le tenseur des déformations.

Enoncé du problème

On considère un pneu plein en caoutchouc, dont la section peut être approximée par un rectangle de largeur et hauteur initiales L et H respectivement. Pour approcher le phénomène d'écrasement du pneu, qui apparaît dans le calcul du rendement d'un véhicule, on considère **un problème plan** dans lequel la jante est rigide et indéformable, tandis que le sol « s'approche » avec une vitesse $\underline{V}_0 = -V_0 \underline{e}_2$ maintenue constante.



Problème posé

On veut suivre la cinématique de la transformation de ce milieu continu et calculer les déformations pour déterminer si elles sont compatibles avec les propriétés du caoutchouc.

Hypothèses

- On considère que le caoutchouc qui constitue le pneu plein est **incompressible**
- On considérera que les contacts s'effectuent **sans frottement** et que la section du pneu reste **rectangulaire** lors de la transformation

Questions

- 1) Déterminer le champ de vitesses dans la configuration K_t .

Aide : en s'avancant sur les sections qui suivront, on admet que l'hypothèse d'incompressibilité du milieu implique la relation suivante sur le champ de vitesses :

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0$$

- 2) Donner l'équation des trajectoires d'un point se trouvant initialement en (X_1, X_2) .
- 3) Donner l'équation des lignes de courant.
- 4) Déterminer le champ de déplacements.
- 5) Calculer le tenseur gradient de la transformation. Effectuer ce calcul en utilisant les différentes notations indicielles, matricielles et tensorielles. Vérifier que la transformation s'effectue à volume constant.
- 6) Comparer le tenseur des déformations de Green-Lagrange $\underline{\underline{E}}$ au tenseur des déformations linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$. Discuter des signes de leurs composantes. A quelle condition sont-ils équivalents ?
- 7) Avant rupture, on fait l'hypothèse que le caoutchouc qui constitue le pneu peut être « étiré » de 20% ou « comprimé » de 40%. D'écrire la condition de rupture associée.

Formules utiles

Trajectoires :

Définition en formulation lagrangienne : $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$

Définition en formulation eulérienne : $\underline{dx} = \underline{v}(\underline{x}, t) dt$ avec la C.I. $\underline{x}(t=0) = \underline{X}$

Lignes de courant :

Ce sont les enveloppes des champs des vecteurs vitesses à un instant donné t :

$$\underline{dx} \wedge \underline{v}(\underline{x}, t) = \underline{0} \Rightarrow \frac{dx_1}{v_1(\underline{x}, t)} = \frac{dx_2}{v_2(\underline{x}, t)} = \frac{dx_3}{v_3(\underline{x}, t)}$$

Tenseur gradient de la transformation : $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{Grad}} \underline{u}$

Tenseur des déformations de Green-Lagrange : $\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}})$

Tenseur des déformations linéarisé : $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T)$

Gradient d'un vecteur en coordonnées cartésiennes :

$$\underline{\underline{Grad}} \underline{T} = \frac{\partial T_i}{\partial X_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$$

TD4 : contraintes dans un réservoir sous pression

Objectif #1

Savoir écrire des conditions aux limites en pression.

Objectif #2

Comprendre la signification physique de différentes composantes du tenseur des contraintes.

Objectif #3

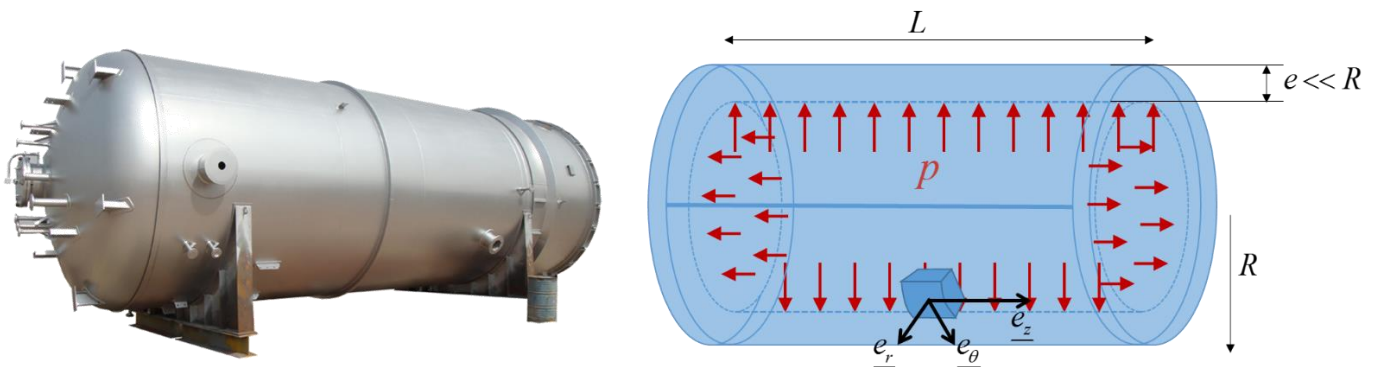
Écrire l'équation d'équilibre.

