

Les bases de la Mécanique des Milieux Continus MMC

Cédric Laurent

Professeur des universités en biomécanique
cedric.laurent@univ-lorraine.fr

LORRAINE
INP Ensem

LEM3

UL UNIVERSITÉ
DE LORRAINE

CHAPITRE I

Quelques rappels de mécanique

CHAP I: Quelques rappels de mécanique

Positionnement dans l'espace

- Espace utilisé et propriétés
- Repérage des points

Quelques définitions:

- Référentiel $\mathcal{R}$: ensemble des points de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ animé du mouvement de corps rigide de l'observateur
- Repère: « matérialise » $\mathcal{R}$, il existe plusieurs repères pour un même référentiel (cylindrique, cartésien, ...)
- Objectivité: se dit d'une grandeur dont l'expression est invariante par changement de $\mathcal{R}$

Interlude mathématique

Espace utilisé:

- Dans tout ce cours: **espace vectoriel euclidien** orienté $\mathbb{R}^3$
- Les éléments de cet espace sont des **vecteurs**
 - Ils seront **soulignés une fois**: $\underline{x}$ et $\underline{y}$ par exemple
- Les notions qui seront représentées se généralisent à d'autres espaces plus complexes → hors du cadre de ce cours
- Espace muni du **produit scalaire**:

$$(\alpha \underline{x}) \cdot \underline{y} = \alpha (\underline{x} \cdot \underline{y})$$

$$(\underline{x} + \underline{y}) \cdot \underline{z} = \underline{x} \cdot \underline{z} + \underline{y} \cdot \underline{z}$$

$$\|\underline{x}\| > 0 \Rightarrow \underline{x} \cdot \underline{x} > 0 \quad ; \quad \underline{x} \cdot \underline{x} = 0 \Rightarrow \underline{x} = \underline{0}$$

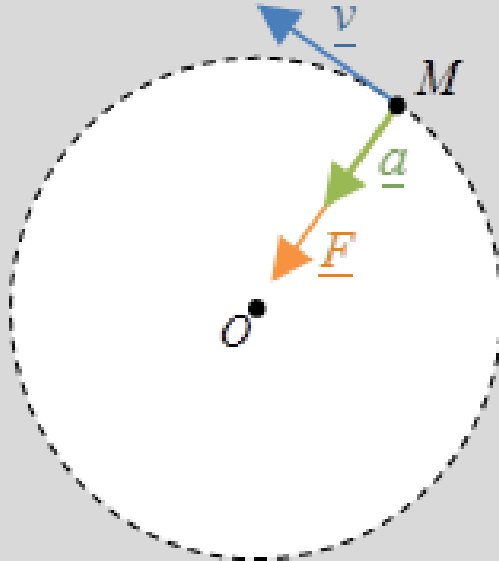
$$\underline{x} \cdot \underline{y} = \|\underline{x}\| \|\underline{y}\| \cos \theta(\underline{x}, \underline{y})$$

$$\|\underline{x}\| = (\underline{x} \cdot \underline{x})^{1/2}$$



Interlude mathématique

Isomorphisme d'espaces vectoriels:



$\underline{a}$: Accélération

$\underline{OM}$: Distance

$\underline{v}$: Vitesse

$\underline{F}$: Force

- espaces vectoriels de natures différentes
- Même espace géométrique, mêmes règles de calcul
→ **isomorphisme** d'espaces vectoriels



CHAP I: Quelques rappels de mécanique

Positionnement dans l'espace

- Espace utilisé et propriétés
- Repérage des points

- L'**observateur** (ou référentiel) est muni d'un **repère orthonormé direct** R
- Repère caractérisé par un point d'origine et trois vecteurs formant une **base orthonormée directe**, i.e. :

$$\begin{aligned} \text{si } i \neq j \text{ alors } \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j &= 0 \\ \text{si } i = j \text{ alors } \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j &= 1 \end{aligned}$$

- Dans ce repère, un vecteur $\underline{x}$ peut être repéré par ses **composantes**:

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \underline{e}_i = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3$$

- Un point quelconque M peut être repéré par ses **coordonnées**, qui sont les composantes du vecteur $\underline{OM}$ dans ce repère:

$$\underline{OM} = \sum_{i=1}^3 x_i \underline{e}_i$$

Conventions d'Einstein

- L'espace est $\mathbb{R}^3$
 - les indices de coordonnées varient toujours de 1 à 3
 - le signe $\sum_{i=1}^3$ est inutile!!
- convention de sommation sur les indices répétés
(=**convention d'Einstein**) : si un indice apparaît **deux fois** dans la même expression, il prend systématiquement les valeurs 1, 2 et 3
- Exemple:

$$a_i b_{ij} c_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i b_{ij} c_j = a_1 b_{11} c_1 + a_1 b_{12} c_2 + a_1 b_{13} c_3 + a_2 b_{21} c_1 + \dots + a_3 b_{33} c_3$$

Conventions d'Einstein

- indice répété = indice **muet**, il peut changer de nom
- exemple : **position** du point $\underline{OM} = x_i \underline{e}_i = x_k \underline{e}_k = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3$

- exemple : **produit scalaire**
$$\underline{x} \cdot \underline{y} = (x_i \underline{e}_i) \cdot (y_j \underline{e}_j)$$
$$= x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

- exemple : **norme** d'un vecteur

$$\|\underline{x}\|^2 = \underline{x} \cdot \underline{x} = x_i \underline{e}_i \cdot x_j \underline{e}_j = x_i x_i = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

- Un vecteur $\underline{x}$ possède trois composantes scalaires x_1, x_2, x_3
- Ces **composantes changent** avec un changement de base, contrairement au **vecteur** qui est **intrinsèque**
- On emploiera les notations:

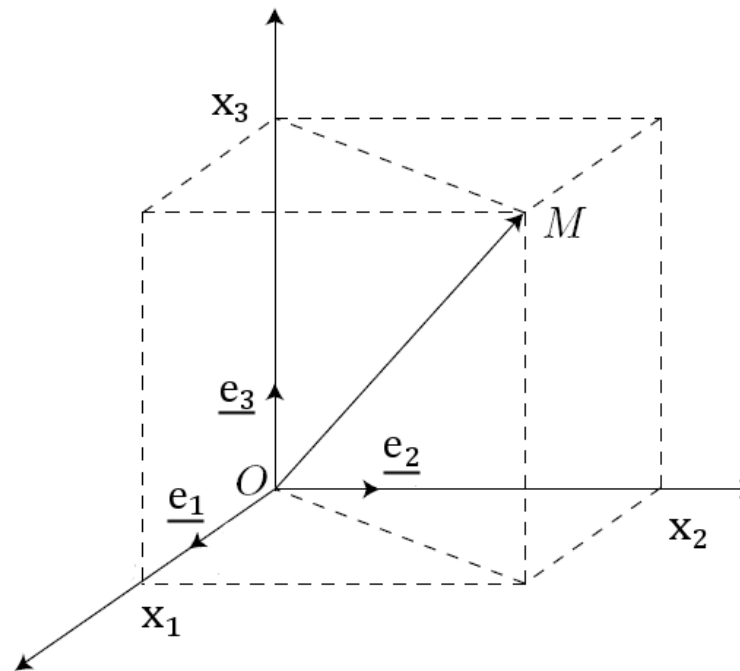
$\underline{x}$: **vecteur** (intrinsèque)

x_i : **composantes** du vecteur selon la direction $\underline{e}_i$

$[\underline{x}]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$: **vecteur-colonne** contenant les composantes de $\underline{x}$ dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$

Coordonnées cartésiennes

- Position du point M : $\underline{OM} = \underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3 = x_i \underline{e}_i$
- Vecteur quelconque $\underline{a}$ dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$: $\underline{a} = a_i \underline{e}_i$



Coordonnées cylindriques

- Position du point M : $\underline{OM} = \underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3$
 $= r \cos \theta \underline{e}_1 + r \sin \theta \underline{e}_2 + z \underline{e}_3$
- Vecteur quelconque $\underline{a}$ dans la base $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$: $\underline{a} = a_r \underline{e}_r + a_\theta \underline{e}_\theta + a_z \underline{e}_z$

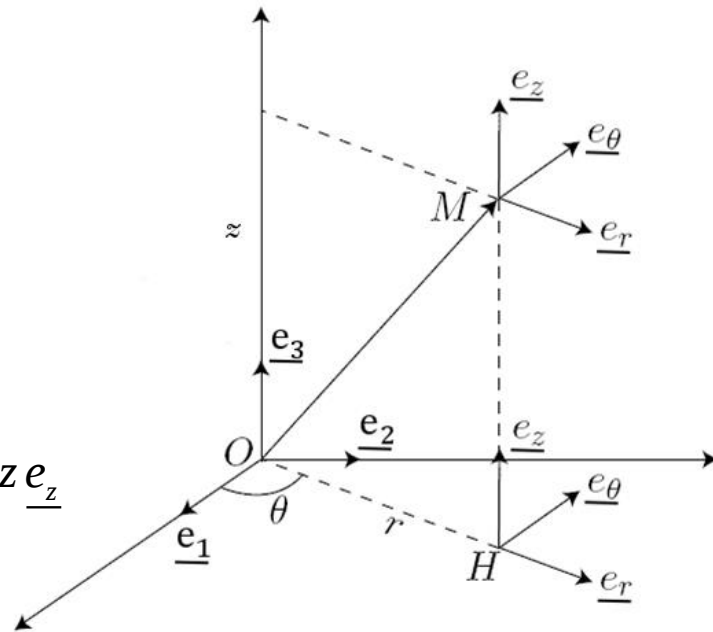
- Base locale en un point :

$$\underline{e}_r = \cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2$$

$$\underline{e}_\theta = -\sin \theta \underline{e}_1 + \cos \theta \underline{e}_2$$

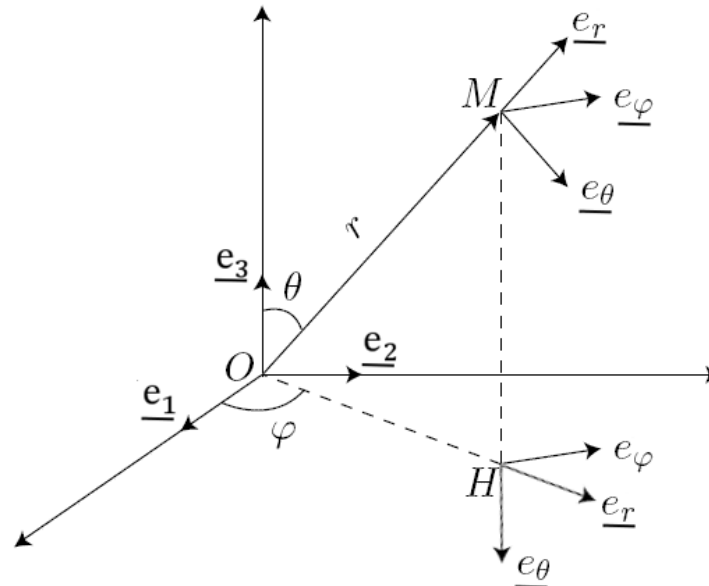
$$\underline{e}_z = \underline{e}_3$$

→ Position du point M : $\underline{OM} = r \underline{e}_r + z \underline{e}_z$



Coordonnées sphériques

- Position du point M : $\underline{OM} = \underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3$
 $= r \sin \theta \cos \varphi \underline{e}_1 + r \sin \theta \sin \varphi \underline{e}_2 + r \cos \theta \underline{e}_3$
 $= r \underline{e}_r$
- Vecteur quelconque $\underline{a}$ dans la base $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_\varphi)$: $\underline{a} = a_r \underline{e}_r + a_\theta \underline{e}_\theta + a_\varphi \underline{e}_\varphi$



CHAP I: Quelques rappels de mécanique

Mécanique du point matériel

- Bagage mathématique : calcul différentiel
- Cinématique du point
- Principes fondamentaux

Dérivées partielles

- f est une fonction de plusieurs variables :

$$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- « Dérivée partielle première par rapport à x_j » :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_j - h, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h}$$

(si cette limite existe... $\rightarrow$ pas toujours dérivable)

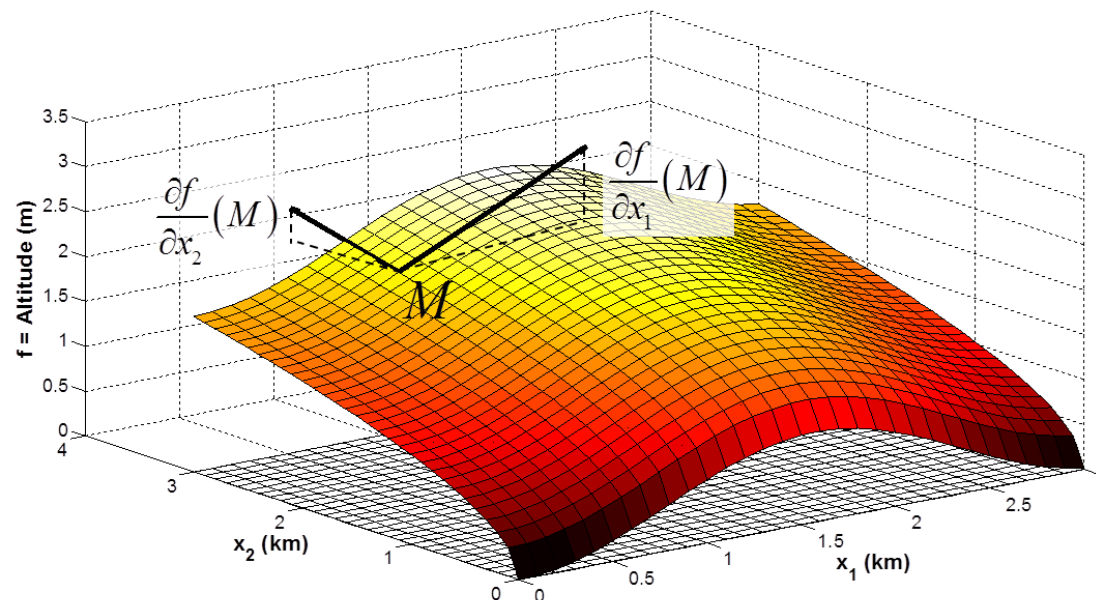
- On la note : $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$

Dérivées partielles

- Physiquement ?

→ Imaginons que f donne l'altitude en fonction de x_1, x_2

→ Dérivées partielles = variations d'altitude (pente)



Dérivées partielles

- Position d'un point voisin de M ?

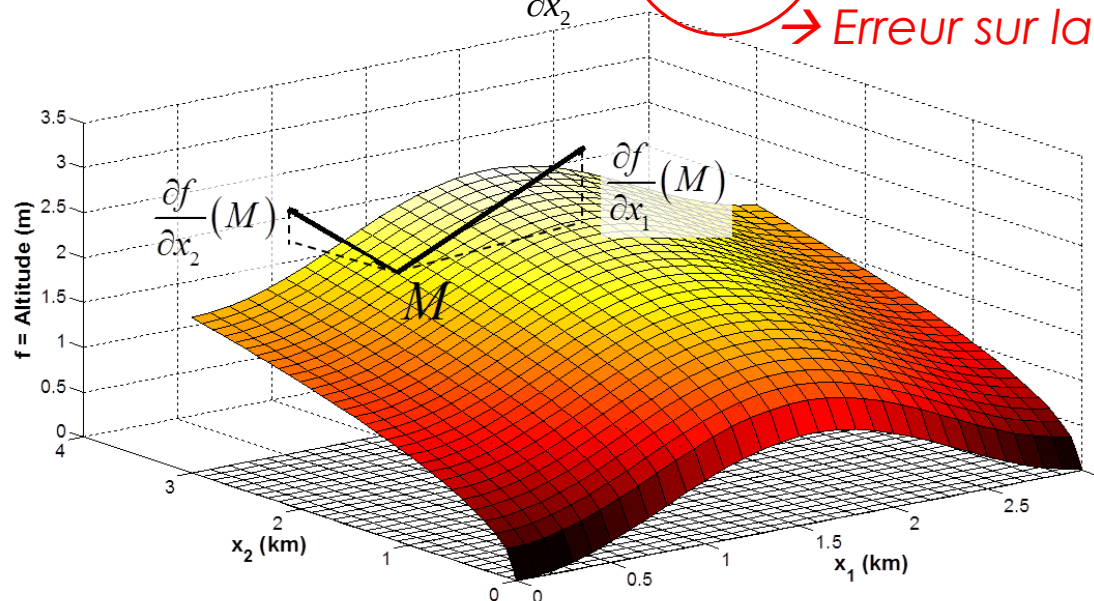
→ On estime que la fonction est *linéaire* autour de M

$$f(x_1 + h_1, x_2) = f(x_1, x_2) + h_1 \cdot \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \|h\| \varepsilon(h)$$

$$f(x_1, x_2 + h_2) = f(x_1, x_2) + h_2 \cdot \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} + \|h\| \varepsilon(h)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$

→ Erreur sur la linéarité



Dérivées partielles

- Dérivées partielles d'ordre supérieur

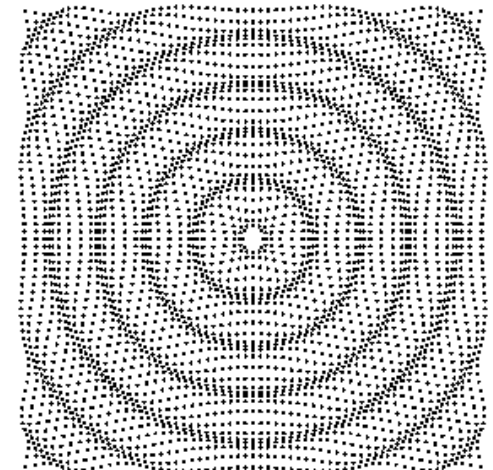
$$\frac{\partial^p f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i^p} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^{p-1} f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i^{p-1}} \right) = \dots$$

- Exemple** : équation de la propagation (cordes vibrantes)

Fonction d'onde $u(x_1, x_2, x_3, t)$

Vitesse de propagation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$



Différentielle

- f est une fonction différentiable

→ Il existe $df(h)$ et $\varepsilon(h)$ telles que quelque soit h

$$f(M+h) = f(M) + df(h) + \|h\| \varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

- Equation écrite précédemment : $f(x_1 + h_1, x_2) = f(x_1, x_2) + h_1 \cdot \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \|h\| \varepsilon(h)$

