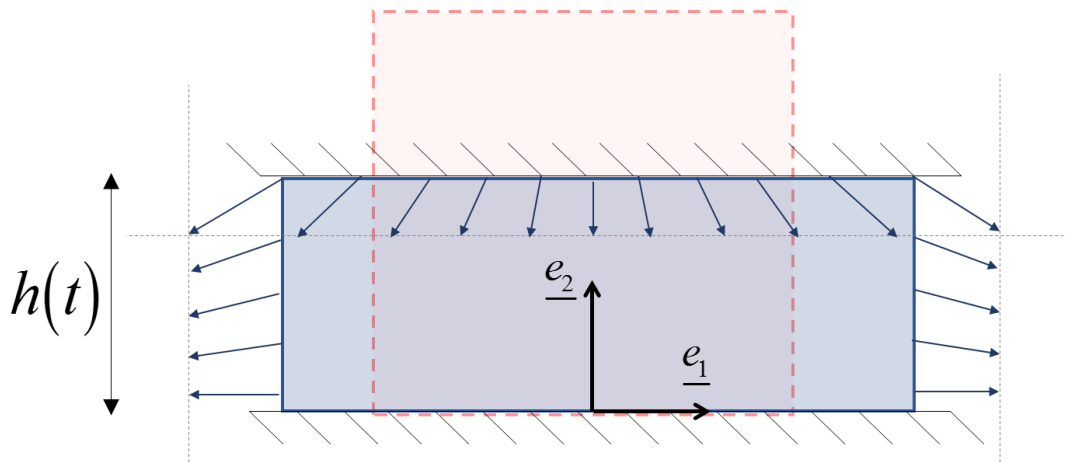


TD3 : éléments de réponse

- 1) Déterminer le champ de vitesses dans la configuration K_t (en se servant du fait que le caoutchouc est considéré incompressible).

$$\underline{v}(x_1, x_2) = v_1(x_1)\underline{e}_1 + v_2(x_2)\underline{e}_2$$



$$\operatorname{div} \underline{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial v_1(x_1)}{\partial x_1} = -\frac{\partial v_2(x_2)}{\partial x_2} = Cste$$

$$v_2(x_2) = -\frac{V_0}{h} x_2$$

$$v_1(x_1) = \frac{V_0}{h} x_1$$

$$h(t) = H - V_0 t$$

$$\underline{v}(x_1, x_2) = \frac{V_0}{H - V_0 t} (x_1 \underline{e}_1 - x_2 \underline{e}_2)$$

- 2) Donner l'équation des trajectoires d'un point se trouvant initialement en (X_1, X_2)

$$d\underline{x} = \underline{v}(\underline{x}, t) dt \quad \text{avec la condition initiale} \quad \underline{x}(t=0) = \underline{X}$$

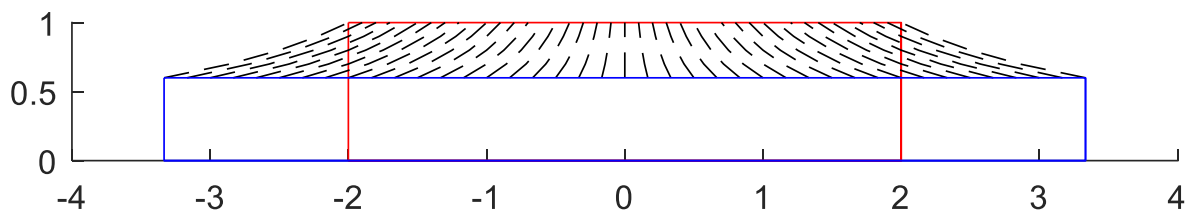
$$dx_1 = \frac{V_0}{H - V_0 t} x_1 dt \Rightarrow x_1 = \frac{C_1}{H - V_0 t} \quad \text{avec} \quad C_1 = X_1 H$$

$$dx_2 = \frac{-V_0}{H - V_0 t} x_2 dt \Rightarrow x_2 = C_2 (H - V_0 t) \quad \text{avec} \quad C_2 = \frac{X_2}{H}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{X_1 H}{H - V_0 t} \\ x_2 = \frac{X_2}{H} (H - V_0 t) \end{cases}$$