Objectif #4

Comprendre la différence entre efforts intérieurs et extérieurs, et écrire leur équilibre.

Enoncé du problème

Une solution technique permettant de stocker l'énergie produite de façon intermittente consiste à mettre un gaz sous pression dans de gros réservoirs. Il s'agit alors de prédire quelle peut être la pression maximale dans un réservoir pour ne pas l'endommager, ce qui nécessite de connaître l'état de contraintes au sein du matériau qui le constitue.



On notera p la pression dans le réservoir de longueur L , d'épaisseur e et de rayon R .

Problème posé

On cherche à déterminer l'état de contraintes au sein de la paroi latérale du réservoir.

Hypothèses

- Le réservoir est considéré parfaitement cylindrique, sans soudures, sans ouvertures.
- On considère que l'épaisseur du réservoir est petite devant son rayon : $e \ll R$

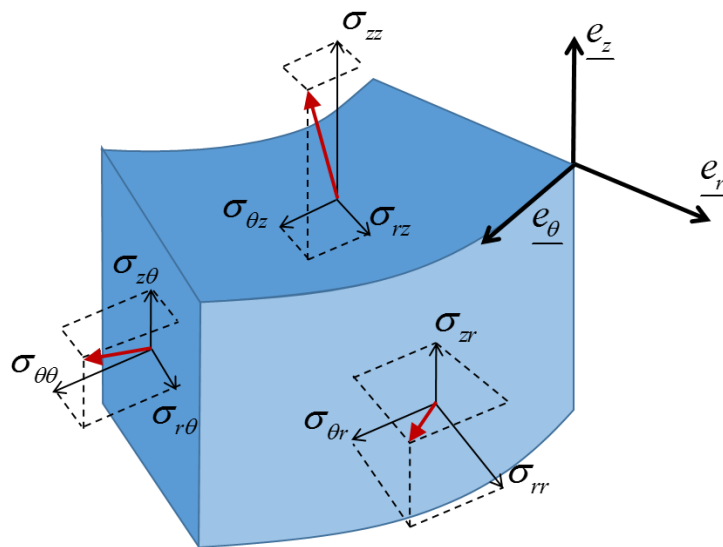
Questions

- 1) Ecrire les conditions aux limites concernant l'application de la pression à l'intérieur du réservoir.
- 2) Ecrire les conditions aux limites concernant l'extérieur du réservoir.
- 3) On considère que le tenseur des contraintes dans la paroi latérale est sous la forme $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\sigma}}(r)$, et que la composante $\sigma_{rr}(r)$ y évolue linéairement. Déterminer son expression.
- 4) A partir des questions précédentes et de l'équation d'équilibre, déterminer la composante $\sigma_{\theta\theta}(r)$ en considérant qu'au sein de la paroi $r \approx R$.
- 5) Retrouver le même résultat en considérant l'équilibre d'un demi-cylindre sous pression coupé par une facette de normale $\underline{e}_\theta$, en considérant que le vecteur-contrainte est uniformément réparti dans la paroi.
- 6) En effectuant une démarche similaire pour une autre facette, déterminer complètement le tenseur des contraintes dans la paroi latérale. Discuter des différentes composantes.