→ on fait le lien :

$$df(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} h_i$$



Variation de $df(h)$ pour variation *infinitésimale* de h = **différentielle**

Différentielle

- f est une fonction **d'une seule** variable

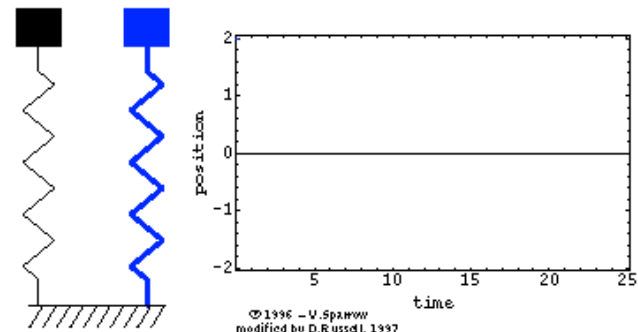
→ On reprend l'équation précédente :
$$df(h) = \sum_{i=1}^1 \frac{\partial f(x)}{\partial x} h = \frac{\partial f(x)}{\partial x} h$$

→ On note dx la variation h : $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx$ $\Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}$

→ Les deux notations sont équivalentes dans ce cas

- **Exemple** : oscillation simple non amortie

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad \text{avec} \quad \omega \in \mathbb{R}^+$$



Différentielle

- f est une fonction de variables qui dépendent du **temps**

$$f = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

- On se trouve dans le cas de dériver une **fonction composée**

$$df(dt) = d(f \circ x_i)(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \times \frac{dx_i}{dt} \right) dt = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \times \frac{dx_i}{dt} \right) dt$$

- La dérivée totale de f par rapport au temps devient donc :

$$\begin{aligned} \frac{df(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} \end{aligned}$$

CHAP I: Quelques rappels de mécanique

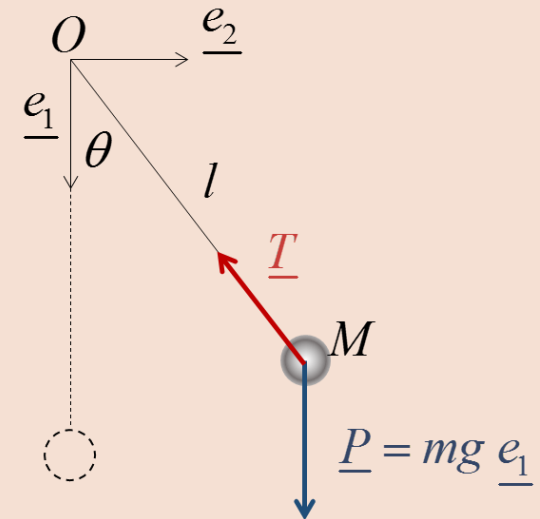
Mécanique du point matériel

- Bagage mathématique : calcul différentiel
- Cinématique du point
- Principes fondamentaux

Exemple

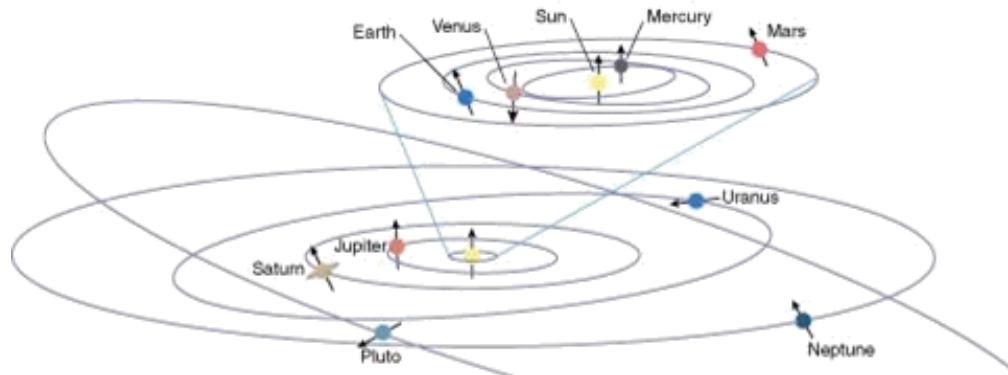
Mouvement du pendule

- Pendule de masse m
- Longueur du fil l
- Deux efforts : pesanteur $\underline{P} = m\underline{g}$ et tension $\underline{T}$
- Deux systèmes de coordonnées possibles:
 - Cartésien $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ ou cylindrique $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$
- Comment écrire proprement :
 - La position, la vitesse l'accélération ?
 - La quantité de mouvement et le moment cinétique ?
 - L'équation qui régit les oscillations du pendule ?



Le point matériel

- **Hypothèse** : Point doté d'une masse m
 - abstraction de la forme de l'objet
 - abstraction de la répartition de la masse
 - hypothèse valide si :
 - le solide est petit devant son mouvement
 - on ne s'intéresse qu'au centre de masse sans se soucier des rotations (e.g. : ballon)



Vecteur position

Avec les notations précédentes

→ repère cartésien : $\underline{OM} = \underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3 = x_i \underline{e}_i$

→ repère cylindrique : $\underline{OM} = r \underline{e}_r + z \underline{e}_z$

→ repère sphérique : $\underline{OM} = r \underline{e}_r$

Vecteur vitesse = variation du vecteur position dans le temps

→ repère cartésien (fixe) : $\underline{v} = \underline{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \frac{d(\underline{OM})}{dt} = \frac{d(x_i \underline{e}_i)}{dt} = \frac{d(x_i)}{dt} \underline{e}_i = \dot{x}_i \underline{e}_i$

→ repère cylindrique (mobile) : $\underline{v} = \frac{d(\underline{OM})}{dt} = \frac{d(r \underline{e}_r + z \underline{e}_z)}{dt} = \frac{dr}{dt} \underline{e}_r + r \frac{d\underline{e}_r}{dt} + \frac{dz}{dt} \underline{e}_z + z \frac{d\underline{e}_z}{dt}$

$$= \dot{r} \underline{e}_r + r \frac{d\underline{e}_r}{dt} + \dot{z} \underline{e}_z$$

$$\underline{e}_r = \cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2 \Rightarrow \frac{d\underline{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \underline{e}_\theta \Rightarrow \underline{v} = \underline{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \frac{d(\underline{OM})}{dt} = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\theta} \underline{e}_\theta + \dot{z} \underline{e}_z$$

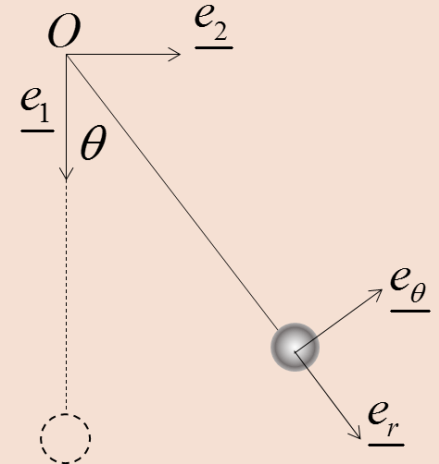
Exemple

Vitesse du pendule

- Relations entre les deux bases : $\underline{e}_r = \cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2$
 $\underline{e}_\theta = -\sin \theta \underline{e}_1 + \cos \theta \underline{e}_2$
 $\underline{e}_z = \underline{e}_3$
- Repère cartésien :

$$\underline{x} = \underline{OM} = l \cos \theta \underline{e}_1 + l \sin \theta \underline{e}_2$$

$$\underline{v} = \frac{d(\underline{OM})}{dt} = \frac{d(x_i)}{dt} \underline{e}_i = \frac{d(l \cos \theta)}{dt} \underline{e}_1 + \frac{d(l \sin \theta)}{dt} \underline{e}_2 = -l \dot{\theta} \sin \theta \underline{e}_1 + l \dot{\theta} \cos \theta \underline{e}_2$$



$$\underline{v} = l \dot{\theta} \underline{e}_\theta$$

= même résultat (ouf !)

- Repère cylindrique :

$$\underline{x} = \underline{OM} = l \underline{e}_r$$

$$\underline{v} = \frac{d(\underline{OM})}{dt} = \cancel{\frac{dl}{dt} \underline{e}_r} + l \frac{d\underline{e}_r}{dt} = l \left(\frac{d \cos \theta}{dt} \underline{e}_1 + \frac{d \sin \theta}{dt} \underline{e}_2 \right) = \dot{\theta} l \overbrace{(-\sin \theta \underline{e}_1 + \cos \theta \underline{e}_2)}^{\underline{e}_\theta} = \dot{\theta} l \underline{e}_\theta$$

Vecteur accélération = variation du vecteur vitesse dans le temps

→ même démarche que précédemment : le repère est mobile !

→ repère cartésien (fixe) : $\underline{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \frac{d\underline{v}(M)_{/\mathcal{R}}}{dt} = \frac{d^2 \underline{OM}}{dt^2} = \dot{v}_i \underline{e}_i = \ddot{x}_i \underline{e}_i$

→ repère cylindrique (mobile) : $\underline{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \right) \underline{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \right) \underline{e}_\theta + \ddot{z} \underline{e}_z$

→ repère sphérique (moins drôle ☹) :

$$\begin{aligned} \underline{a}(M)_{/\mathcal{R}} = & \left(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right) \underline{e}_r \\ & + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \right) \underline{e}_\theta \\ & + \left(r \ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta \right) \underline{e}_\varphi \end{aligned}$$

Exemple

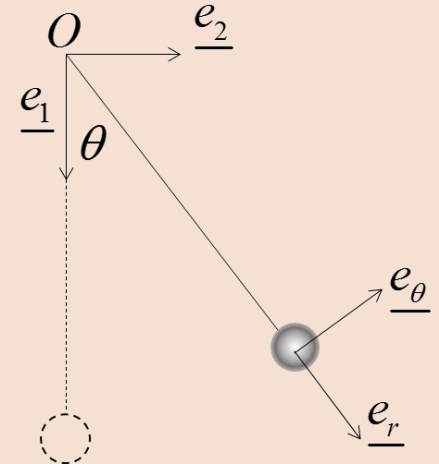
Accélération du pendule

- Repère cartésien :

$$\underline{v} = -l \dot{\theta} \sin \theta \underline{e}_1 + l \dot{\theta} \cos \theta \underline{e}_2$$

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \left(-l \ddot{\theta} \sin \theta - l \dot{\theta}^2 \cos \theta \right) \underline{e}_1 + \left(l \ddot{\theta} \cos \theta - l \dot{\theta}^2 \sin \theta \right) \underline{e}_2$$

$$= l \ddot{\theta} \underbrace{(\cos \theta \underline{e}_2 - \sin \theta \underline{e}_1)}_{\underline{e}_\theta} - l \dot{\theta}^2 \underbrace{(\cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2)}_{\underline{e}_r}$$



$$\underline{a} = l \ddot{\theta} \underline{e}_\theta - l \dot{\theta}^2 \underline{e}_r$$

= même résultat (ouf !)

- Repère cylindrique : $\underline{v} = \dot{\theta} l \underline{e}_\theta$

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = l \frac{d(\dot{\theta} \underline{e}_\theta)}{dt} = l \ddot{\theta} \underline{e}_\theta + l \dot{\theta} \frac{d\underline{e}_\theta}{dt}$$

$$= l \ddot{\theta} \underline{e}_\theta - l \dot{\theta}^2 \underbrace{\overbrace{(\cos \theta \underline{e}_1 + \sin \theta \underline{e}_2)}^{\underline{e}_r}}_{\underline{e}_r} = l \ddot{\theta} \underline{e}_\theta - l \dot{\theta}^2 \underline{e}_r$$

CHAP I: Quelques rappels de mécanique

Mécanique du point matériel

- Bagage mathématique : calcul différentiel
- Cinématique du point
- Principes fondamentaux

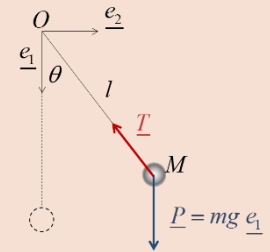
- Définition : *quantité de mouvement* (en kg.m.s^{-1}) : $\underline{p} = m\underline{v}$

Exemple

Quantité d'accélération du pendule

$$\underline{v} = \dot{\theta} l \overbrace{(-\sin \theta \underline{e}_1 + \cos \theta \underline{e}_2)}^{\underline{e}_\theta} = \dot{\theta} l \underline{e}_\theta$$

$$\underline{p} = m\underline{v} = \boxed{ml \dot{\theta} \underline{e}_\theta} = \boxed{ml \dot{\theta} (\cos \theta \underline{e}_2 - \sin \theta \underline{e}_1)}$$



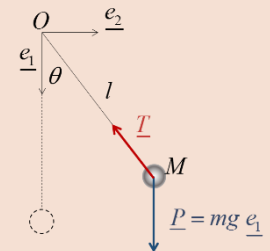
- Définition : *moment cinétique* (en $\text{kg.m}^2.\text{s}^{-1}$) : $\underline{L}_0 = \underline{OM} \wedge m\underline{v}$

Exemple

Moment cinétique du pendule

$$\underline{L}_0 = \underline{OM} \wedge m\underline{v} = \underline{e}_r \wedge ml \dot{\theta} \underline{e}_\theta = ml^2 \dot{\theta} \underline{e}_z$$

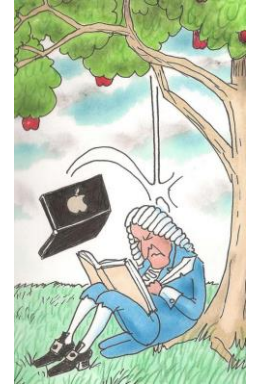
$$\underline{L}_0 = (l \cos \theta \underline{e}_1 + l \sin \theta \underline{e}_2) \wedge ml \dot{\theta} (\cos \theta \underline{e}_2 - \sin \theta \underline{e}_1) = ml^2 \dot{\theta} \underbrace{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}_{=1} \underline{e}_3 = ml^2 \dot{\theta} \underline{e}_3$$



Principe fondamental de la dynamique (PFD)

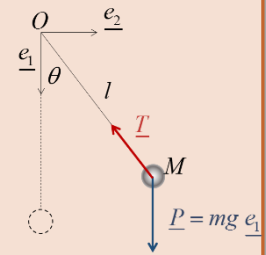
$$\frac{d \underline{p}}{dt} = \frac{d(m \underline{v})}{dt} = m \frac{d \underline{v}}{dt} = m \underline{a} = \sum \underline{F}^{ext}$$

Exemple



PFD pour le pendule

$$\left. \begin{aligned} \frac{d \underline{p}}{dt} &= m \underline{a} = ml \left(\ddot{\theta} \underline{e}_{\theta} - \dot{\theta}^2 \underline{e}_r \right) \\ \underline{T} &= -T \underline{e}_r \\ \underline{P} &= m \underline{g} = mg \left(\cos \theta \underline{e}_r - \sin \theta \underline{e}_{\theta} \right) \end{aligned} \right\} \frac{d \underline{p}}{dt} = \underline{T} + \underline{P} \Rightarrow \begin{cases} ml \ddot{\theta} = -mg \sin \theta & (1) \\ T = ml \dot{\theta}^2 + mg \cos \theta & (2) \end{cases}$$



- Equation (1) : équation du mouvement du pendule !

$$\Rightarrow l \ddot{\theta} = -g \sin \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

- Equation (2) : valeur de l'effort de tension dans le fil

- Définition : *moment (en O) d'une force $\underline{F}$ (en N.m):* $\mathfrak{M}_O(\underline{F}) = \underline{OM} \wedge \underline{F}$

Exemple

Moments des efforts

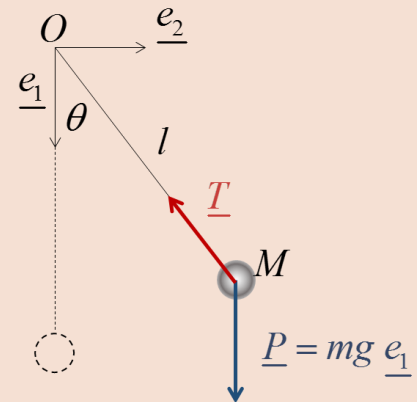
- Moment de l'effort de tension

$$\mathfrak{M}_O(\underline{T}) = \underline{OM} \wedge \underline{T} = l \underline{e}_r \wedge (-T \underline{e}_r) = \underline{0}$$

- Moment de l'effort de pesanteur

$$\mathfrak{M}_O(\underline{P}) = \underline{OM} \wedge \underline{P} = l \underline{e}_r \wedge mg (\cos \theta \underline{e}_r - \sin \theta \underline{e}_\theta) = -lmg \sin \theta \underline{e}_z$$

- Sans surprise : moment selon $\underline{e}_z$
- Sans surprise : dimension $m.kg.N.kg^{-1} = N.m$



Conservation du moment cinétique

- Dérivée du moment cinétique :
$$\frac{d\underline{L}_0}{dt} = \underbrace{\frac{d\underline{OM}}{dt} \wedge m\underline{v}}_0 + \underbrace{\underline{OM} \wedge \frac{d(m\underline{v})}{dt}}_{\sum \underline{F}^{ext}} = \underline{OM} \wedge \sum \underline{F}^{ext}$$

$$\frac{d\underline{L}_0}{dt} = \sum \mathfrak{M}_o(\underline{F}^{ext})$$

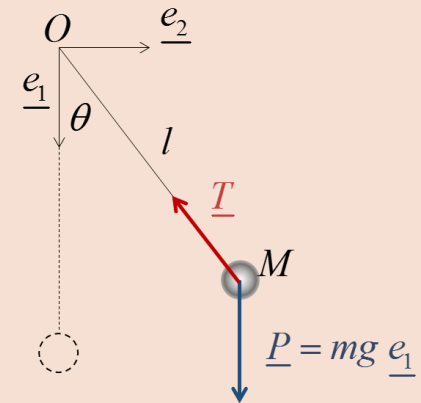
Exemple

- Moment cinétique : $\underline{L}_0 = ml^2 \dot{\theta} \underline{e}_z$
- Moments des efforts : $\mathfrak{M}_o(\underline{P}) = -lmg \sin \theta \underline{e}_z$
 $\mathfrak{M}_o(\underline{T}) = 0$

- Théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\underline{L}_0}{dt} = \sum \mathfrak{M}_o(\underline{F}^{ext}) \Rightarrow \frac{d\left(ml^2 \dot{\theta} \underline{e}_z\right)}{dt} = -lmg \sin \theta \underline{e}_z$$

- On arrive à nouveau à l'équation du mouvement : $l \ddot{\theta} = -g \sin \theta$



CHAP I: Quelques rappels de mécanique

Mécanique du solide indéformable

- Du système de points au solide indéformable
- Rotation du solide autour d'un axe fixe
- Cinématique du solide indéformable
- Dynamique du solide indéformable
- Cas particulier : problème de statique

Exemple

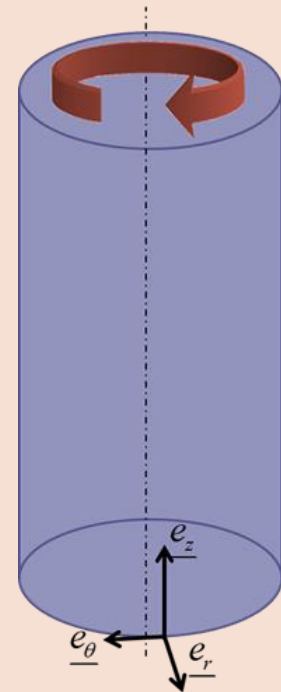
Solide en rotation

- Rotation autour de l'axe $(0, \underline{e}_z)$ en raison du couple (définition à venir) : $\underline{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \underline{e}_z$
- Dans ce cas, les vecteurs position et vitesse s'écrivent :

$$\underline{OM} = r \underline{e}_r + z \underline{e}_z$$

$$\underline{v} = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\theta} \underline{e}_\theta + \dot{z} \underline{e}_z$$

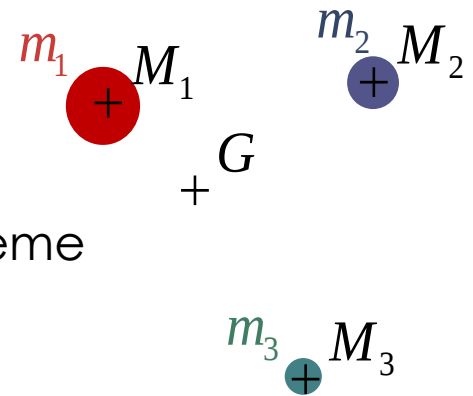
- Quelle est l'équation du mouvement ?
- Comment caractériser la rotation ?