$$(H - V_0 t) = \frac{x_2 H}{X_2} \Rightarrow x_1 = \frac{X_1 H}{H - V_0 t} = X_1 H \frac{X_2}{x_2 H} = \frac{X_1 X_2}{x_2}$$

```
close all;figure;hold on;
H=1;L=2; %dimensions initiales
line([-L L;-L L; L L; -L -L],[H H; 0 0; 0 H; 0 H], 'color', 'r'); % section
initiale
x2fin=0.6; %hauteur finale
X2=H;%position initiale des points dont on trace la trajectoire
for X1=[-L:0.1:L]
x2=[x2fin:0.1:H];
x1=X1*X2*(1./x2);
plot(x1,x2,'k--') % tracé des trajectoires
end
line([-L/x2fin L/x2fin; L/x2fin L/x2fin; L/x2fin -L/x2fin; -L/x2fin -
L/x2fin]...
,[x2fin x2fin; x2fin 0; 0 0; 0 x2fin],'color','b'); % section finale
axis equal;xlim([-2*L 2*L]);ylim([0 H])
```

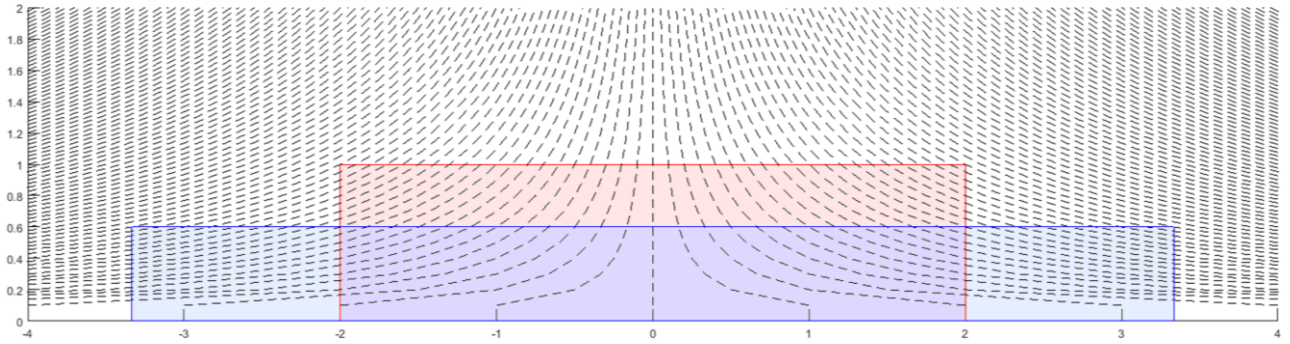


3) Donner l'équation des lignes de courant

$$\frac{dx_1}{v_1(x,t)} = \frac{dx_2}{v_2(x,t)}$$

$$\frac{\frac{dx_1}{V_0}}{\frac{H - V_0 t}{H - V_0 t} x_1} = \frac{\frac{dx_2}{-V_0}}{\frac{H - V_0 t}{H - V_0 t} x_2} \Rightarrow \dots \Rightarrow x_1 x_2 = cste$$

```
close all;figure;hold on;
H=1;L=2; %dimensions initiales
line([-L L;-L L; L L; -L -L],[H H; 0 0; 0 H; 0 H], 'color', 'r'); % section
initiale
x2=[0:0.1:2*H];
for cste=-100:0.1:100 % valeurs de la constante pour différentes lignes de
courant
x1=cste./x2;
plot(x1,x2,'k--') % tracé des lignes
end
line([-L/x2fin L/x2fin; L/x2fin L/x2fin; L/x2fin -L/x2fin; -L/x2fin -
L/x2fin]...
,[x2fin x2fin; x2fin 0; 0 0; 0 x2fin],'color','b'); % section finale
axis equal;xlim([-2*L 2*L]);ylim([0 2*H])
```



4) Déterminer le champ de déplacements

$$\underline{u} = \underline{x}(\underline{X}, t) - \underline{X} = X_1 \left(\frac{H}{H - V_0 t} - 1 \right) \underline{e}_1 + X_2 \left(\frac{H - V_0 t}{H} - 1 \right) \underline{e}_2$$