Formules utiles

Définition du vecteur-contrainte : $\underline{t}(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x})) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x})$

Composantes du tenseur des contraintes :



Equation d'équilibre en coordonnées cylindriques :

$$\underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} + \rho(\underline{f}^m - \underline{a}) = \underline{0}$$

$$\begin{cases} \rho(f_r^m - a_r) + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \\ \rho(f_\theta^m - a_\theta) + \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0 \\ \rho(f_z^m - a_z) + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0 \end{cases}$$

TD5 : essai de traction uniaxiale

Objectif #1

Découvrir le déroulement d'un essai de traction uniaxiale

Objectif #2

Analyser les déformations et les contraintes pour un état de sollicitation élémentaire

Objectif #3

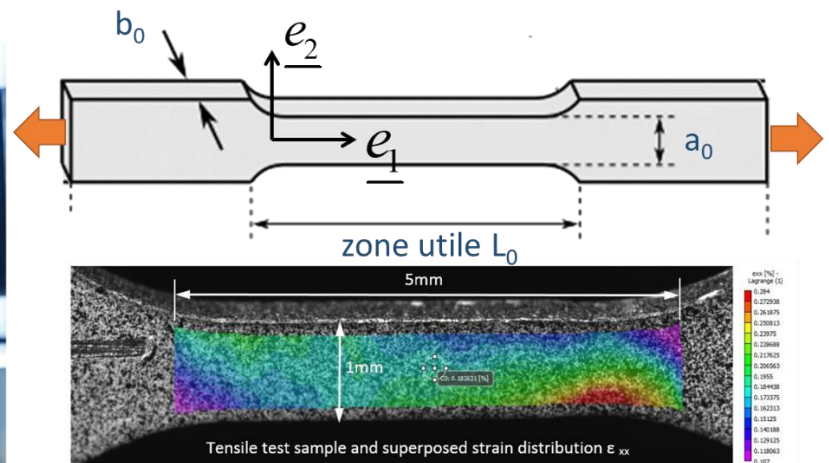
Interpréter les significations des différents paramètres d'un matériau élastique linéaire isotrope

Objectif #4

Comprendre la notion d'isotropie d'un matériau

Enoncé du problème

Afin d'étudier le comportement mécanique d'un matériau, on a généralement recours à des essais mécaniques parmi lesquels l'essai de traction est le plus courant. Il consiste à imposer un effort de traction sur une éprouvette calibrée, dont la partie utile est soumise à un champ de contraintes et de déformations homogènes (comme on va le découvrir ici).



Problème posé

Quel est l'état de contraintes et de déformations lors de l'essai de traction uniaxiale, et comment déterminer les propriétés élastiques du matériau à partir des données de cet essai ?

Hypothèses

- Le déplacement dans la direction de l'éprouvette (plate ou cylindrique) est nul à une des deux extrémités de la partie utile, de longueur initiale L_0
- Ce déplacement est imposé à l'autre extrémité et il est connu (mesuré par extensométrie) : on le nomme par exemple ΔL
- L'effort de traction mesuré est uniformément réparti sur la section de l'éprouvette.
- Chaque section rectangulaire de l'éprouvette reste rectangulaire lors de l'essai, et chaque section droite reste droite (perpendiculaire à la direction de traction)
- Pour de petites déformations (HPP), la section de l'éprouvette est constante dans toute la partie utile de l'éprouvette (mais pas constante dans le temps évidemment !)

Questions

Première partie : cas 1D

Dans un premier temps on ne s'intéresse qu'à la direction de l'essai de traction uniaxiale (problème 1D), sans se soucier de l'état de déformations ou de contraintes dans les directions transverses.

- 1) Ecrire le champ de déplacement au sein de la partie utile de l'éprouvette, en considérant qu'il évolue linéairement le long de l'éprouvette.
- 2) Comparer alors le champ de déformations de Green-Lagrange, et sa version linéarisée en HPP.
- 3) Comparer la déformation en HPP avec la dilatation.
- 4) Calculer la contrainte dans l'éprouvette, si l'on considère qu'elle est constituée d'un matériau linéaire élastique isotrope. En déduire une relation entre le module d'Young et les coefficients de Lamé.
- 5) Comment calcule-t-on la contrainte à partir de la mesure de l'effort ?
- 6) On fait maintenant l'hypothèse que le champ de déplacement évolue de façon quadratique dans la direction de traction : est-ce compatible avec l'équilibre du milieu ?