Le système de points

- Définition : *centre de masse du système de N points*

$$\sum_{i=1}^N m^{(i)} \underline{GM}^{(i)} = \underline{0} \quad : \text{concentre la masse du système}$$



→ représentation du système de points par son centre de masse

- Définition : *grandeur extensive : proportionnelle à la quantité de matière*

→ masse :

$$m = \sum_{i=1}^N m^{(i)}$$

→ quantité de mouvement :

$$\underline{p} = \sum_{i=1}^N \underline{p}^{(i)} = \sum_{i=1}^N m^{(i)} \underline{v}^{(i)}$$

→ moment cinétique :

$$\underline{L}_0 = \sum_{i=1}^N \underline{L}_0^{(i)} = \sum_{i=1}^N \left(\underline{OM}^{(i)} \wedge m^{(i)} \underline{v}^{(i)} \right)$$

- Interactions entre les points = *efforts intérieurs*

Le système de points

- Le nœud i est soumis à l'effort :

$$\underline{F}^{(i)} = \underline{F}^{(ext \rightarrow i)} + \underline{F}^{(int \rightarrow i)} = \underline{F}^{(ext \rightarrow i)} + \sum_{j \neq i} \underline{F}^{(j \rightarrow i)} + G$$

- Somme des efforts qui s'exercent sur le système de points :

$$\underline{F} = \underline{F}^{ext} + \underline{F}^{int} = \sum_{i=1}^N \underline{F}^{(ext \rightarrow i)} + \sum_{i=1}^N \cancel{\underline{F}^{(int \rightarrow i)}}$$

- Loi des actions réciproques : la somme des efforts intérieurs s'annulent !

→ Conséquence : PFD et conservation du moment cinétique valides

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = \sum \underline{F}^{ext}$$

$$\frac{d\underline{L}_0}{dt} = \sum \mathfrak{M}_0(\underline{F}^{ext})$$

Cas particulier : le solide indéformable

- Nombre de points infini : somme → intégrales

$$M = \int_{\Omega} dm = \int_{\Omega} \rho d\Omega \quad \text{volume}$$

CHAP I: Quelques rappels de mécanique

Mécanique du solide indéformable

- Du système de points au solide indéformable
- Rotation du solide autour d'un axe fixe
- Cinématique du solide indéformable
- Dynamique du solide indéformable
- Cas particulier : problème de statique

Moment d'inertie d'un solide

- Définition du *moment cinétique* pour un solide :

$$\underline{L}_0 = \int_{\Omega} \underline{OM} \wedge \underline{v} \, dm$$

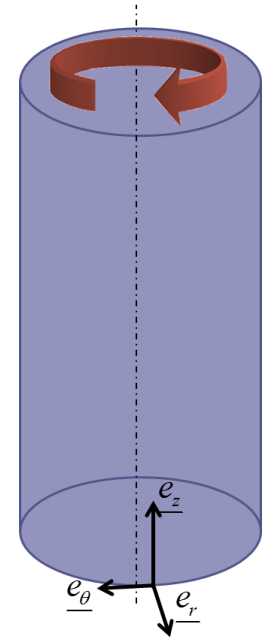
→ calculé au point O , sur l'axe de rotation

- Projection du vecteur *moment cinétique* sur l'axe ?

$$L_{0z} = \left(\int_{\Omega} \underline{OM} \wedge \underline{v} \, dm \right) \cdot \underline{e}_z$$

$$\begin{cases} \underline{OM} = r \underline{e}_r + z \underline{e}_z \\ \underline{v} = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\theta} \underline{e}_{\theta} + \dot{z} \underline{e}_z \end{cases} \quad \dots \Rightarrow \quad L_{0z} = \dot{\theta} \int_{\Omega} r^2 \, dm$$

- On introduit le moment d'inertie du solide $I_{0z} = \int_{\Omega} r^2 \, dm \Rightarrow L_{0z} = \dot{\theta} I_{0z}$



Moment d'inertie d'un solide



- Conservation du moment cinétique $L_{0z} = \dot{\theta} I_{0z} = cste$

Moment d'inertie d'un solide

- Moments d'inerties des solides simples : disponibles dans les tables

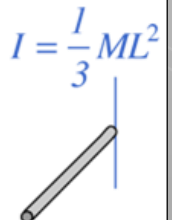
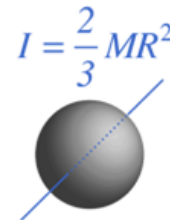
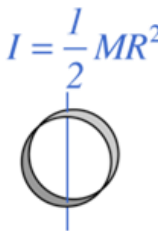
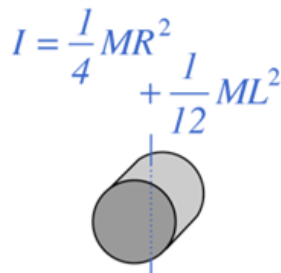
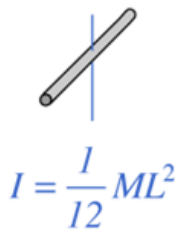
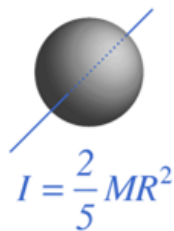
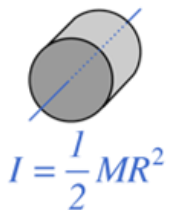
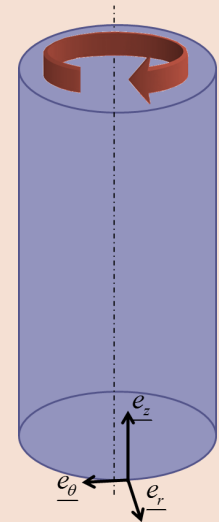
Exemple

Calcul du moment d'inertie

$$I_{0z} = \int_{\Omega} r^2 dm = \int_0^R \int_0^L \int_0^{2\pi} r^2 \rho dV = \int_0^R \int_0^L \int_0^{2\pi} r^3 \rho dr d\theta dz = \rho \int_0^R \int_0^L \int_0^{2\pi} r^3 dr d\theta dz$$

$$I_{0z} = \rho \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R [z]_0^L [\theta]_0^{2\pi} = \rho \frac{\pi L R^4}{2}$$

- Forme plus courante : $M = \rho \pi R^2 L \Rightarrow I_{0z} = \frac{MR^2}{2}$

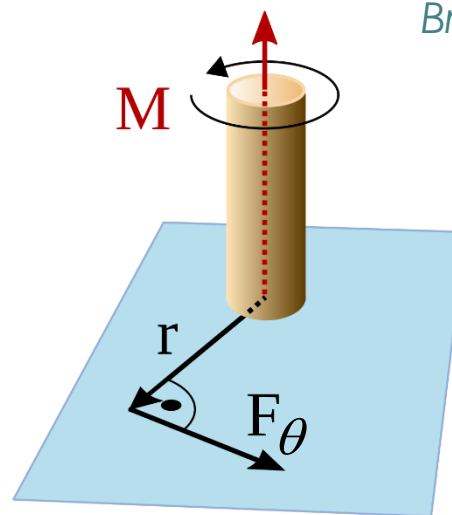


Moment d'une force par rapport à un axe

- Rappel : *moment (en O) d'une force $\underline{F}$ (en N.m): $\mathfrak{M}_O(\underline{F}) = \underline{OM} \wedge \underline{F}$*
- Définition : *moment d'une force par rapport à un axe*
 → *projection de ce moment sur l'axe !*

$$\begin{cases} \underline{OM} = r\underline{e}_r + z\underline{e}_z \\ \underline{F} = F_r\underline{e}_r + F_\theta\underline{e}_\theta + F_z\underline{e}_z \end{cases}$$

$$\dots \Rightarrow \mathfrak{M}_{Oz}(\underline{F}) = (\underline{OM} \wedge \underline{F}) \cdot \underline{e}_z = rF_\theta$$



Bras de levier

Composante de l'effort qui fait tourner le solide

Distribution des efforts

- Rappel : moment (en O) d'une force $\underline{F}$ (en N.m): $\underline{\mathcal{M}}_O(\underline{F}) = \underline{OM} \wedge \underline{F}$
- Moment de cet effort en n'importe quel point ?

→ relation de Chasles :

$$\underline{\mathcal{M}}_P(\underline{F}) = \underline{PM} \wedge \underline{F} = (\underline{PO} + \underline{OM}) \wedge \underline{F} = \underline{PO} \wedge \underline{F} + \underline{OM} \wedge \underline{F} = \underline{PO} \wedge \underline{F} + \underline{\mathcal{M}}_O(\underline{F})$$

- Conséquence : **distribution** des moments

$$\underline{\mathcal{M}}_P(\underline{F}) = \underline{\mathcal{M}}_O(\underline{F}) + \underline{PO} \wedge \underline{F}$$

→ vecteur résultante $\underline{F}$: 3 **ddl**, identique en tout point

→ vecteur moment $\underline{\mathcal{M}}(\underline{F})$: 3 **ddl**, différent en tout point

NB : On regroupe ces deux vecteurs en formant un « torseur »
(notion non utilisée dans ce cours)

Le couple mécanique

- Définition :

couple mécanique $\underline{\mathcal{C}}$ = ensemble d'efforts dont la **résultante** est **nulle** mais dont le **moment total** est **non nul**

- Conséquence : le couple ne dépend pas du point !! (démonstration : poly)



Couple d'efforts

$\neq$



Moment d'un effort

Théorème du moment cinétique

- Rappel : théorème du moment cinétique $\frac{d\underline{L}_0}{dt} = \sum \mathfrak{M}_o(\underline{F}^{ext})$
- Solide en rotation autour de $(0, \underline{e}_z)$ en raison de $\underline{F}$: $\frac{dL_{0z}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{\theta} I_{0z}) = rF_\theta$
- Généralisé à plusieurs efforts $\underline{F}^{ext(i)}$ associés aux bras de levier $d^{(i)}$:

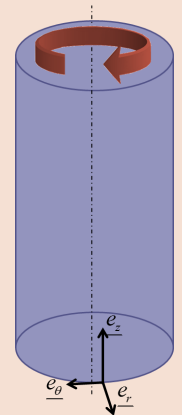
$$\ddot{\theta} I_{0z} = \sum_i d^{(i)} F_\theta^{(i)} = \sum_i \mathfrak{M}_{Oz}(\underline{F}^{(i)})$$

$\ddot{\theta} = \ddot{\Omega}$: accélération angulaire

Exemple

- On a calculé précédemment : $I_{0z} = \frac{MR^2}{2}$
- Cylindre uniquement soumis au couple : $\underline{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \underline{e}_z$
- Théorème du moment cinétique :

$$\ddot{\theta} I_{0z} = \ddot{\theta} \frac{MR^2}{2} = \sum_i \mathfrak{M}_{Oz}(\underline{F}^{(i)}) = \mathcal{C} \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = \frac{2\mathcal{C}}{MR^2}}$$

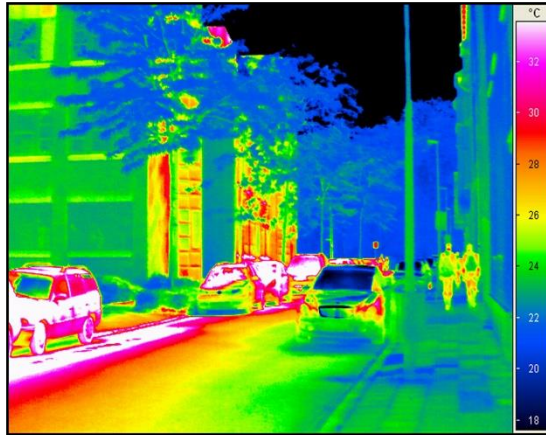


CHAP I: Quelques rappels de mécanique

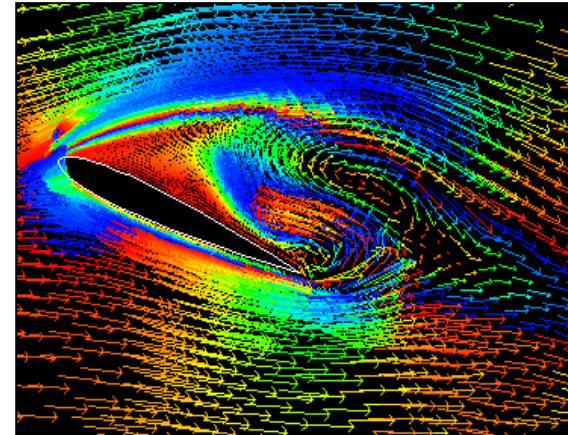
Mécanique du solide indéformable

- Du système de points au solide indéformable
- Rotation du solide autour d'un axe fixe
- Cinématique du solide indéformable
- Dynamique du solide indéformable
- Cas particulier : problème de statique

Notions de champs



Un champ scalaire:
champ de température



Un champ vectoriel:
champ de vitesse

- Champ de scalaire, champ de vecteurs :
→ à tout point de l'espace $\underline{x}$ est associé à scalaire / vecteur

- Les grandeurs précédentes sont des *champs* :
$$\underline{v} = \underline{v}(\underline{x})$$
$$\underline{a} = \underline{a}(\underline{x})$$

Distribution des vecteurs vitesse

Postulat (pas de démonstration) :

- On connaît le vecteur *rotation* d'un solide $\underline{\Omega}$
- On peut connaître la vitesse **en tout point** du solide :

$$\underline{v}(N) = \underline{v}(M) + \underline{NM} \wedge \underline{\Omega}$$

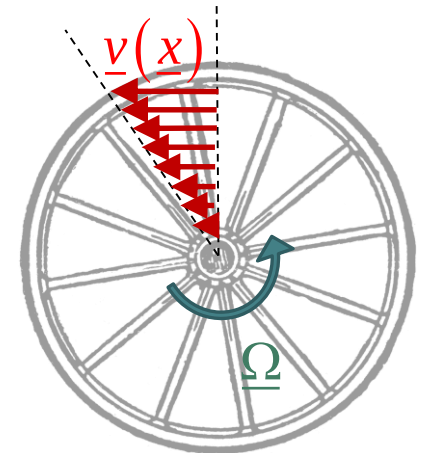
(ou « BABAR » $\underline{v}(B) = \underline{v}(A) + \underline{BA} \wedge \underline{R}$)

→ vecteur rotation $\underline{\Omega}$: 3 **ddl**, identique en tout point

→ vecteur vitesse $\underline{v}$: 3 **ddl**, différent en tout point

NB : On regroupe ces deux vecteurs en formant un « torseur » (notion non utilisée dans ce cours)

→ « rotation pure » : il existe au moins un point tel que $\underline{v}(M) = \underline{0}$



Exemple

Solide en rotation

- On a vu précédemment :

$$\underline{OM} = r\underline{e}_r + z\underline{e}_z$$

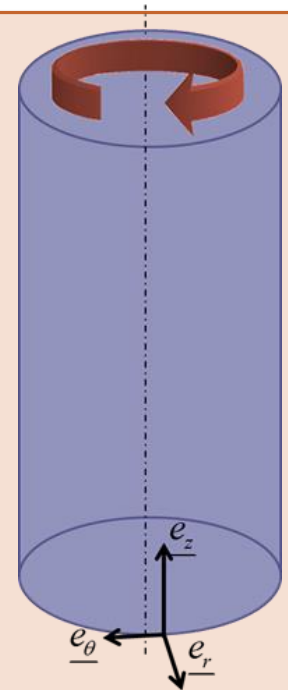
$$\underline{v} = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\theta}\underline{e}_\theta + \dot{z}\underline{e}_z$$

- Sur l'axe la vitesse est nulle : $\underline{v}(O) = \underline{0}$
- Vitesse en tout point :

$$\underline{v}(M) = \cancel{\underline{v}(O)} + \underline{MO} \wedge \underline{\Omega}$$

$$\begin{aligned} \underline{v}(M) &= (-r\underline{e}_r - z\underline{e}_z) \wedge (\Omega_r\underline{e}_r + \Omega_\theta\underline{e}_\theta + \Omega_z\underline{e}_z) \\ &= -r\Omega_\theta\underline{e}_z + r\Omega_z\underline{e}_\theta - z\Omega_r\underline{e}_\theta + z\Omega_\theta\underline{e}_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{■ Identification : } \begin{cases} \dot{r} = z\Omega_\theta \\ r\dot{\theta} = -z\Omega_r + r\Omega_z \\ \dot{z} = -r\Omega_\theta \end{cases} &\rightarrow \text{vraie } \forall z : \begin{cases} \Omega_\theta = 0 \\ \Omega_r = 0 \\ \Omega_z = \dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \underline{\Omega} = \dot{\theta}\underline{e}_z \end{aligned}$$