5) Calculer le tenseur gradient de la transformation. Effectuer ce calcul en utilisant les différentes notations indicielles, matricielles et tensorielles. Vérifier que la transformation s'effectue à volume constant.

$$\underline{\underline{\text{Grad } u}} = \left(\frac{H}{H - V_0 t} - 1 \right) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \left(\frac{H - V_0 t}{H} - 1 \right) \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2$$

$$[\underline{\underline{F}}] = \begin{pmatrix} \frac{H}{H - V_0 t} & 0 \\ 0 & \frac{H - V_0 t}{H} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\Omega}{d\Omega_0} = J = \det[\underline{\underline{F}}] = 1$$

6) Comparer le tenseur des déformations de Green-Lagrange $\underline{\underline{E}}$ au tenseur des déformations linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$. A quelle condition sont-ils équivalents ?

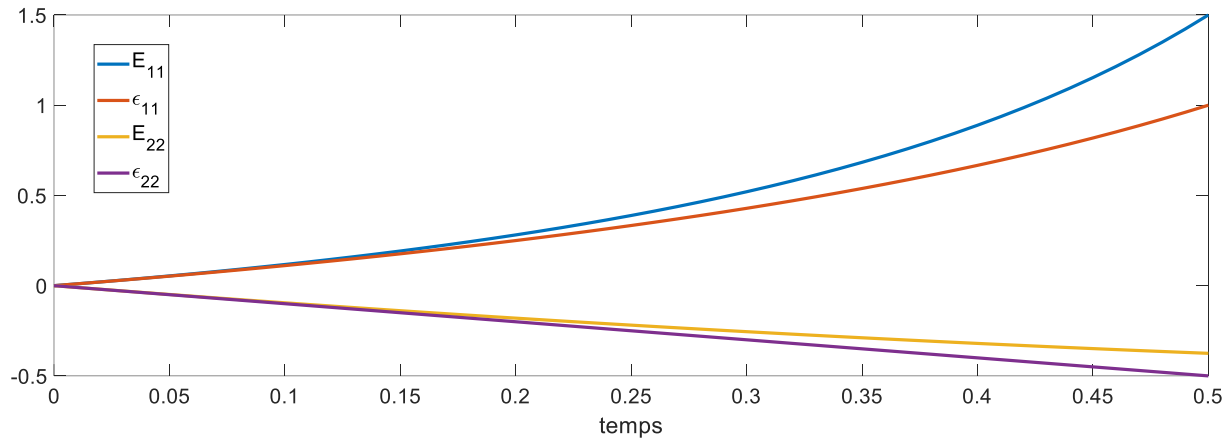
On va appeler α la quantité $\frac{H}{H - V_0 t}$.

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{I}) = \frac{1}{2} (\alpha^2 - 1) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha^2} - 1 \right) \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\text{Grad } u}} + (\underline{\underline{\text{Grad } u}})^T) = (\alpha - 1) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2$$

On observe que ces deux tenseurs sont donc différents. On peut en revanche avoir la

Pour les comparer on peut tenter de tracer leurs évolutions en cours de transformation (application numérique : $V = 1 \text{ m.s}^{-1}$ $0 < t < 0.5$ $H = 1$ $L = 2$)



On constate alors que $\epsilon_{11} \approx E_{11}$ et $\epsilon_{22} \approx E_{22}$, ce qui revient à dire que ces deux tenseurs sont équivalents sous l'hypothèse des petites perturbations.

7) Avant rupture, on fait l'hypothèse que le caoutchouc qui constitue le pneu peut être « étiré » de 20% ou « comprimé » de 40%. D'écrire la condition de rupture associée.

$$E_{11} = \frac{1}{2}(\alpha^2 - 1) < 0.2 \Rightarrow \alpha < \sqrt{1.4} \approx 1.18$$

$$E_{22} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2} - 1\right) > -0.4 \Rightarrow \alpha < \sqrt{\frac{1}{0.2}} \approx 2.23$$

On remarque donc que c'est la première condition qui sera atteinte la première : dans ce cas le pneu va rompre à cause d'un étirement trop important, pour la valeur :

$$\alpha = \sqrt{1.4} \approx 1.18$$