Deuxième partie : étude de l'éprouvette plate

On s'intéresse maintenant au cas 3D, pour lequel une traction dans la direction $\underline{e}_1$ sera associée à des variations de dimensions dans les directions transverses $\underline{e}_2$ et $\underline{e}_3$.

- 7) Proposer une forme simple pour le champ de déplacements.
- 8) En déduire une expression pour le champ de déformations et de contraintes.
- 9) A partir de l'équilibre du milieu, montrer que toutes les composantes du tenseur des contraintes sont constantes dans la partie utile de l'éprouvette.
- 10) A partir des conditions de la surface libre et de l'hypothèse de distribution uniforme de l'effort de traction, déterminer complètement le champ de contraintes.
- 11) Retrouver la signification physique du coefficient de Poisson.
- 12) On mesure la largeur a de l'éprouvette en cours de transformation : écrire le lien auquel on doit s'attendre entre a , la largeur initiale a_0 , et la variation de longueur ΔL .

Formules utiles

Définition du vecteur-contrainte : $\underline{t}(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x})) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x})$

Tenseur des déformations linéarisé : $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u} + (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u})^T)$

Gradient d'un vecteur : $\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{T} = T_{i,j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$

$$\begin{aligned} \text{Equation d'équilibre:} \quad & \rho(f_1^m - a_1) + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \\ & \rho(f_2^m - a_2) + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \\ & \rho(f_3^m - a_3) + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \end{aligned}$$

Loi de Hooke: $\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{I} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}$ ou encore $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{I}$

TD6 : dimensionnement d'un arbre de transmission

Objectif #1

Comprendre et mettre en application le théorème de Saint-Venant.

Objectif #2

Résoudre un problème d'élasticité simple.

Objectif #3

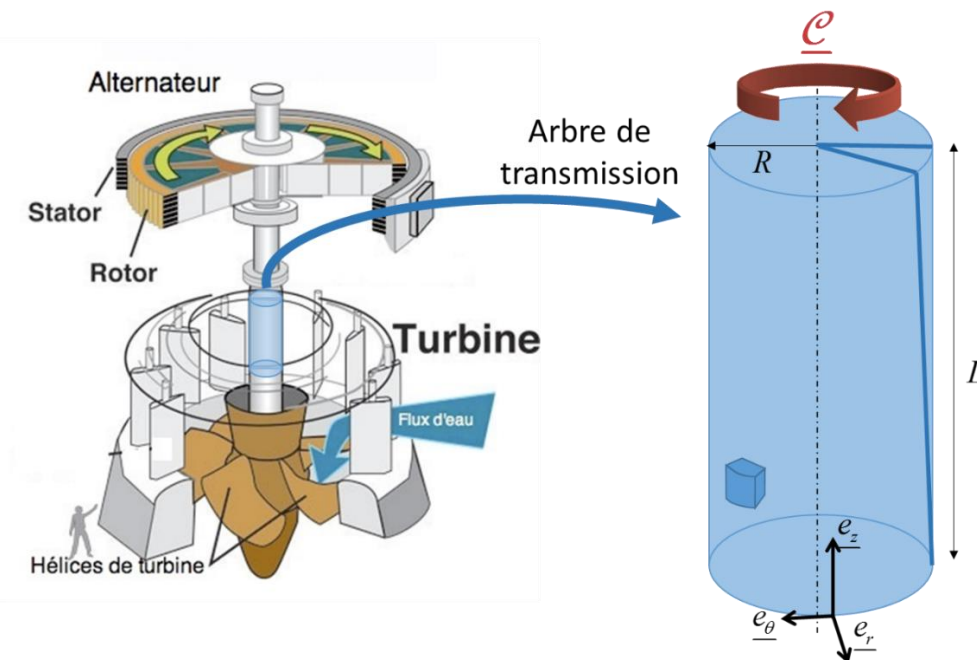
Comprendre la notion de base principale et de contraintes principales.