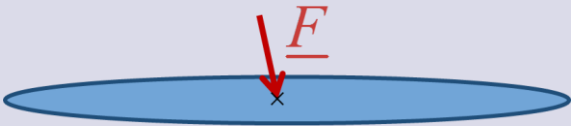
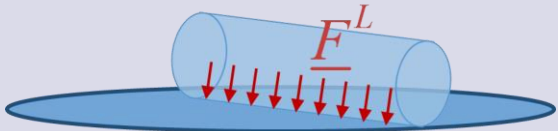
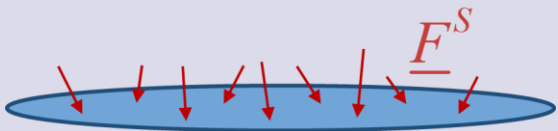
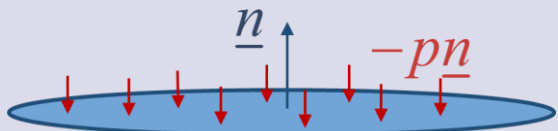
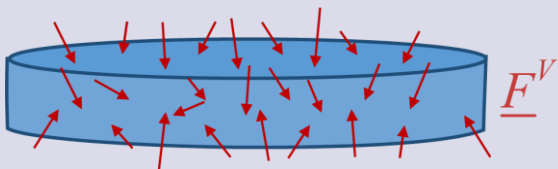


CHAP I: Quelques rappels de mécanique

Mécanique du solide indéformable

- Du système de points au solide indéformable
- Rotation du solide autour d'un axe fixe
- Cinématique du solide indéformable
- Dynamique du solide indéformable
- Cas particulier : problème de statique

Les différents efforts extérieurs

Effort ponctuel (N)	$\underline{F}$	
Effort linéique (N.m ⁻¹)	$\underline{F}^L$ tel que $\underline{F} = \int_L \underline{F}^L dl$	
Effort surfacique (N.m ⁻²)	$\underline{F}^S$ tel que $\underline{F} = \int_s \underline{F}^S dS$	
Pression (scalaire) (N.m ⁻²)	p tel que $\underline{F} = \int_s -p \underline{n} dS$ $\underline{n}$: normale sortante	
Effort volumique (N.m ⁻³)	$\underline{F}^V$ tel que $\underline{F} = \int_{\Omega} \underline{F}^V d\Omega$	

Principe fondamental de la dynamique

Combinaison de :

- la conservation de la quantité de mouvement au centre de masse
- la conservation du moment cinétique

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = \sum \underline{F}^{ext} \qquad \frac{d\underline{L}_0}{dt} = \sum \underline{\mathcal{M}}_o(\underline{F}^{ext})$$

NB : peut également être écrit sous forme de torseurs

CHAP I: Quelques rappels de mécanique

Mécanique du solide indéformable

- Du système de points au solide indéformable
- Rotation du solide autour d'un axe fixe
- Cinématique du solide indéformable
- Dynamique du solide indéformable
- Cas particulier : problème de statique

Principe fondamental de la statique

- lorsqu'il n'y a pas de mouvement

$$\sum \underline{F}^{ext} = \underline{0}$$

$$\sum \mathfrak{M}_o(\underline{F}^{ext}) = \underline{0}$$

NB : peut également être écrit sous forme de torseurs

Enoncé autrement :

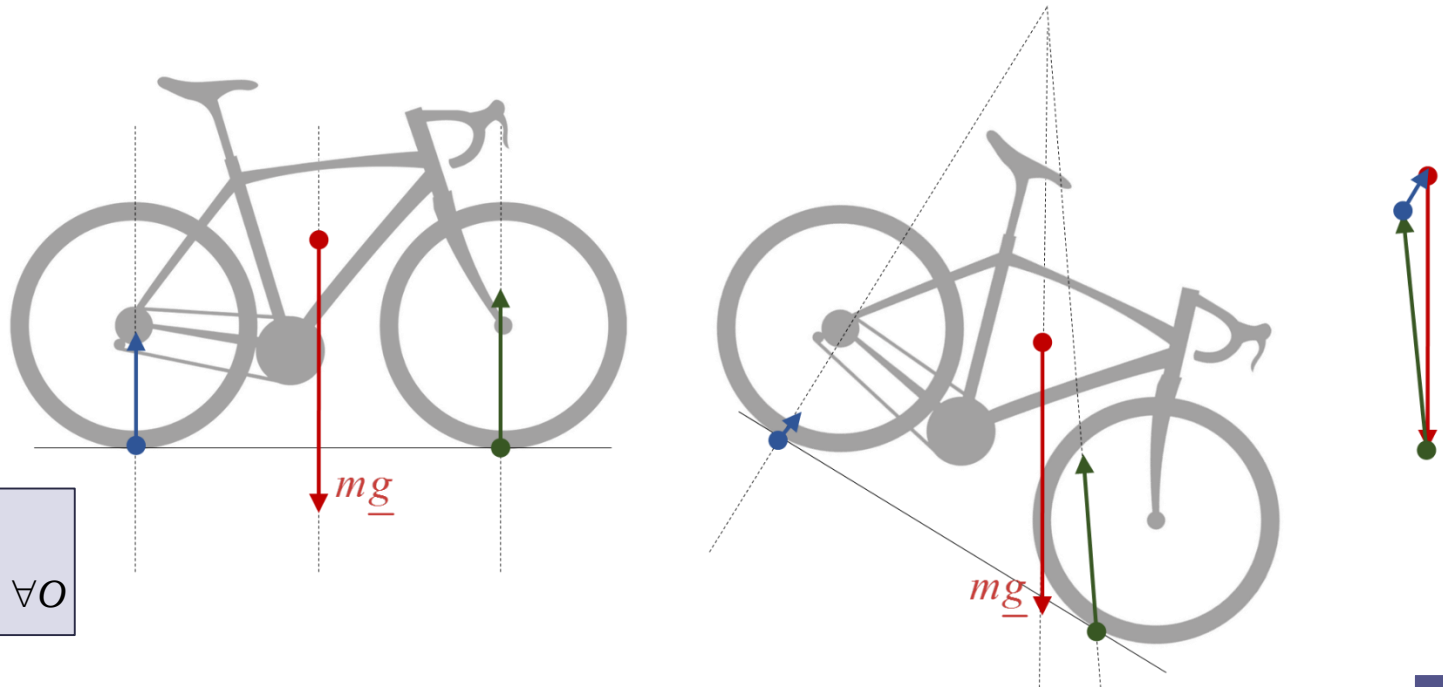
la somme des efforts et la somme des moments (quel qu'en soit le point d'application) qui s'appliquent à un solide indéformable à l'équilibre sont nulles.

Statique graphique

→ cas où le solide est soumis à **3 forces dans le même plan**

Deux règles:

- les trois efforts forment un triangle fermé
- les trois droites d'action des efforts sont parallèles **ou** concourantes



$$\begin{aligned} \underline{0} &= \sum \underline{F}^{ext} \\ \underline{0} &= \sum \underline{\mathcal{M}}_O(\underline{F}^{ext}) \quad \forall O \end{aligned}$$

CHAP I: Quelques rappels de mécanique

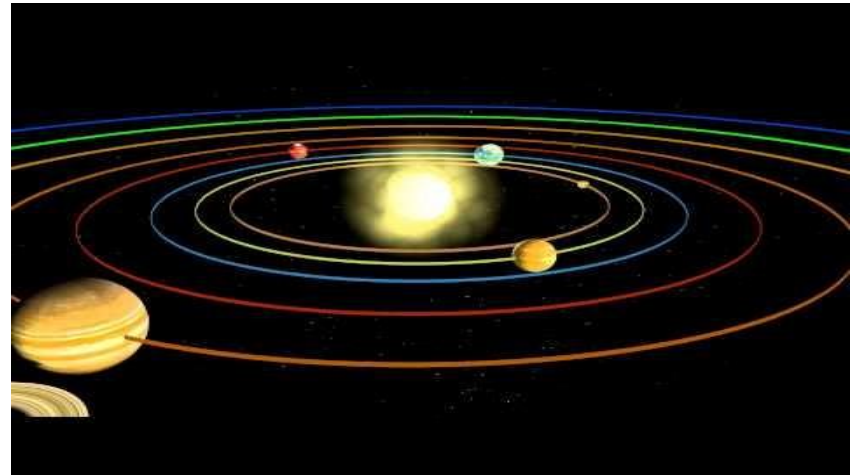
Présentation de la mécanique des milieux continus (MMC)

- positionnement
- échelle d'observation
- applications

■ Mécanique du point

= **Cinématique** et **dynamique** de masses **ponctuelles** soumises à des efforts

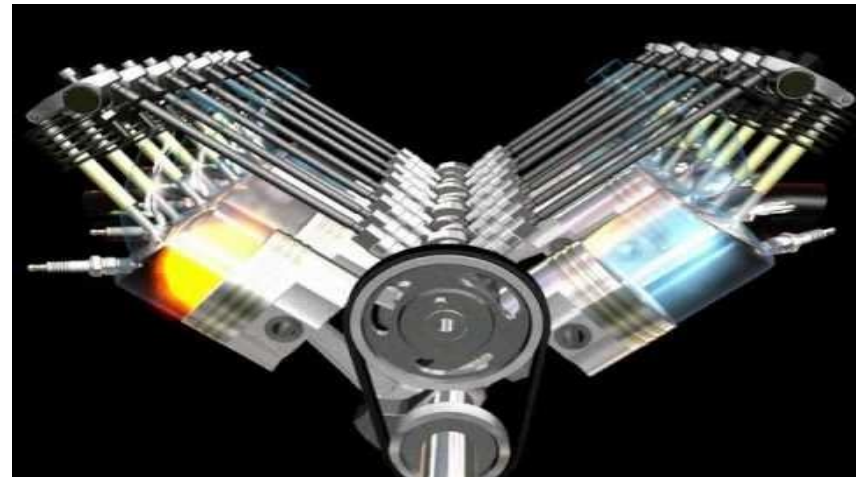
→ ex: planètes



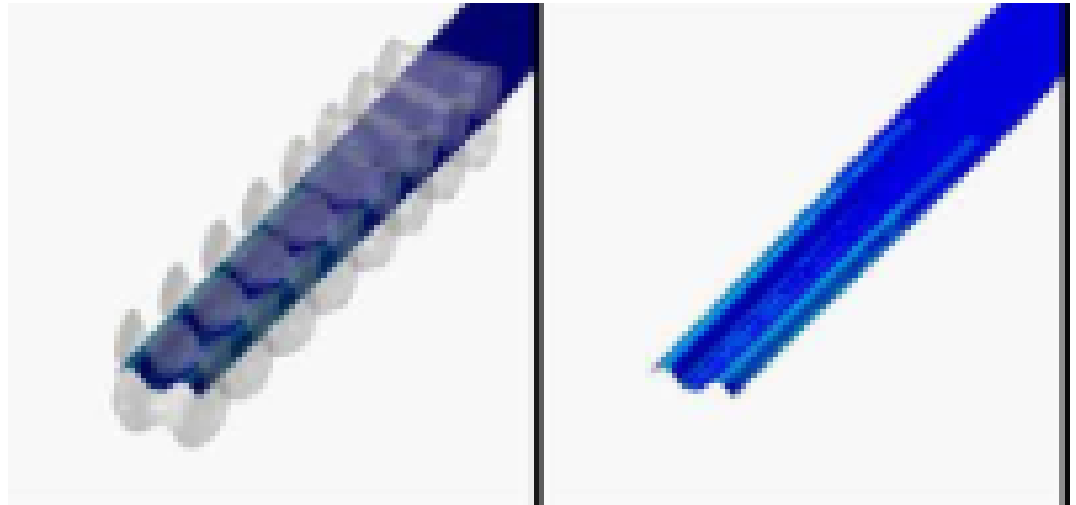
■ Mécanique du solide indéformable

= prise en compte de la géométrie des corps (distribution de la masse)

→ ex: cinématique des mécanismes



→ Comment étudier la **déformation** des solides en rapport à des efforts?



→ Comment étudier l'**écoulement** des fluides?



Présentation du cours

La MMC

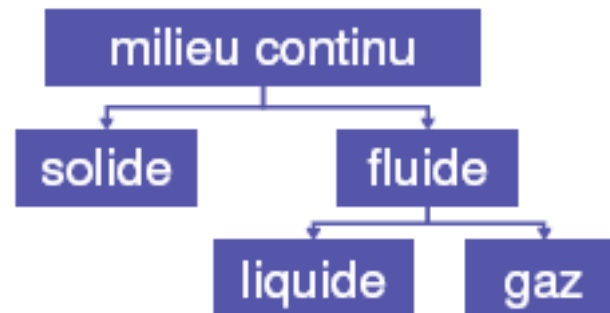
Qu'est-ce que c'est?

A quoi ça sert?

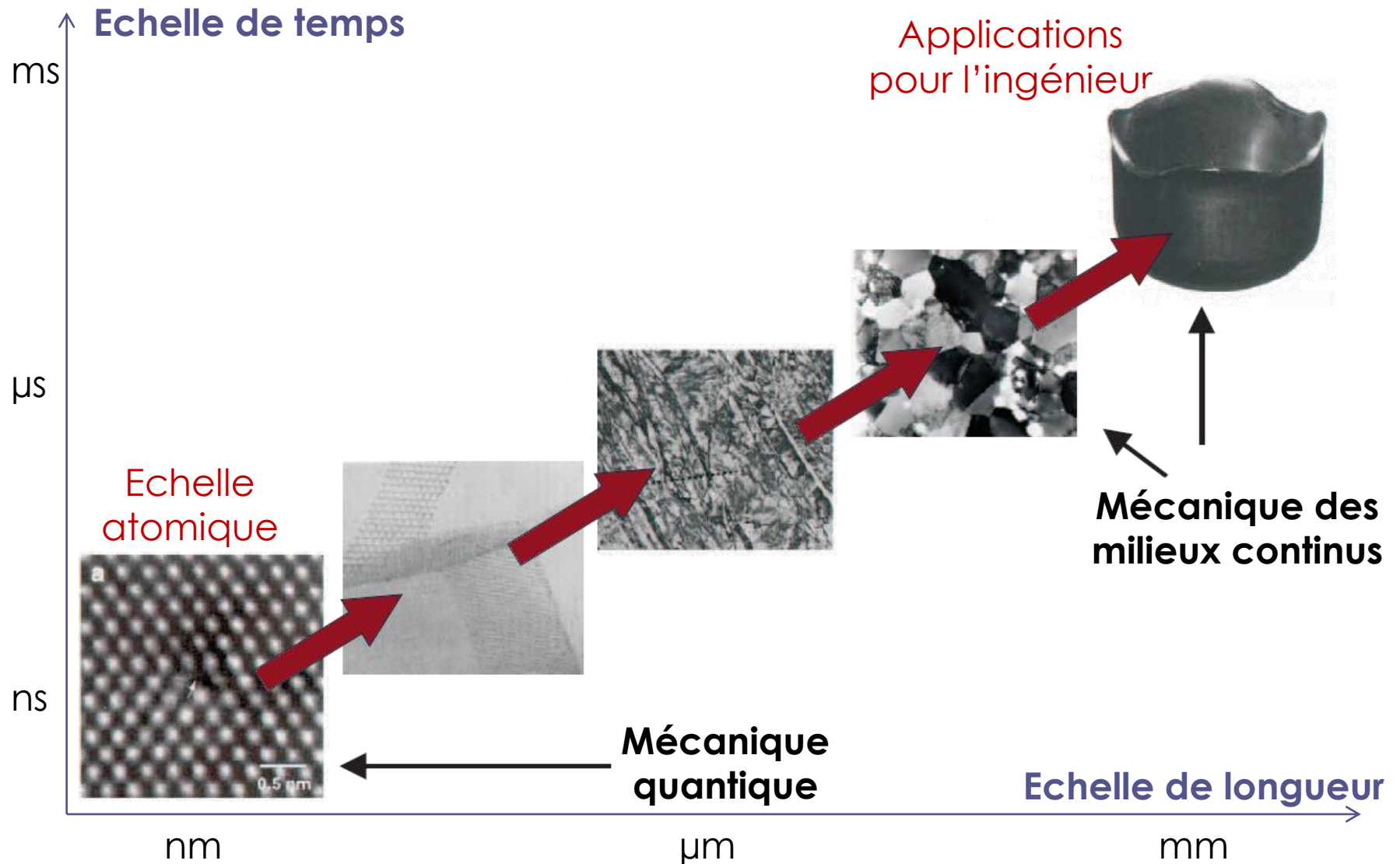
- positionnement
- échelle d'observation
- applications

Mécanique des milieux continus

- La matière est de nature **discrète**
- Milieu continu** = image de la réalité

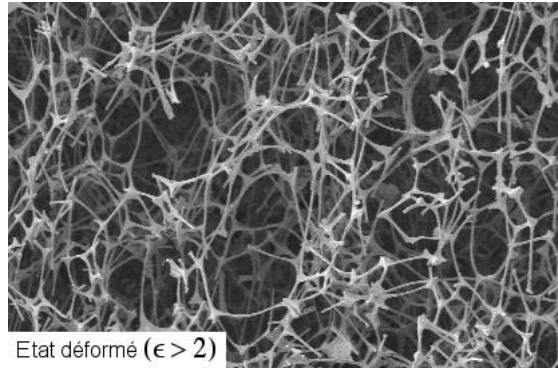
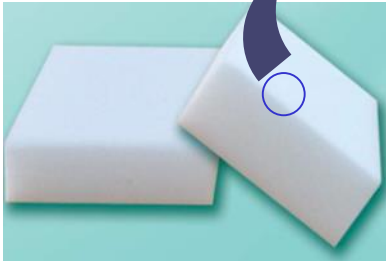


- La matière est considérée **continue** à l'échelle d'un volume élémentaire représentatif (**VER**)
- La taille du VER dépend du type de milieu considéré
- Les éléments constitutifs du milieu continu sont les **points matériels**
- Milieu **fluide** ou **solide**: distinction seulement au chapitre 6 et 7 !



Exemples de milieux étudiés

mousse de
mélamine

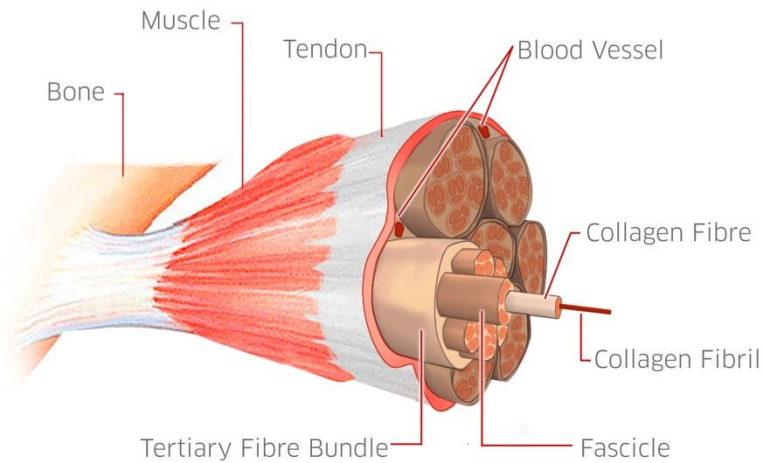


Etat déformé ($\epsilon > 2$)

250µm



section d'un tronc d'arbre



Structure hiérarchique d'un tendon

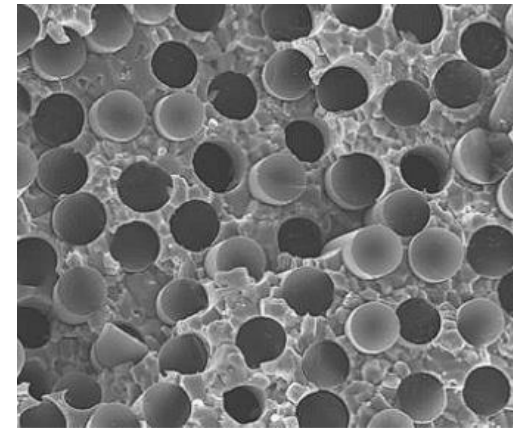


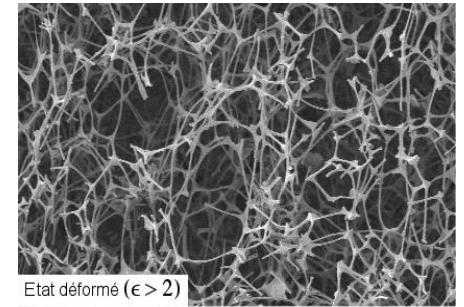
Image obtenue au MEB, matériau composite à fibres longues de carbone dans une matrice métallique

Milieu homogène

Un milieu est **homogène** si ses propriétés sont les mêmes en tout point du milieu

Milieu isotrope

Un milieu est **isotrope** si ses propriétés sont invariantes par changement de direction



Milieu anisotrope

Un milieu est **anisotrope** si ses propriétés varient par changement de direction, même si le milieu est homogène



Présentation du cours

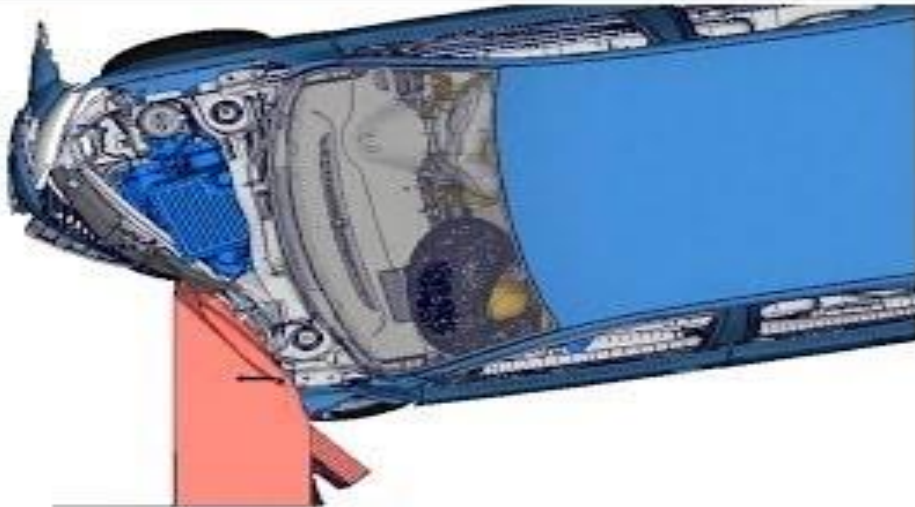
La MMC

Qu'est-ce que c'est?

A quoi ça sert?

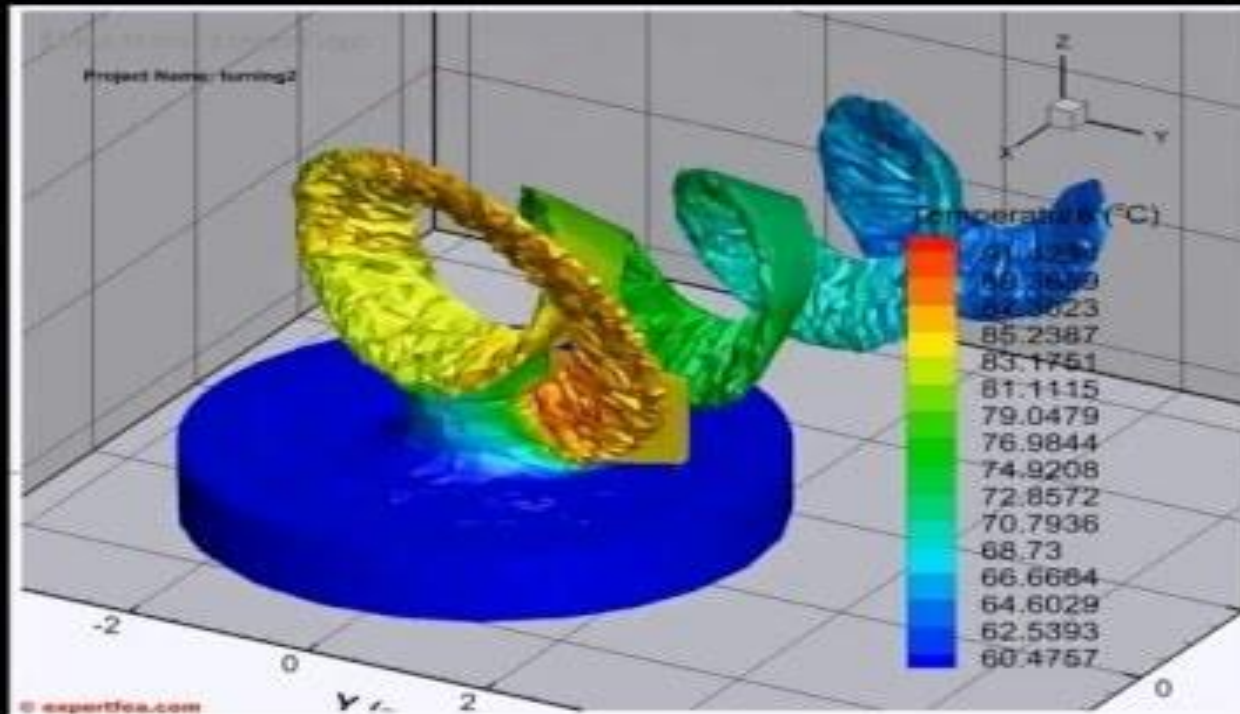
- positionnement
- échelle d'observation
- applications

TRANSPORTS



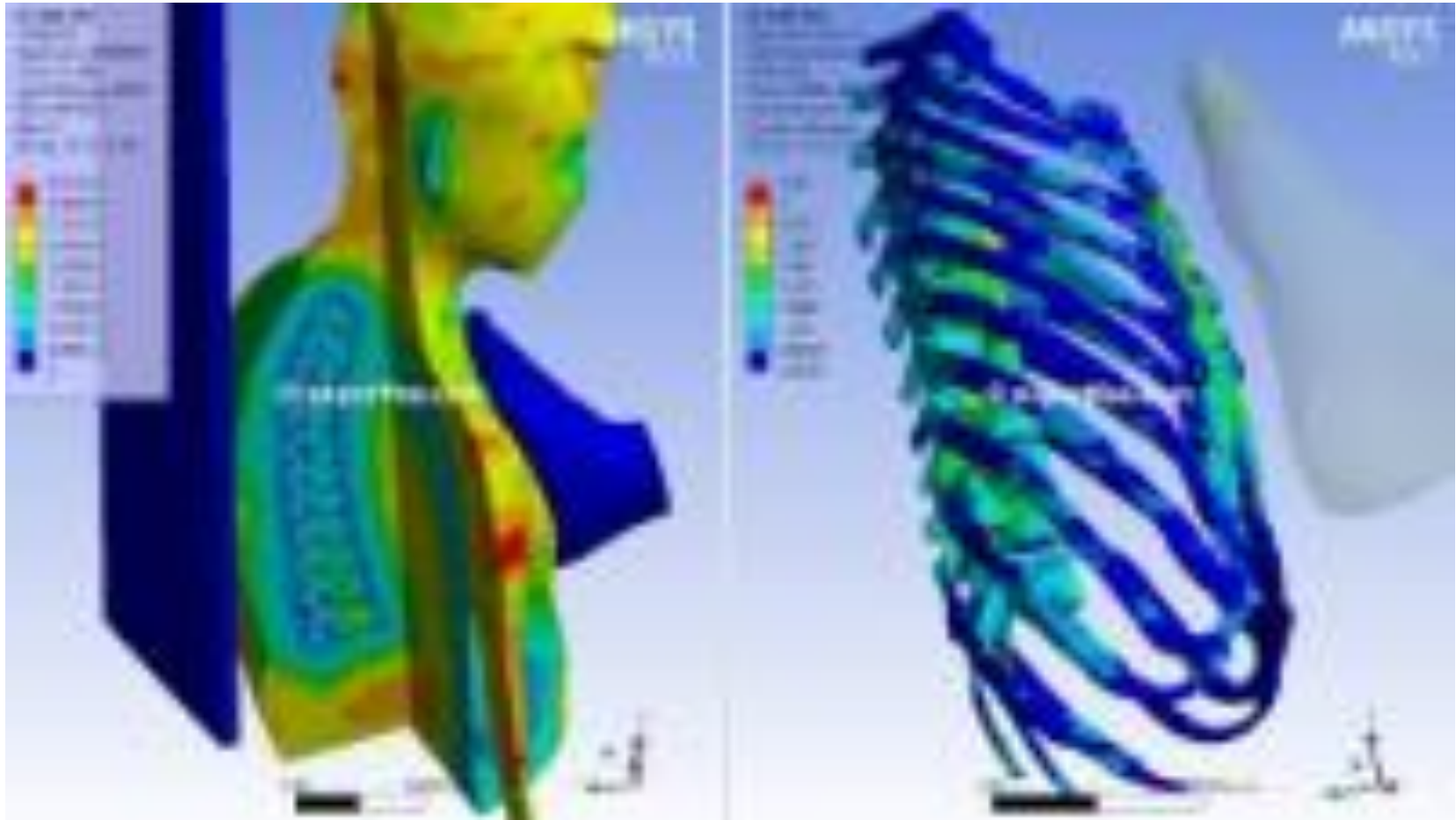
Crash test pour la sécurité automobile

MISE EN FORME



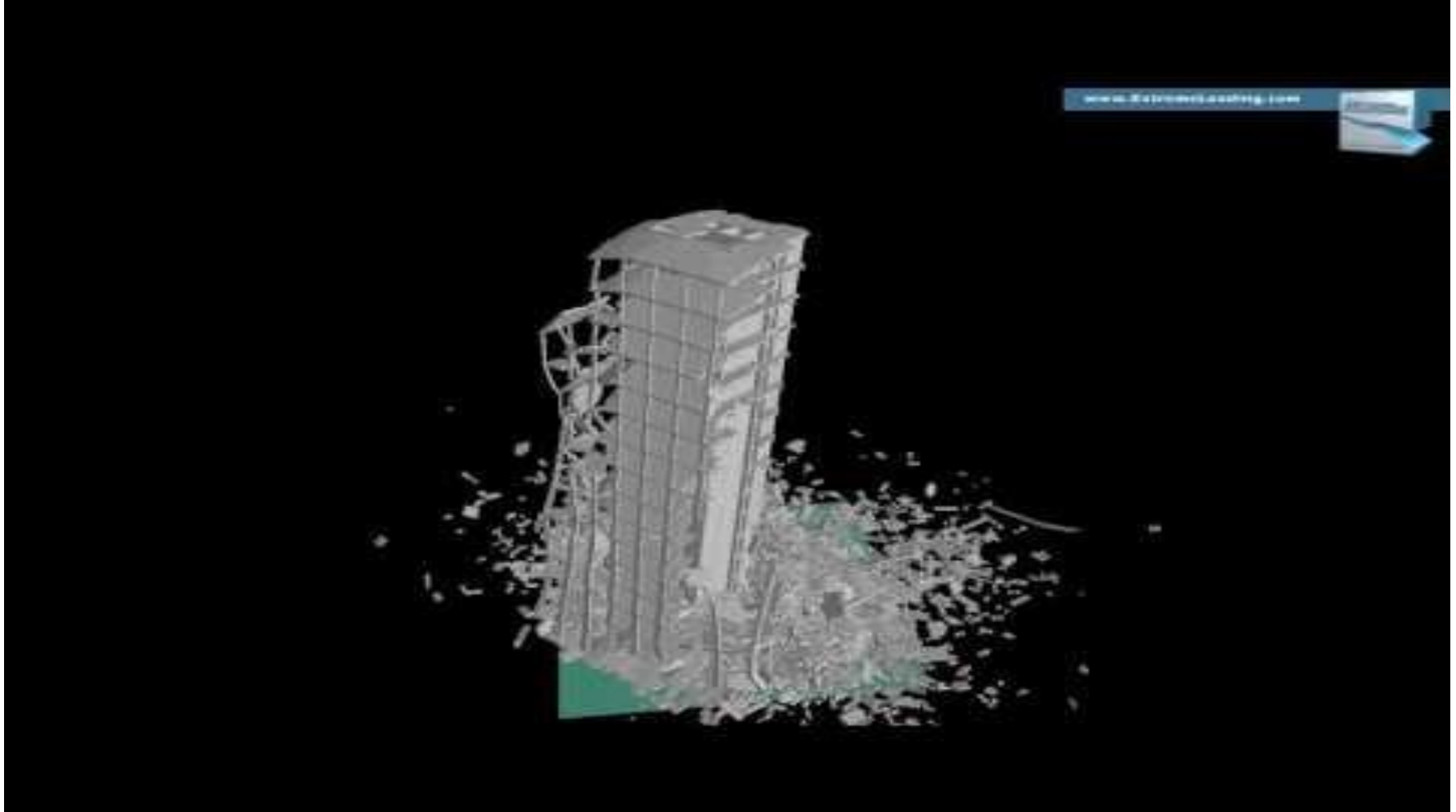
Simulations de procédés d'usinage

BIOMECHANIQUE



Simulation d'un coup de pied sur la cage thoracique

GENIE CIVIL



Analyse sismique d'un gratte-ciel

CHAPITRE II

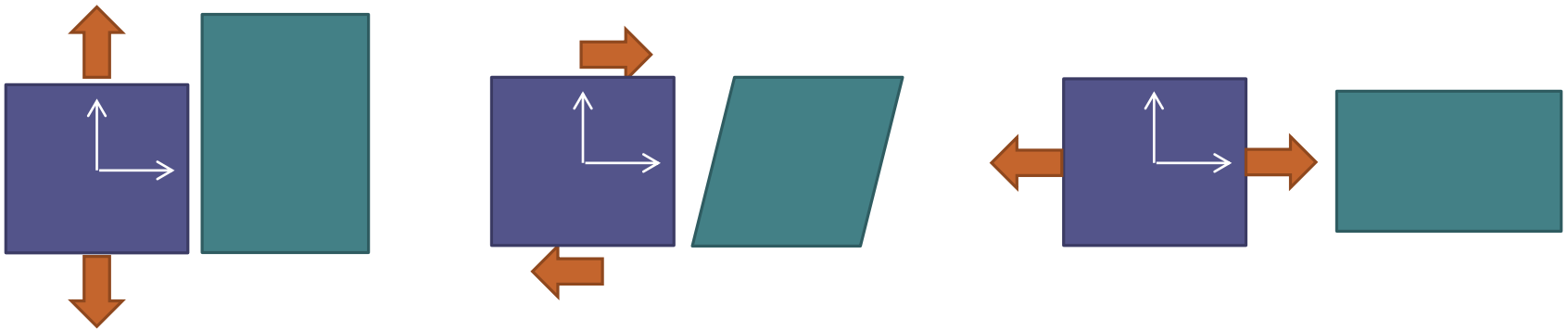
Cinématique du milieu continu

CHAP II: Cinématique du milieu continu

Bagage mathématique : notions de calcul tensoriel

- Produit tensoriel de deux vecteurs
- Ecriture matricielle de tenseurs d'ordre 2
- Rappels de calcul matriciel
- Opérations sur les tenseurs
- Les tenseurs d'ordre 2 comme applications linéaires
- Opérateur « gradient »

- Objets mathématiques connus (**intrinsèques**) :
 - ✓ **scalaires** (pression, température...)
 - ✓ **vecteurs** (force, vitesse...)
- Ces objets ne sont **pas suffisants** pour décrire par exemple les efforts intérieurs qui s'exercent dans un milieu déformé



→ introduction de l'objet **intrinsèque** « **tenseur** », dont le vecteur et le scalaire sont des cas particuliers

Définition générale du produit tensoriel

- Pour définir l'objet **tenseur** on introduit l'opération **produit tensoriel**
- L'opération se note $\otimes$ et peut s'appliquer dans le cas général à deux **espaces vectoriels** de natures différentes $\rightarrow \mathbb{R}^3$ dans notre cas

Interlude mathématique

- C'est un **produit** qui possède les propriétés de **bilinéarité**:

$\rightarrow$ **distributivité** de $\otimes$ par rapport à $+$:

$$\forall (\underline{x}, \underline{y}_1, \underline{y}_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \quad \begin{cases} \underline{x} \otimes (\underline{y}_1 + \underline{y}_2) = \underline{x} \otimes \underline{y}_1 + \underline{x} \otimes \underline{y}_2 \\ (\underline{y}_1 + \underline{y}_2) \otimes \underline{x} = \underline{y}_1 \otimes \underline{x} + \underline{y}_2 \otimes \underline{x} \end{cases}$$