Objectif #4

Dimensionner une pièce mécanique à partir du critère de Von Mises.

Enoncé du problème

Dans la plupart des chaînes de production d'énergie, comme dans l'exemple ci-dessous permettant de récupérer l'énergie hydraulique par l'intermédiaire d'une turbine accouplée à un alternateur, l'énergie est transmise par le biais d'un *arbre de transmission*. Cet arbre constitue un élément critique de cette chaîne de conversion d'énergie, et ses dimensions doivent être proprement choisies.



On se place ici dans le cas d'un arbre élastique linéaire et isotrope de rayon R et de longueur L soumis à un couple de torsion $\mathcal{C}$ et encastré à l'autre extrémité.

Problème posé

Comment se traduit l'application du couple en termes de contraintes ?
 Pour un matériau et des dimensions d'arbre donnés, quel est le couple transmissible ?

Hypothèses

On se placera dans le cas de l'hypothèse des petites perturbations. On considérera alors :

- que le rayon et la longueur de l'arbre resteront constants durant la transformation
- qu'une section droite transverse de l'arbre reste droite après déformation
- qu'une fibre droite en surface du matériau reste droite après déformation.

Questions

- 1) Montrer que, en raison des hypothèses formulées, on peut postuler un champ de déplacement de la forme : $\underline{u}(r, z) = u_\theta(r, z)\underline{e}_\theta$.
- 2) Calculer le champ de déformations correspondant à ce déplacement.
- 3) Calculer le champ de contraintes correspondant à ce champ de déformations.
- 4) On postule que le couple est appliqué en $z = L$ de façon linéaire en r , de telle sorte que $\sigma_{\theta z}(z = L) = Cste \times r$. Justifier cette hypothèse et déterminer cette constante.
- 5) En raison des hypothèses précédentes, on peut postuler que u_θ est linéaire en z . En déduire le champ de contraintes dans tout l'arbre de transmission.
- 6) Vérifier que la condition de surface libre est satisfaite en $r = R$.
- 7) Déterminer les contraintes principales et la base principale correspondante.
- 8) Calculer la contrainte équivalente de Von-Mises, en en déduire le couple maximal admissible pour un matériau et des dimensions données.

Formules utiles

Définition du vecteur-contrainte : $\underline{t}(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x})) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x})$

Tenseur des déformations linéarisé : $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T)$

Gradient d'un vecteur en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{Grad}} \underline{T} = & \frac{\partial T_r}{\partial r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_r}{\partial \theta} - T_\theta \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_r}{\partial z} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + \\ & \frac{\partial T_\theta}{\partial r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + T_r \right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_\theta}{\partial z} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \\ & \frac{\partial T_z}{\partial r} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T_z}{\partial \theta} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_z}{\partial z} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \end{aligned}$$

Equation d'équilibre en coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} \rho(f_r^m - a_r) + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \\ \rho(f_\theta^m - a_\theta) + \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0 \\ \rho(f_z^m - a_z) + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0 \end{cases}$$

Contrainte équivalente de Von Mises : $\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2}$

TD7 : frottement fluide autour du volant d'inertie

Objectif #1

Utiliser la condition d'incompressibilité d'un fluide.

Objectif #2

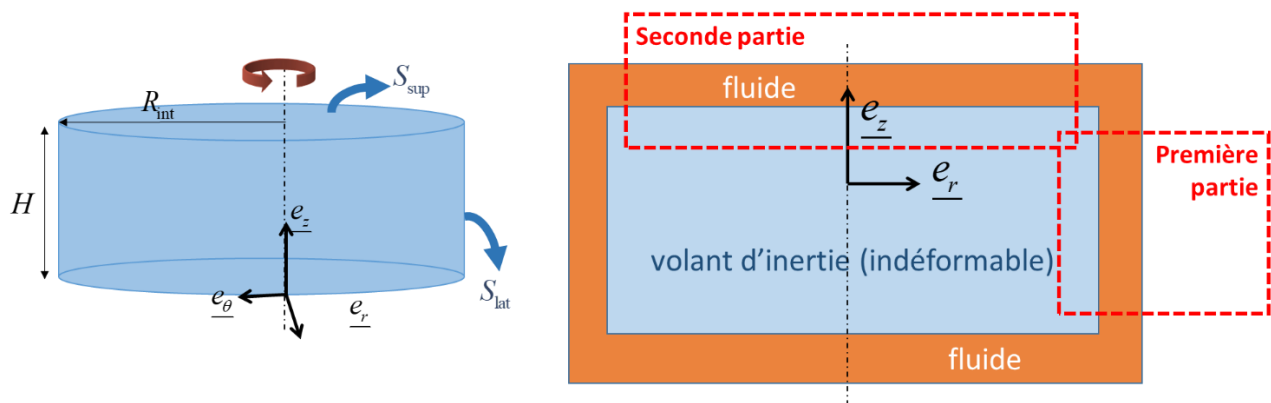
Utiliser l'équation de Navier-Stokes pour résoudre un problème de mécanique des fluides.