$\rightarrow$ **associativité** de $\otimes$ par rapport au produit extérieur :

$$\forall (\underline{x}, \underline{y}, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \quad (\alpha \underline{x}) \otimes \underline{y} = \underline{x} \otimes (\alpha \underline{y}) = \alpha (\underline{x} \otimes \underline{y})$$



Définition générale du produit tensoriel

- Le produit tensoriel $\underline{x} \otimes \underline{y}$ crée un élément appartenant à $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$
- La **base** de ce nouvel espace se définit

$$\left. \begin{array}{l} \underline{x} \text{ est écrit dans la base } \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \\ \underline{y} \text{ est écrit dans la base } \underline{e}_1^*, \underline{e}_2^*, \underline{e}_3^* \end{array} \right\} \underline{x} \otimes \underline{y} \text{ a pour base } \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j^*$$

Expression analytique de $\underline{x} \otimes \underline{y}$

- en raison de la **bilinéarité** du produit tensoriel :

$$\left. \begin{array}{l} \underline{x} = x_i \underline{e}_i \\ \underline{y} = y_j \underline{e}_j^* \end{array} \right\} \underline{x} \otimes \underline{y} = (x_i \underline{e}_i) \otimes (y_j \underline{e}_j^*) = x_i y_j (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j^*)$$

- répétition sur les indices : **9 composantes** $\underline{x} \otimes \underline{y} = x_i y_j (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j^*) = T_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j^*$

On peut étendre ce qui précède au produit de plusieurs vecteurs:

$$(\underline{x} \otimes \underline{y}) \otimes \underline{z} = \underline{x} \otimes (\underline{y} \otimes \underline{z}) = \underline{x} \otimes \underline{y} \otimes \underline{z} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$$

On appelle tenseur d'ordre n sur $\mathbb{R}^3$ tout élément de l'espace:

$$\underbrace{\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \dots \otimes \mathbb{R}^3}_n$$

Notation: si n n'est « pas trop grand », on souligne n fois le tenseur:

$$\underline{\underline{T}} = \underline{x} \otimes \underline{y} \otimes \underline{z} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$$

- **Vecteur** = tenseur d'ordre 1 → souligné une fois
- **Scalaire** = tenseur d'ordre 0 → non souligné
- **Tenseur** quelconque **d'ordre n** → noté $\mathbf{T}^n$

CHAP II: Cinématique du milieu continu

Bagage mathématique : notions de calcul tensoriel

- Produit tensoriel de deux vecteurs
- Ecriture matricielle de tenseurs d'ordre 2
- Rappels de calcul matriciel
- Opérations sur les tenseurs
- Les tenseurs d'ordre 2 comme applications linéaires
- Opérateur « gradient »

Ecriture matricielle des tenseurs d'ordre 1 et 2:

- Un **vecteur** est un objet **intrinsèque** et possède des **composantes**, projetées sur une base, qui s'organisent sous la forme d'une colonne:

$$[\underline{x}]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

→ **notation**: « matrices des composantes de $\underline{x}$ dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ »

- De la même manière, un tenseur est un objet **intrinsèque** (=indépendante du repère) qui possède des **composantes scalaires**
- Dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ on peut l'écrire: $\underline{\underline{T}} = T_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$

Ecriture matricielle des tenseurs d'ordre 1 et 2:

- Sommation sur les indices → 9 composantes scalaires

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{T}} = & T_{11} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + T_{12} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + T_{13} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \dots \\
 & T_{21} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + T_{22} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + T_{23} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \dots \\
 & T_{31} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1 + T_{32} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2 + T_{33} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3
 \end{aligned}$$

- Dans ce repère**, les **composantes** du tenseur peuvent s'organiser sous la forme d'une **matrice** 3x3

Lors d'un changement de base:

- **quantité physique** décrite par le tenseur **identique**
- **matrice des composantes** du tenseur **différente**

Ecriture matricielle des tenseurs d'ordre 1 et 2:

- Par convention:



- Les **composantes** de $\underline{\underline{T}}$ dans $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ s'organisent donc:

$$\left[\underline{\underline{T}} \right]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)} = \text{Mat} \left(\underline{\underline{T}}, (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3) \right) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

- Lorsque la base est **évidente**, on pourra se limiter à la notation $\left[\underline{\underline{T}} \right]$

CHAP II: Cinématique du milieu continu

Bagage mathématique : notions de calcul tensoriel

- Produit tensoriel de deux vecteurs
- Ecriture matricielle de tenseurs d'ordre 2
- Rappels de calcul matriciel
- Opérations sur les tenseurs
- Les tenseurs d'ordre 2 comme applications linéaires
- Opérateur « gradient »

Notations

- $\mathbf{M}$ est un élément de $\mathcal{M}_{np}$: **matrice** à n lignes et p colonnes

Éléments de $\mathbf{M}$: scalaire m_{ij} situé à la i -ème ligne et j -ème colonne

- Espace des matrices $\mathcal{M}_{np}$: structure **d'espace vectoriel**

$$\lambda(\mathbf{M} + \mathbf{N})_{ij} = \lambda m_{ij} + \lambda n_{ij}$$

Exemple

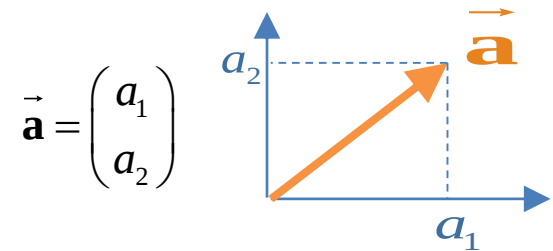
- Matrice appartenant à $\mathcal{M}_{23}$ $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ -2 & 15 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow m_{21} = -2$
- Seconde matrice $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 2 & -10 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2\mathbf{M} + \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 4 & -10 & 20 \\ -3 & 29 & 24 \end{pmatrix}$

Notations

■ **matrice-ligne** : $\mathcal{M}_{1n}$ → exemple : $\mathbf{M} = (1 \ 0 \ 10) \in \mathcal{M}_{13}$

■ **matrice-colonne** : $\mathcal{M}_{n1}$ → exemple : $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{31}$

→ utilisé pour représenter un vecteur dans $\mathbb{R}^n$



■ **matrice carrée** : $\mathcal{M}_{nn}$ → exemple : $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1.2 \\ 10 & -9 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{33}$

Le produit matriciel

- opération **produit matriciel** : bilinéaire, associatif $(\mathbf{MN})\mathbf{L} = \mathbf{M}(\mathbf{NL})$
 - $\mathbf{M}$ est un élément de $\mathcal{M}_{np}$
 - $\mathbf{N}$ est un élément de $\mathcal{M}_{pq}$
- } $\mathbf{MN}$ est un élément de $\mathcal{M}_{nq}$
- Le produit s'écrit : $(\mathbf{MN})_{ij} = \sum_{k=1}^p m_{ik} n_{kj}$

Exemple

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ -2 & 15 & 12 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{23}$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{31}$$

} $\mathbf{MN} \in \mathcal{M}_{21}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{MN})_{21} &= \sum_{k=1}^3 m_{2k} n_{k1} \\ &= m_{21} n_{11} + m_{22} n_{21} + m_{23} n_{31} \\ &= -2 \times 4 + 15 \times 0 + 12 \times 10 = 112 \end{aligned}$$

Transposée d'une matrice

- $\mathbf{M}$ est un élément de $\mathcal{M}_{np}$: **transposée** $\mathbf{M}^T$ est un élément de $\mathcal{M}_{pn}$

$$(\mathbf{M}^T)_{ij} = (\mathbf{M})_{ji}$$

- Transposée d'un **produit** de matrices ? $(\mathbf{MN})^T = \mathbf{N}^T \mathbf{M}^T$
- Transposée de la transposée : $(\mathbf{M}^T)^T = \mathbf{M}$
- Matrice **symétrique** : $m_{ij} = m_{ji}$
 → transposée d'une matrice symétrique = matrice elle-même
- Matrice **antisymétrique** : $m_{ij} = -m_{ji}$
 → transposée d'une matrice antisymétrique
 = opposé de la matrice elle-même

Matrice identité

- Matrice identité = **élément neutre** du produit matriciel

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{M}$$

- Eléments de cette matrice : $(\mathbf{I})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$
- = matrice **diagonale** : tous les éléments tels que $i \neq j$ sont nuls

Trace d'une matrice

- Trace d'une matrice carrée $tr(\mathbf{M})$ = somme des éléments diagonaux

$$\mathbf{M} \in \mathcal{M}_{nn} \quad tr(\mathbf{M}) = \sum_{k=1}^n m_{kk} = m_{11} + m_{22} + \dots + m_{nn}$$

- exemple*: trace de la matrice identité de dimension 3 = 3

Déterminant d'une matrice carrée

- Matrice 2 x 2

$$\det \mathbf{M} = \begin{vmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{vmatrix} = m_{1,1}m_{2,2} - m_{1,2}m_{2,1}$$

+ -

- Matrice 3 x 3

$$\det \mathbf{M} = \begin{vmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{vmatrix} = m_{1,1}m_{2,2}m_{3,3} + m_{1,2}m_{2,3}m_{3,1} + m_{2,1}m_{3,2}m_{1,3} - m_{3,1}m_{2,2}m_{1,3} - m_{2,1}m_{1,2}m_{3,3} - m_{1,1}m_{3,2}m_{2,3}$$

+ -

- Déterminant non nul $\rightarrow$ matrice **inversible**

si $\det M \neq 0$ alors il existe $\mathbf{M}^{-1}$ telle que $\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{I}$

CHAP II: Cinématique du milieu continu

Bagage mathématique : notions de calcul tensoriel

- Produit tensoriel de deux vecteurs
- Ecriture matricielle de tenseurs d'ordre 2
- Rappels de calcul matriciel
- Opérations sur les tenseurs
- Les tenseurs d'ordre 2 comme applications linéaires
- Opérateur « gradient »

Opération	Notation tensorielle	Ecriture matricielle
Addition	$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$	$S_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$
Multiplication tensorielle entre $\underline{x}$ et $\underline{y}$	$\underline{\underline{T}} = \underline{x} \otimes \underline{y}$	$T_{ij} = x_i y_j \Rightarrow [\underline{\underline{T}}] = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & x_2 y_3 \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & x_3 y_3 \end{pmatrix}$
Produit scalaire (ou « produit contracté ») entre deux tenseurs $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$	$\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$ $\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$ $\underline{\underline{P}} \neq \underline{\underline{Q}}$	$P_{ik} = A_{ij} B_{jk}$ $Q_{ik} = B_{ij} A_{jk}$
Produit scalaire entre le tenseur $\underline{\underline{A}}$ et le vecteur $\underline{b}$	$\underline{p} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{b}$ $\underline{q} = \underline{b} \cdot \underline{\underline{A}}$ $\underline{p} \neq \underline{q}$	$p_i = A_{ij} b_j \Rightarrow \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ $q_j = b_i A_{ij} \Rightarrow \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Opération	Notation tensorielle	Ecriture matricielle
Trace du tenseur $\underline{\underline{A}}$	$Tr(\underline{\underline{A}})$	$Tr(\underline{\underline{A}}) = A_{11} + A_{22} + A_{33}$
Tenseur identité	$\underline{\underline{I}}$	$[\underline{\underline{I}}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Déterminant du tenseur $\underline{\underline{A}}$	$\det \underline{\underline{A}}$	$\det \underline{\underline{A}} = \det [\underline{\underline{A}}] = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$
Inverse du tenseur $\underline{\underline{A}}$	$\underline{\underline{A}}^{-1}$	matrice $[\underline{\underline{A}}]^{-1}$ telle que : $[\underline{\underline{A}}] \cdot [\underline{\underline{A}}]^{-1} = [\underline{\underline{A}}]^{-1} \cdot [\underline{\underline{A}}] = [\underline{\underline{I}}]$
Transposé du tenseur $\underline{\underline{A}}$	$\underline{\underline{A}}^T$	$[\underline{\underline{A}}]^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$

Exemple

- Calculons le déterminant du tenseur suivant :

$$\underline{\underline{T}} = 2\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + 4\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + 3\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$$

- Matrice représentative du tenseur : $[\underline{\underline{T}}] = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

- Calcul du déterminant :

$$\det \underline{\underline{T}} = \det [\underline{\underline{T}}] = T_{11}T_{22}T_{33} + \cancel{T_{12}T_{23}T_{31}} + \cancel{T_{13}T_{21}T_{32}} - \cancel{T_{13}T_{22}T_{31}} - \cancel{T_{12}T_{21}T_{33}} - \cancel{T_{11}T_{23}T_{32}} = 6$$

→ Transposée d'un tenseur : propriétés

Propriétés: $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \Rightarrow \underline{\underline{T}}^T = \underline{\underline{B}}^T \cdot \underline{\underline{A}}^T$

$$\underline{b} \cdot \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{b}$$

Notation: $(\underline{\underline{T}}^{-1})^T = \underline{\underline{T}}^{-T}$

CHAP II: Cinématique du milieu continu

Bagage mathématique : notions de calcul tensoriel

- Produit tensoriel de deux vecteurs
- Ecriture matricielle de tenseurs d'ordre 2
- Rappels de calcul matriciel
- Opérations sur les tenseurs
- Les tenseurs d'ordre 2 comme applications linéaires
- Opérateur « gradient »

Les tenseurs d'ordre 2 comme applications linéaire:

- Au sens du produit contracté on considère l'application linéaire:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{T}} &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \underline{x} &\rightarrow \underline{\underline{T}} \cdot \underline{x}\end{aligned}$$

→ objet **intrinsèque** qui transforme un **vecteur** en un autre **vecteur**

Les tenseurs d'ordre 2 comme applications bilinéaire:

- Au sens du produit contracté on considère l'application bilinéaire:

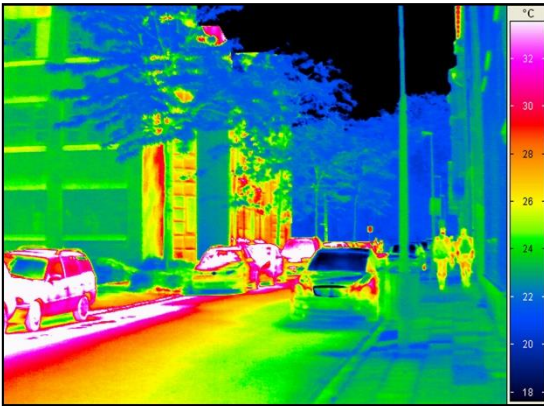
$$\begin{aligned}\underline{\underline{T}} &: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (\underline{x}, \underline{y}) &\rightarrow \underline{x} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{y}\end{aligned}$$

→ objet **intrinsèque** qui transforme un **couple de vecteurs** en un **scalaire**

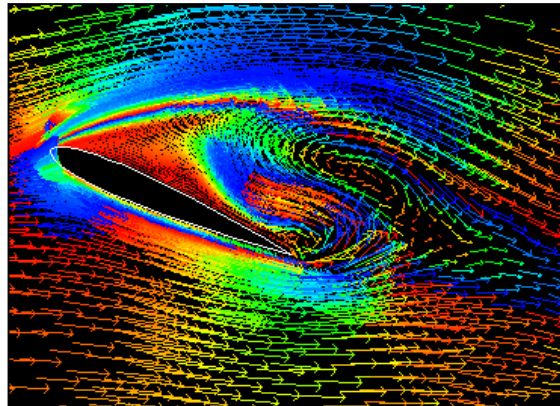
CHAP II: Cinématique du milieu continu

Bagage mathématique : notions de calcul tensoriel

- Produit tensoriel de deux vecteurs
- Ecriture matricielle de tenseurs d'ordre 2
- Rappels de calcul matriciel
- Opérations sur les tenseurs
- Les tenseurs d'ordre 2 comme applications linéaires
- Opérateur « gradient »



Un champ scalaire:
champ de température



Un champ vectoriel:
champ de vitesses



Champ de tenseurs

- On appelle **champ de tenseurs** une application qui va d'un ouvert de l'espace physique (volume d'un milieu) vers un espace vectoriel d'un certain ordre
- Soit un point M de position $\underline{x} = \underline{OM}$
 - **champ de tenseurs** : $\underline{x} \in \Omega \rightarrow \mathbf{T}^n(\underline{x}) \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \dots \otimes \mathbb{R}^3$
 - il existe un tenseur a priori différent pour chaque point de l'ouvert

Interlude mathématique

Opérateur Nabla

- Pour la suite on introduit la notation de l'opérateur **Nabla**:

$$\underline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_i} \underline{e}_i$$

- Coordonnées cartésiennes : $[\underline{\nabla}a]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)} = a[\underline{\nabla}]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial x_1} \\ \frac{\partial a}{\partial x_2} \\ \frac{\partial a}{\partial x_3} \end{pmatrix}$
- Coordonnées cylindriques : $[\underline{\nabla}a]_{(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)} = a[\underline{\nabla}]_{(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial a}{\partial \theta} \\ \frac{\partial a}{\partial z} \end{pmatrix}$



Interlude mathématique

Gradient d'une fonction de plusieurs variables

- f est une fonction de plusieurs variables : $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

- On peut définir l'opérateur **gradient** contenant les

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i}$$

$$\overrightarrow{\text{Grad}} f(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(M)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(M)}{\partial x_2} \\ \dots \\ \frac{\partial f(M)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

→ contient toutes les **variations** de f dans toutes les directions



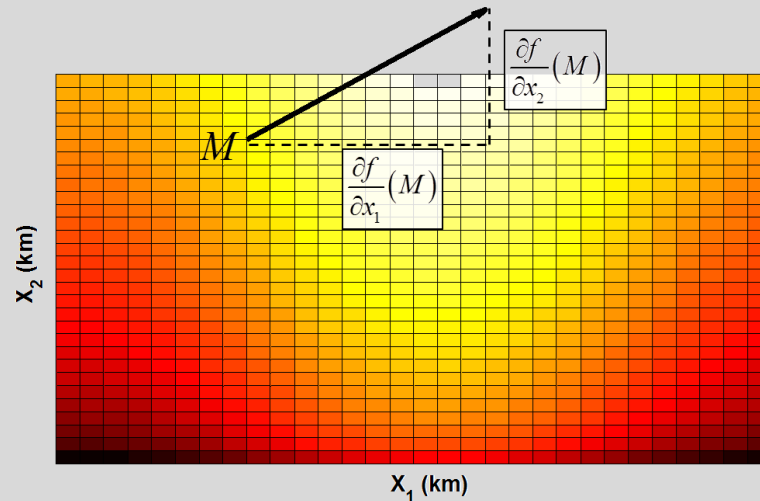
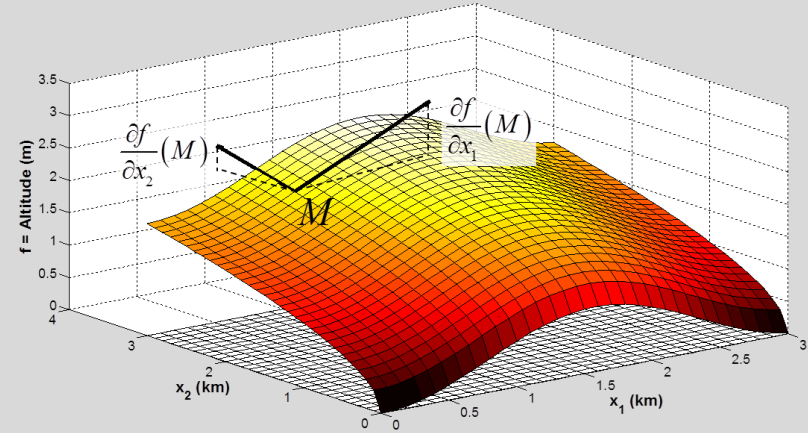
Interlude mathématique

Gradient d'une fonction de plusieurs variables

- On reprend la fonction « altitude »

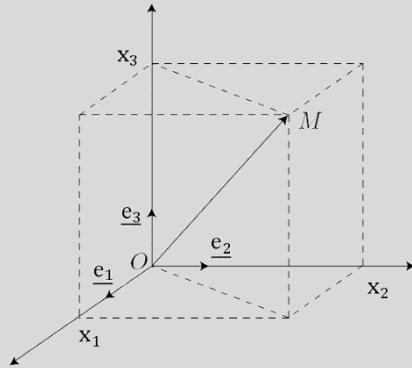
Gradient au point M ?

- Vecteur qui suit la pente maximale, et va « du bas vers le haut »



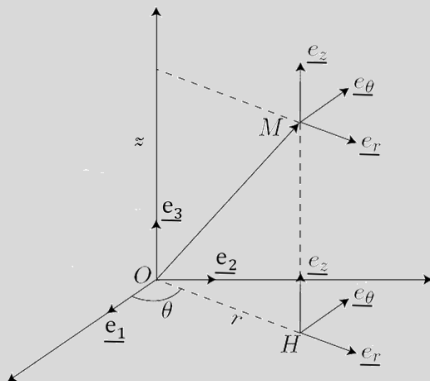
Interlude mathématique

- Coordonnées cartésiennes



$$[\underline{Grad} T] = \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x_1} \\ \frac{\partial T}{\partial x_2} \\ \frac{\partial T}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

- Coordonnées cylindriques



$$[\underline{Grad} T] = \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix}$$



Gradient d'un champ de tenseurs : définition intrinsèque

- Soit $\mathbf{T}^n(\underline{x})$ un champ de tenseurs d'ordre n sur un ouvert de l'espace
- Analyse locale de ce champ autour d'un point de coordonnées $\underline{x}$:

$$d\mathbf{T}^n = \mathbf{T}^n(\underline{x} + d\underline{x}) - \mathbf{T}^n(\underline{x})$$

- Il existe une application linéaire qui à $d\underline{x}$ fait correspondre $d\mathbf{T}^n$

→ champ de tenseurs d'ordre $n+1$ appelé **gradient** du champ $\mathbf{T}^n(\underline{x})$

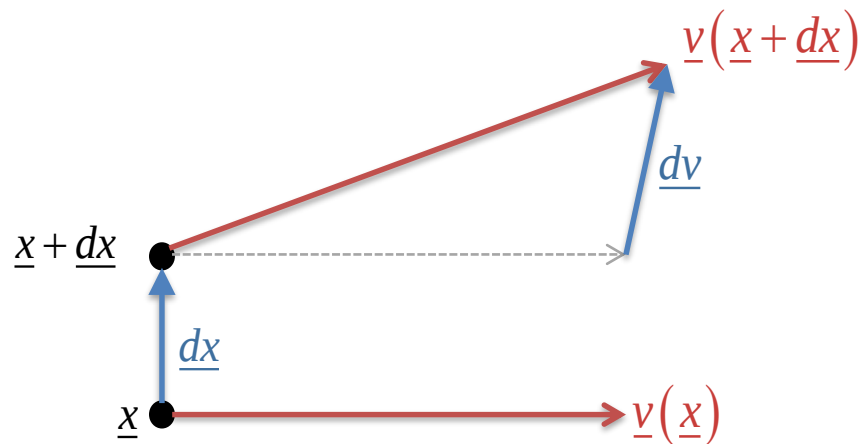
$$\begin{aligned} \text{Grad}(\mathbf{T}^n(\underline{x})) : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \otimes \dots \otimes \mathbb{R}^3 \\ d\underline{x} &\rightarrow d\mathbf{T}^n = \text{Grad}(\mathbf{T}^n(\underline{x})) \cdot d\underline{x} \end{aligned}$$

Gradient d'un champ de tenseurs : définition intrinsèque

- C'est l'approximation **linéaire** du champ $\mathbf{T}^n(\underline{x})$

→ « **Application linéaire tangente** » à $\mathbf{T}^n(\underline{x})$

- Application à un champ de tenseurs **d'ordre 1**:



$$\underline{dv} = \underline{\underline{Grad}}(\underline{v}(\underline{x})) \cdot \underline{dx}$$

Gradient d'un champ de tenseurs : expressions

Coordonnées **cartésiennes**

$$\underline{\underline{Grad}} T = \frac{\partial T}{\partial x_1} \underline{e}_1 + \frac{\partial T}{\partial x_2} \underline{e}_2 + \frac{\partial T}{\partial x_3} \underline{e}_3 = T_{,i} \underline{e}_i$$

→ champ de vecteurs

$$\begin{aligned} \underline{\underline{Grad}} \underline{T} &= \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial T_1}{\partial x_3} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \\ &\quad \frac{\partial T_2}{\partial x_1} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial T_2}{\partial x_2} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial T_2}{\partial x_3} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 + \\ &\quad \frac{\partial T_3}{\partial x_1} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial T_3}{\partial x_2} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial T_3}{\partial x_3} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \\ &= T_{i,j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \end{aligned}$$

→ champ de tenseurs d'ordre 2

Coordonnées **cylindriques**

$$\underline{\underline{Grad}} T = \frac{\partial T}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \underline{e}_\theta + \frac{\partial T}{\partial z} \underline{e}_z$$



$$\begin{aligned} \underline{\underline{Grad}} \underline{T} &= \frac{\partial T_r}{\partial r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_r}{\partial \theta} - T_\theta \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_r}{\partial z} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + \\ &\quad \frac{\partial T_\theta}{\partial r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + T_r \right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_\theta}{\partial z} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \\ &\quad \frac{\partial T_z}{\partial r} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T_z}{\partial \theta} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_z}{\partial z} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \end{aligned}$$

Interlude mathématique

Décomposition en parties symétrique et antisymétrique

- A partir d'un tenseur d'ordre 2 $\underline{\underline{T}}$ quelconque, on peut définir:

$$\underline{\underline{T}}^{(1)} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}}^T) \quad \underline{\underline{T}}^{(2)} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} - \underline{\underline{T}}^T)$$

- La somme de ces deux tenseurs évidemment égale à $\underline{\underline{T}}$
- Calculons la transposée de $\underline{\underline{T}}^{(1)}$:

$$\left(\underline{\underline{T}}^{(1)}\right)^T = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}}^T + \underline{\underline{T}}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}}^T) \rightarrow \underline{\underline{T}}^{(1)} \text{ est } \mathbf{symétrique!}$$

- Calculons la transposée de $\underline{\underline{T}}^{(2)}$:

$$\left(\underline{\underline{T}}^{(2)}\right)^T = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}}^T - \underline{\underline{T}}) = -\frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} - \underline{\underline{T}}^T) \rightarrow \underline{\underline{T}}^{(2)} \text{ est } \mathbf{antisymétrique!}$$



Interlude mathématique

Décomposition en parties symétrique et antisymétrique

→ Un tenseur d'ordre 2 $\underline{\underline{T}}$ quelconque se décompose de façon **unique**:

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^{sym} + \underline{\underline{T}}^{antisym} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{\underline{T}}^{sym} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}}^T) \\ \underline{\underline{T}}^{antisym} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} - \underline{\underline{T}}^T) \end{cases}$$

- On montre facilement que la **trace** d'un tenseur d'ordre 2 **antisymétrique** est **nulle**

→ Il ne possède que 3 composantes indépendantes

→ Peuvent être organisées sous forme d'un **vecteur**
(cf vecteur tourbillon en fluide)



Gradient d'un champ vectoriel

- Décomposition partie **symétrique** / **antisymétrique**

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^{sym} + \underline{\underline{T}}^{antisym} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}}^T) + \frac{1}{2}(\underline{\underline{T}} - \underline{\underline{T}}^T)$$

- Gradient d'un champ de vecteurs: $\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{T}} = \frac{\partial T_i}{\partial x_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$

→ Décomposition $\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{d}} + \underline{\underline{\Omega}}$ avec

$$\begin{cases} \underline{\underline{d}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{T}} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{T}})^T) = \underline{\underline{d}}^T \\ \underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{T}} - (\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{T}})^T) = -\underline{\underline{\Omega}}^T \end{cases}$$

- Propriétés du produit contracté:

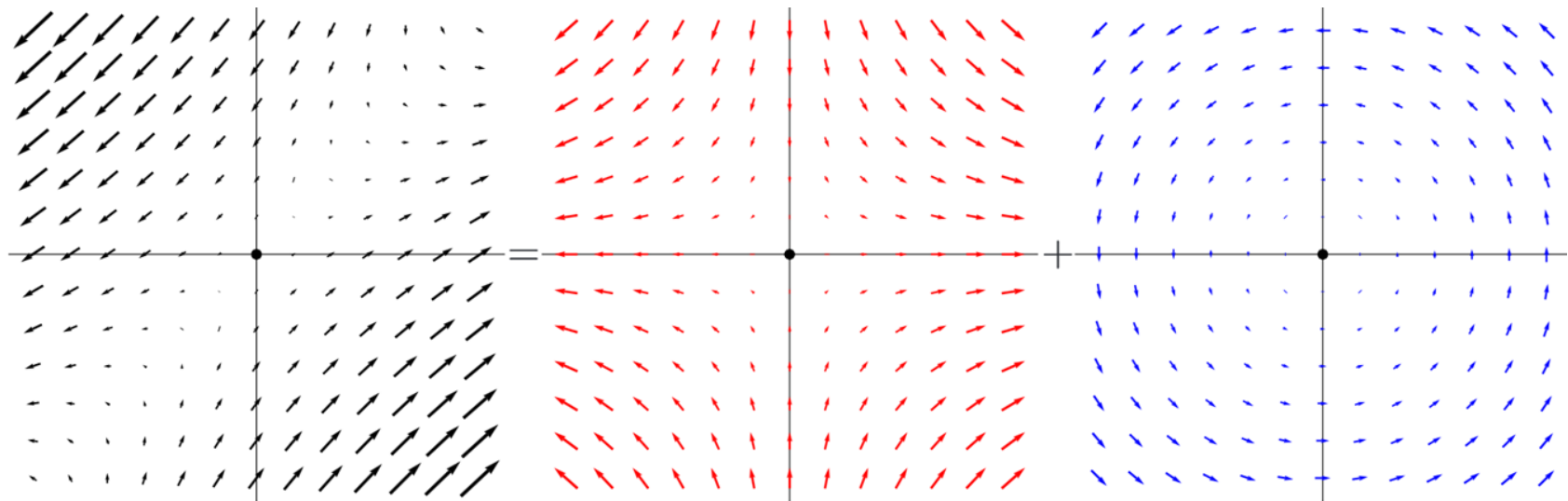
$$d\underline{\underline{T}} = (\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{T}}) \cdot d\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{d}} \cdot d\underline{\underline{x}} + \underline{\underline{\Omega}} \cdot d\underline{\underline{x}}$$

Déformation locale du milieu

Rotation locale du milieu

Gradient d'un champ vectoriel

- Illustration : **gradient d'un champ de vecteurs** autour de l'origine



$$\underline{dT} = \underline{\text{Grad}}(\underline{T}(\underline{0})) \cdot \underline{dx}$$

Approximation linéaire
autour de l'origine d'un
champ de vecteurs

$$\underline{\underline{d}}(\underline{0}) \cdot \underline{dx}$$

Partie **symétrique**:
déformation locale

$$\underline{\underline{\Omega}}(\underline{0}) \cdot \underline{dx}$$

Partie **antisymétrique**:
rotation locale

PLAUT, E. Mécanique des Milieux Continus. Cours de l'école des Mines de Nancy 2011.

CHAP II: Cinématique du milieu continu

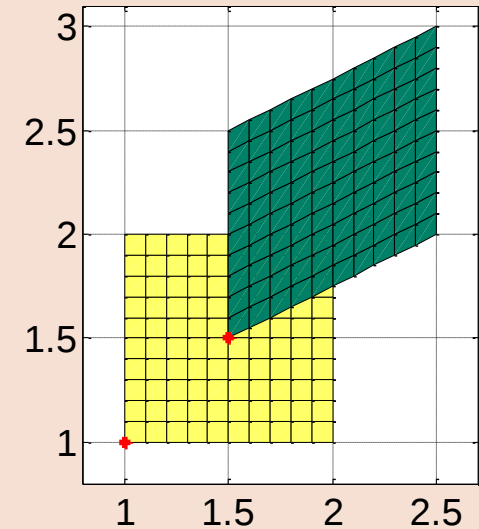
Représentation du mouvement

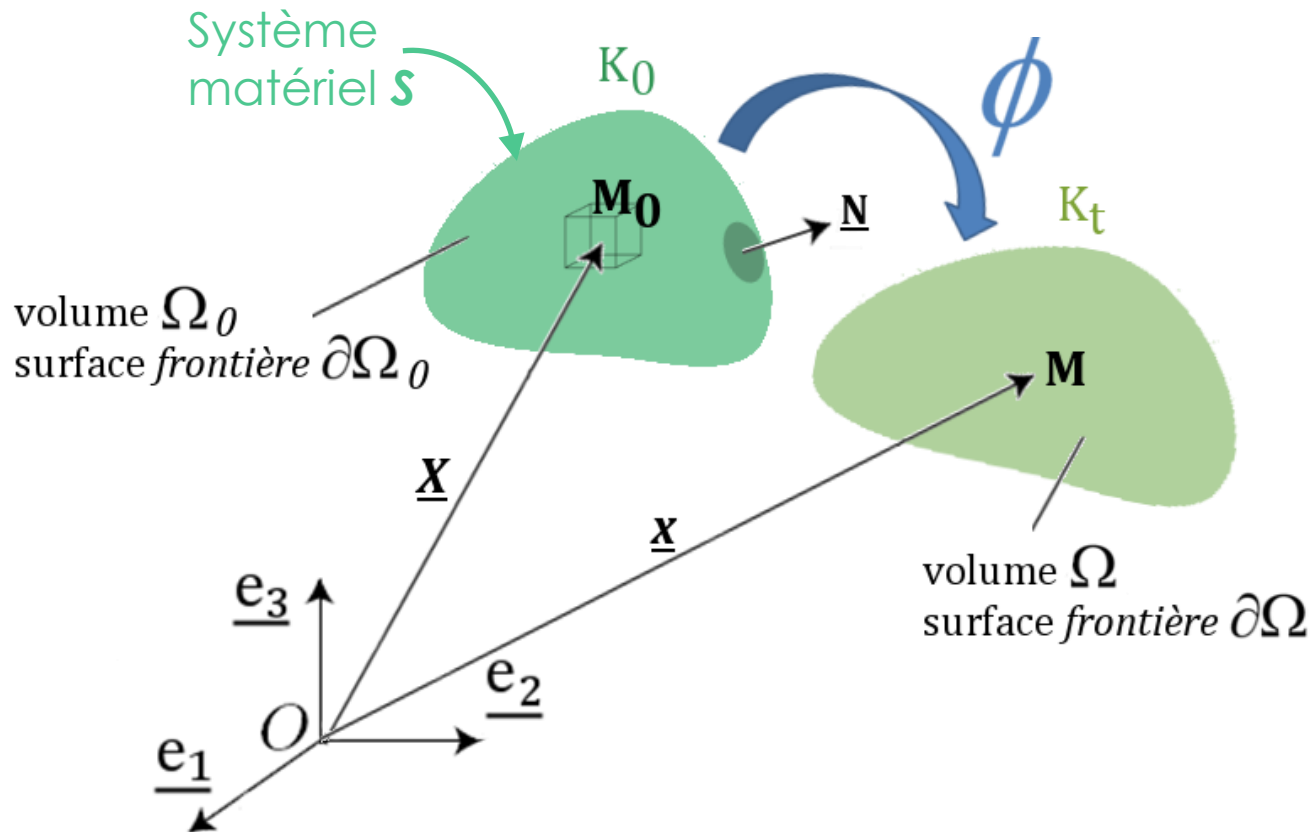
- Repérage des points matériels en mouvement
- Descriptions lagrangienne et eulérienne
- Déplacement, vitesse et accélération
- Quelques caractéristiques de la transformation

Exemple

Exemple de transformation plane

- Transformation carré jaune $\rightarrow$ losange vert
- Translation + changement de forme
- Questions soulevées dans ce chapitre :
 - $\rightarrow$ Comment décrire proprement la transformation ?
 - $\rightarrow$ Comment décrire les positions, vitesses, accélérations ?
 - $\rightarrow$ Comment décrire le changement de forme ?





Configuration de
référence

$$K_0, t_0$$

$$\underline{OM}_0 = \underline{X} = X_i \underline{e}_i$$

→majuscules!

Configuration
actuelle

$$K_t, t$$

$$\underline{OM} = \underline{x} = x_i \underline{e}_i$$

→minuscules!