Objectif #3

Utiliser la loi de comportement du fluide newtonien pour déterminer une contrainte de cisaillement.

Enoncé du problème

Un volant d'inertie et un système rotatif permettant le stockage et la restitution d'énergie cinétique. Il peut être utilisé pour réguler ou lisser la production d'énergie électrique, en stockant l'énergie pendant de courtes durées. Une partie de l'énergie cinétique stockée est néanmoins perdue en raison des frottements au niveau des roulements (ou paliers), et en raison du frottement du fluide à la surface du volant dans l'enceinte qui le contient (où le vide n'est généralement pas parfait).



On appelle R_{int} et R_{ext} les rayons du volant et de l'enceinte qui le contient, respectivement.

Problème posé

On cherche à définir le profil des champs de vitesses tout autour du volant d'inertie qui tourne à la vitesse Ω , afin de quantifier les couples résistants dus au frottement fluide.

Hypothèses

- On considère que le fluide qui entoure le volant d'inertie est newtonien et incompressible.
- On considère que l'écoulement est laminaire, établi et stationnaire.
- On considère une adhésion parfaite du fluide aux parois de l'enceinte et du volant.
- Le volant est placé verticalement de telle sorte que $\underline{g} = -g\underline{e}_z$

Questions

Première partie : champ de vitesses autour de la surface latérale

- 1) Pour cette surface, justifier que l'on puisse postuler un champ de vitesses et de pression sous la forme $\underline{v} = v_\theta(r) \underline{e}_\theta$ et $p(r, z)$ respectivement.
- 2) Trouver la forme du champ de vitesses en utilisant l'équation de Navier-Stokes.
- 3) En déduire le champ de contraintes sur la surface latérale.
- 4) En déduire le couple résistant au niveau du volant en raison du frottement fluide.

Seconde partie : champ de vitesses autour de la surface supérieure

- 5) Pour cette seconde surface, on postule un champ de vitesses et de pression sous la forme $\underline{v} = v_\theta(r, z) \underline{e}_\theta$ et $p(r, z)$ respectivement, et on admet que la vitesse dépend linéairement de z . Reprendre les équations précédentes pour calculer le couple résistant au niveau de cette surface supérieure.
- 6) En considérant le volant indéformable, déduire l'accélération angulaire du volant d'inertie lors de l'application du couple moteur $\mathcal{C}$.

Formules utiles

Divergence d'un vecteur en coordonnées cylindriques : $\text{div } \underline{T} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rT_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial T_z}{\partial z}$

Equation de Navier-stokes : $\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{v}) \cdot \underline{v} \right) = -\underline{\underline{\text{grad}}}(p) + \mu \Delta \underline{v} + \rho \underline{g}$

Gradient d'un vecteur en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{T} = & \frac{\partial T_r}{\partial r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_r}{\partial \theta} - T_\theta \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_r}{\partial z} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + \\ & \frac{\partial T_\theta}{\partial r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + T_r \right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_\theta}{\partial z} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \\ & \frac{\partial T_z}{\partial r} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T_z}{\partial \theta} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_z}{\partial z} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \end{aligned}$$

Solution de l'équation différentielle $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x^2} = 0$:

$$y = \frac{A}{x} + Bx \text{ avec } A, B \text{ des constantes}$$

Loi de comportement du fluide newtonien :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{d}} \text{ avec } \mu \text{ la viscosité dynamique du fluide et } \underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{grad}}} \underline{v} + \left(\underline{\underline{\text{grad}}} \underline{v} \right)^T \right)$$

Théorème du moment cinétique pour un solide en rotation :

$$\ddot{\theta} I_{Oz} = \dot{\Omega} I_{Oz} = \sum_i \mathfrak{M}_{Oz} \left(\underline{F}^{(i)} \right)$$

Formulaire

DESCRIPTION LAGRANGIENNE – EULÉRIENNE

Description lagrangienne : description par trajectoire dans K_0

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \quad \text{avec} \quad \underline{\phi}(\underline{X}, t = t_0) = \underline{X}$$

Description eulérienne : description par un champ de vitesses dans K_t

$$\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{\phi}(\underline{X}, t)}{\partial t} = \underline{v}(\underline{\phi}(\underline{X}, t), t) \quad \text{avec} \quad \underline{\phi}(\underline{X}, t = t_0) = \underline{X}$$

DÉRIVÉE PARTICULAIRE

$$\frac{d\mathbf{g}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + \underline{\text{grad}}(\mathbf{g}) \cdot \underline{v}$$

GRADIENT DE LA TRANSFORMATION

Définition du tenseur gradient de la transformation (non-symétrique en général) :

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{\phi}(\underline{X}, t)}{\partial \underline{X}} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} = \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{\phi}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u}(\underline{X}, t)$$

Il permet le transport d'un vecteur de K_0 dans K_t : $d\mathbf{l} = \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \cdot d\mathbf{L}$

Variation de volume : $\frac{d\Omega}{d\Omega_0} = \det \underline{\underline{F}} = J \quad 0 < \det \underline{\underline{F}} = J < +\infty$

TENSEUR DES DÉFORMATIONS DE GREEN-LAGRANGE

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u} + (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u})^T + (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u})^T \cdot \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u})$$

TENSEUR DES DÉFORMATIONS LINÉARISÉES EN HPP

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u} + (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u})^T)$$

TAUX DE DÉFORMATION

Expression eulérienne : $\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} \left((\underline{\underline{\text{grad}}} \underline{v})^T + \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{v} \right)$

En posant le tenseur de description eulérienne $\underline{\underline{k}} = \dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} = \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{v}$, on obtient :

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{k}}^T + \underline{\underline{k}}) = \frac{1}{2} \left((\underline{\underline{\text{grad}}} \underline{v})^T + \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{v} \right) : \text{taux de déformation}$$

$$\underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{k}}^T - \underline{\underline{k}}) = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{grad}}} \underline{v} - (\underline{\underline{\text{grad}}} \underline{v})^T \right) : \text{vitesse de rotation}$$

Taux de dilatation volumique : $\dot{\Omega}_t = J(\dot{t}) \Omega_0 = \text{div } \underline{v} J \Omega_0$

Pas de changement de volume (incompressibilité) $\rightarrow \text{div } \underline{v} = 0$

CONSERVATION DE LA MASSE

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{v}) = 0$$

VECTEUR-CONTRAÎNTE ET TENSEUR DES CONTRAÎNTE DE CAUCHY

$$\underline{t}(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x})) = \lim_{da \rightarrow 0} \frac{df}{da} = \sigma_{ij}(\underline{x}) n_j(\underline{x}) \underline{e}_i = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x})$$

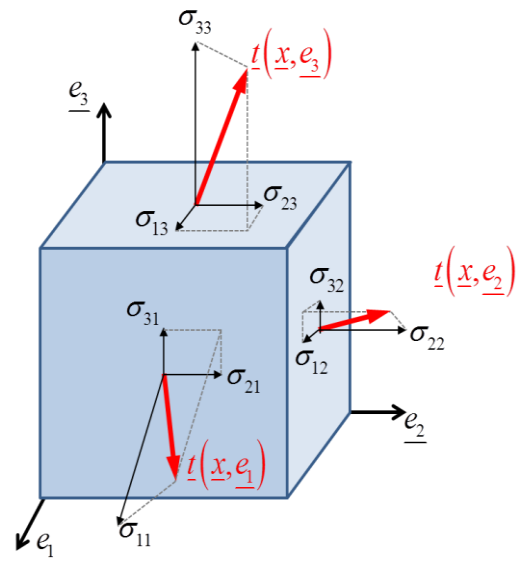
Tenseur de Cauchy symétrique et eulérien $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$

Il existe une base principale telle que :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_I \underline{e}_I \otimes \underline{e}_I + \sigma_{II} \underline{e}_{II} \otimes \underline{e}_{II} + \sigma_{III} \underline{e}_{III} \otimes \underline{e}_{III}$$

EQUATION D'ÉQUILIBRE

$$\text{div } \underline{\underline{\sigma}} + \rho(\underline{f}^m - \underline{a}) = \underline{0}$$



APPLICATION AUX SOLIDES ÉLASTIQUES : ÉLASTICITÉ LINÉAIRE

En HPP, sans contraintes initiales et à température constante :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{I} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{I} \end{cases} \quad E \text{ module d'Young, } \nu \text{ coefficient de Poisson}$$

APPLICATION AUX FLUIDES

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{d}{dt} \underline{p} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \underline{v} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{v}) d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) da$$

Loi de comportement d'un fluide newtonien :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{I} + 2\mu \underline{\underline{d}}$$

Equation de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{Grad}}(\underline{v}) \cdot \underline{v} \right) = -\underline{\nabla} p + \mu \underline{\Delta} \underline{v} + \rho \underline{g}$$

OPÉRATEUR GRADIENT		
	Coordonnées cartésiennes	Coordonnées cylindriques
Gradient d'un scalaire	$\underline{\text{grad}} T = \frac{\partial T}{\partial x_1} \underline{e}_1 + \frac{\partial T}{\partial x_2} \underline{e}_2 + \frac{\partial T}{\partial x_3} \underline{e}_3$	$\underline{\text{grad}} T = \frac{\partial T}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + \frac{\partial T}{\partial z} \underline{e}_z$
Gradient d'un vecteur	$\underline{\text{grad}} \underline{T} =$ $\frac{\partial T_1}{\partial x_1} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial T_1}{\partial x_3} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 +$ $\frac{\partial T_2}{\partial x_1} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial T_2}{\partial x_2} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial T_2}{\partial x_3} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 +$ $\frac{\partial T_3}{\partial x_1} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial T_3}{\partial x_2} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial T_3}{\partial x_3} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$	$\underline{\text{grad}} \underline{T} =$ $\frac{\partial T_r}{\partial r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_r}{\partial \theta} - T_\theta \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_r}{\partial z} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_z +$ $\frac{\partial T_\theta}{\partial r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + T_r \right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_\theta}{\partial z} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z +$ $\frac{\partial T_z}{\partial r} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T_z}{\partial \theta} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_z}{\partial z} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$

OPÉRATEUR DIVERGENCE		
	Coordonnées cartésiennes	Coordonnées cylindriques
Divergence d'un vecteur	$\text{div } \underline{T} = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} + \frac{\partial T_2}{\partial x_2} + \frac{\partial T_3}{\partial x_3} = T_{i,i}$	$\text{div } \underline{T} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r T_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial T_z}{\partial z}$
Divergence d'un tenseur	$\text{div } \underline{T} = \left(\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} \right) \underline{e}_1 +$ $\left(\frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} \right) \underline{e}_2 +$ $\left(\frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \right) \underline{e}_3$	$\text{div } \underline{T} = \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (T_{rr} - T_{\theta\theta}) + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} \right) \underline{e}_r +$ $\left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (T_{\theta r} + T_{r\theta}) + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} \right) \underline{e}_\theta +$ $\left(\frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} T_{zr} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right) \underline{e}_z$

EQUATION D'ÉQUILIBRE	
Coordonnées cartésiennes	Coordonnées cylindriques
$\rho (f_x^m - a_x) + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0$	$\rho (f_r^m - a_r) + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$
$\rho (f_y^m - a_y) + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0$	$\rho (f_\theta^m - a_\theta) + \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0$
$\rho (f_z^m - a_z) + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$	$\rho (f_z^m - a_z) + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0$