Configuration de
référence

Transformation $\underline{\phi}$

Configuration
actuelle

Exemple

- Soit la transformation : $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$

$$\begin{cases} x_1 = \phi_1(\underline{X}, t) = X_1 + \alpha t^2 \\ x_2 = \phi_2(\underline{X}, t) = \frac{t}{\tau} X_1 + X_2 \\ x_3 = \phi_3(\underline{X}, t) = X_3 \end{cases}$$

La fonction vectorielle $\underline{\phi}(\underline{X}, t)$ permet de passer de K_0 dans K_t

$$X_1 = [1, 2]$$

$$X_2 = [1, 2]$$

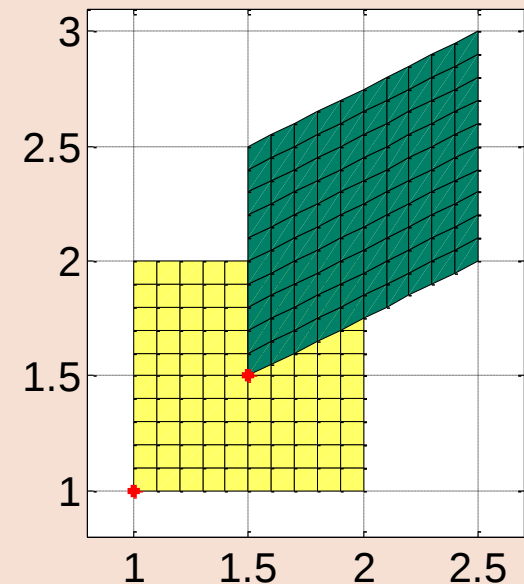
$$t = 0.5$$

Point particulier (point rouge) :

$$\underline{X} = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \Rightarrow \underline{x} = 1.5\underline{e}_1 + 1.5\underline{e}_2$$

Condition initiale :

$$\underline{x}(\underline{X}, t = 0) = \underline{X}$$



CHAP II: Cinématique du milieu continu

Représentation du mouvement

- Repérage des points matériels en mouvement
- Descriptions lagrangienne et eulérienne
- Déplacement, vitesse et accélération
- Quelques caractéristiques de la transformation

Description lagrangienne

= description **par trajectoire**

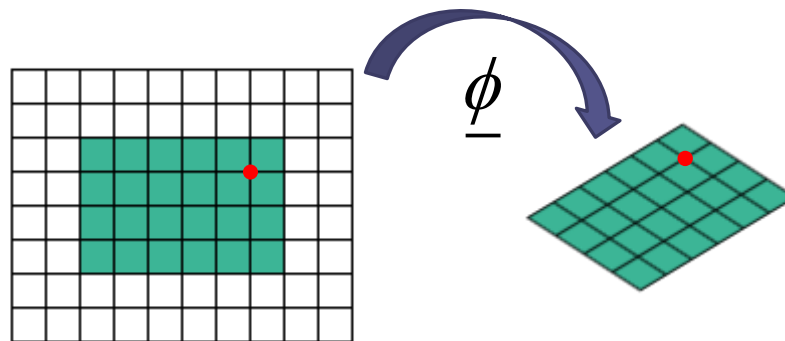
→ on suit le mouvement d'un point matériel au cours du temps

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \quad \text{avec} \quad \underline{\phi}(\underline{X}, t = t_0) = \underline{X}$$

Comme $\underline{\phi}$ est une bijection, on peut noter $\underline{\psi} = \underline{\phi}^{-1}$ et on a $\underline{X} = \underline{\psi}(\underline{x}, t)$

Variables de Lagrange: t, X_1, X_2, X_3 (« coordonnées matérielles »)

Inconnues de Lagrange: $\phi_1(\underline{X}, t), \phi_2(\underline{X}, t), \phi_3(\underline{X}, t)$



Description eulérienne

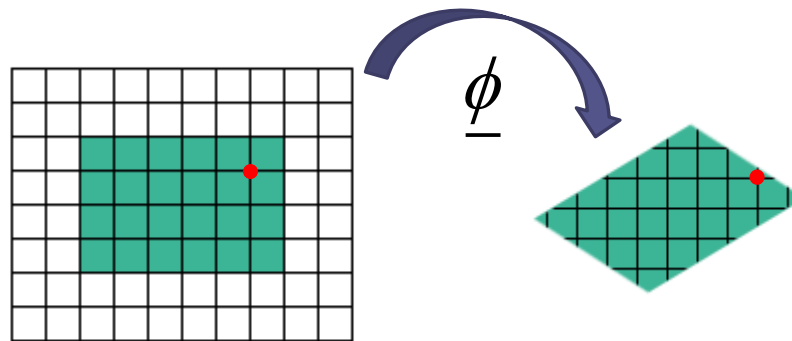
= description sans connaissance de la config. de référence

→ on décrit le mouvement par le champ de **vitesse**s dans K_t

$$\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi(\underline{X}, t)}{\partial t} = \underline{v}(\phi(\underline{X}, t), t) \quad \text{avec} \quad \phi(\underline{X}, t = t_0) = \underline{X}$$

Variables d'Euler: t, x_1, x_2, x_3 (« coordonnées spatiales »)

Inconnues d'Euler: $v_1(\underline{x}, t), v_2(\underline{x}, t), v_3(\underline{x}, t)$



Remarques de notation

→ Quantité tensorielle en description **lagrangienne**: $\mathbf{G}(\underline{X}, t)$

→ Quantité tensorielle en description **eulérienne**: $\mathbf{g}(\underline{x}, t)$

- Gradient (ou divergence) d'une fonction en description **lagrangienne**

= par rapport aux variables de **Lagrange**

$$\text{Grad}(\mathbf{G}(\underline{X}, t)) = \frac{\partial \mathbf{G}(\underline{X}, t)}{\partial \underline{X}}$$

- Gradient (ou divergence) d'une fonction en description **eulérienne**

= par rapport aux variables **d'Euler**

$$\text{grad}(\mathbf{g}(\underline{x}, t)) = \frac{\partial \mathbf{g}(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}}$$

Dérivée particulaire

Objectif : on veut calculer la **dérivée temporelle** (l'évolution) d'un champ dans le temps **pour une particule donnée**.

- Dérivée de la quantité **lagrangienne** $G(\underline{X}, t)$: facile car $\underline{X}$ est fixe

$$\dot{\mathbf{G}}(\underline{X}, t) = \frac{d\mathbf{G}(\underline{X}, t)}{dt} : \text{dérivée } \mathbf{particulaire} \text{ ou } \mathbf{matérielle}$$

- Dérivée partielle de la quantité eulérienne $\mathbf{g}(\underline{x}, t)$ ($\underline{x}$ est fixe)

$$\frac{\partial \mathbf{g}(\underline{x}, t)}{\partial t} : \text{dérivée } \mathbf{spatiale} \text{ ou } \mathbf{eulérienne}$$

→ **problème**: dérivée **particulaire** (totale) d'un quantité écrite en description **eulérienne** ?

Dérivée particulaire

- Dérivée **totale** de la quantité eulérienne $\mathbf{g}(\underline{x}, t)$ ($\underline{X}$ est fixe)

$$\dot{\mathbf{g}}(\underline{x}, t) = \frac{d\mathbf{g}(\underline{x}, t)}{dt} = \frac{d\mathbf{g}(\phi(\underline{X}, t), t)}{dt}$$

- On peut écrire: $d\mathbf{g}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{g}(\underline{x}, t)}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathbf{g}(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} dt$

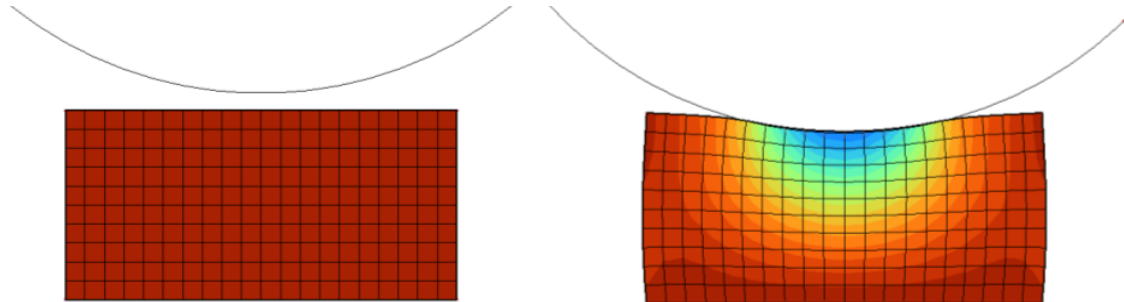
dérivée
particulaire

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{g}}(\underline{x}, t) &= \frac{d\mathbf{g}(\underline{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{g}(\underline{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{g}(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \mathbf{g}(\underline{x}, t)}{\partial t} + \text{grad}(\mathbf{g}(\underline{x}, t)) \cdot \underline{v}(\underline{x}, t) \end{aligned}$$

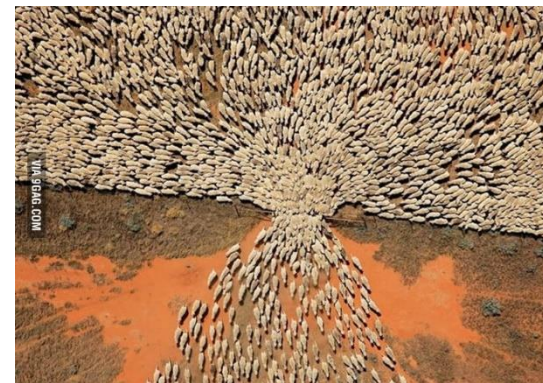
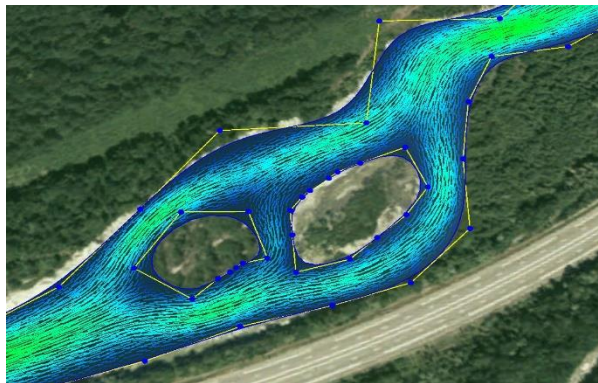
dérivée
eulérienne

Terme
d'advection

- Description **lagrangienne** : suivi des points matériels à partir d'une configuration de **référence** connue → mécanique du **solide**

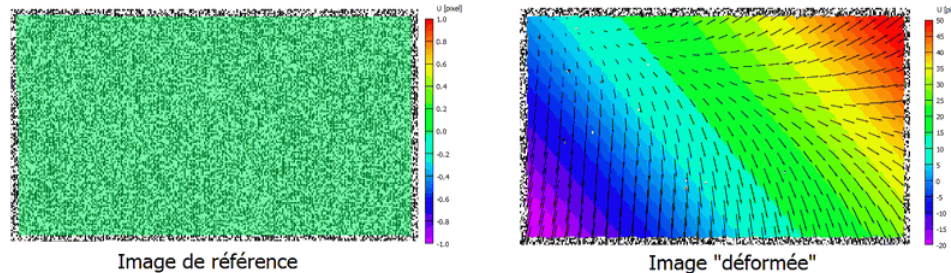


- Description **eulérienne**: description des vitesses à des points connus de la configuration **actuelle** → mécanique des **fluides**



- Méthode expérimentale en mécanique du solide :
suivi des points matériels à partir d'une configuration de **référence**

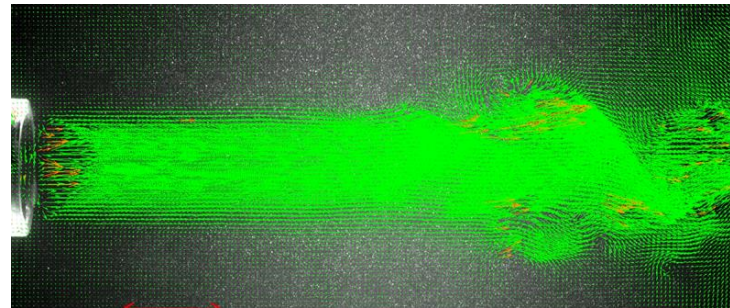
$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$$



DIC : Digital image correlation

- Méthode expérimentale en mécanique des fluides:
tracé du champ de vitesses

$$\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, t)$$



PIV : Particle Image Velocimetry

CHAP II: Cinématique du milieu continu

Représentation du mouvement

- Repérage des points matériels en mouvement
- Descriptions lagrangienne et eulérienne
- Déplacement, vitesse et accélération
- Quelques caractéristiques de la transformation

Champ de déplacement

- Définition évidente d'après les notations précédentes :

$$\underline{U}(\underline{X}, t) = \underline{x}(\underline{X}, t) - \underline{X}$$

→ fonction des variables de Lagrange, donc quantité **lagrangienne**

- Alternative en description **eulérienne** : $\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{x} - \underline{X}(\underline{x}, t)$

- 2 définitions mais **mêmes valeurs**

→ notation minuscule pour la suite : $\underline{u}(\underline{X}, t)$

- Cinématique souvent décrite par un champ de **déplacement** en mécanique du solide

Exemple

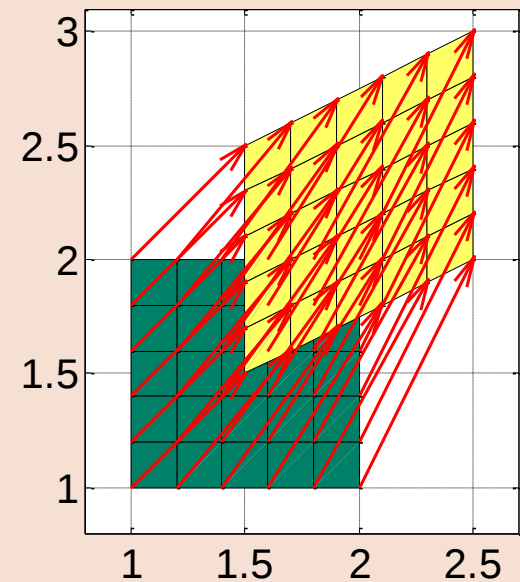
- Transformation plane :

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \begin{cases} x_1 = \phi_1(\underline{X}, t) = X_1 + \alpha t^2 \\ x_2 = \phi_2(\underline{X}, t) = \frac{t}{\tau} X_1 + X_2 \\ x_3 = \phi_3(\underline{X}, t) = X_3 \end{cases} \Rightarrow \underline{X} = \underline{\phi}^{-1}(\underline{x}, t) \begin{cases} X_1 = \phi_1^{-1}(\underline{x}, t) = x_1 - \alpha t^2 \\ X_2 = \phi_2^{-1}(\underline{x}, t) = x_2 - \frac{t}{\tau} x_1 + \frac{\alpha}{\tau} t^3 \\ X_3 = \phi_3^{-1}(\underline{x}, t) = x_3 \end{cases}$$

- Champ de déplacement:

$$\underline{U}(\underline{X}, t) = \underline{x}(\underline{X}, t) - \underline{X} \begin{cases} U_1 = x_1(\underline{X}, t) - X_1 = \alpha t^2 \\ U_2 = x_2(\underline{X}, t) - X_2 = \frac{t}{\tau} X_1 \\ U_3 = x_3(\underline{X}, t) - X_3 = 0 \end{cases}$$

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{x} - \underline{X}(\underline{x}, t) \begin{cases} u_1 = x_1 - X_1(\underline{x}, t) = \alpha t^2 \\ u_2 = x_2 - X_2(\underline{x}, t) = \frac{t}{\tau} (x_1 - \alpha t^2) \\ u_3 = x_3 - X_3(\underline{x}, t) = 0 \end{cases}$$



Champ de vitesse et d'accélération

- Si on suit un point matériel : définition évidente

$$\underline{V}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{x}(\underline{X}, t)}{\partial t} = \underline{v}(\underline{x}, t) \qquad \underline{A}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{V}(\underline{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \underline{x}(\underline{X}, t)}{\partial t^2}$$

→ fonctions des variables de Lagrange, donc quantités **lagrangiennes**

- Si on connaît la description **eulérienne** du mouvement (fluides):

→ accélération = dérivée **particulaire** du champ de vitesse

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}(\underline{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \underline{v}(\underline{x}, t)}{\partial t} + \underline{\underline{grad}}(\underline{v}(\underline{x}, t)) \cdot \underline{v}(\underline{x}, t)$$

→ description de l'accélération d'un point sans en connaître la cinématique

Exemple

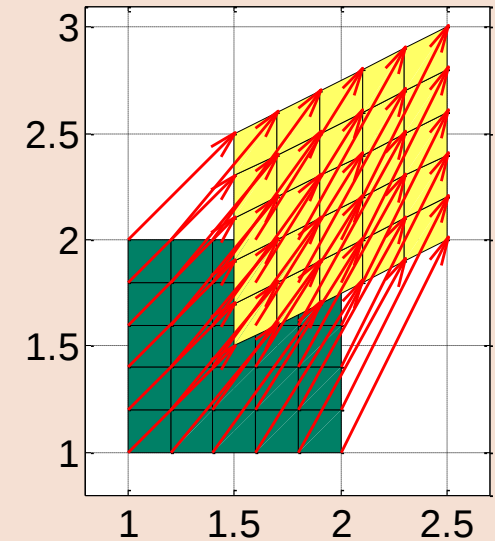
- Champ de déplacement:

$$\begin{cases} U_1(\underline{X}, t) = \alpha t^2 \\ U_2(\underline{X}, t) = \frac{t}{\tau} X_1 \\ U_3(\underline{X}, t) = 0 \end{cases}$$

formulation lagrangienne

$$\begin{cases} u_1(\underline{x}, t) = \alpha t^2 \\ u_2(\underline{x}, t) = \frac{t}{\tau} (x_1 - \alpha t^2) \\ u_3(\underline{x}, t) = 0 \end{cases}$$

formulation eulérienne



- Calcul de la vitesse et de l'accélération

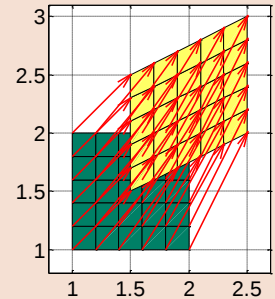
formulation lagrangienne : **facile !**

$$\underline{V}(\underline{X}, t) = \frac{d\underline{U}(\underline{X}, t)}{dt} \quad \underline{A}(\underline{X}, t) = \frac{d\underline{V}(\underline{X}, t)}{dt}$$

formulation eulérienne : **attention : dérivée particulaire !**

Exemple

$$\begin{cases} U_1(\underline{X}, t) = \alpha t^2 \\ U_2(\underline{X}, t) = \frac{t}{\tau} X_1 \\ U_3(\underline{X}, t) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_1(\underline{x}, t) = \alpha t^2 \\ u_2(\underline{x}, t) = \frac{t}{\tau} (x_1 - \alpha t^2) \\ u_3(\underline{x}, t) = 0 \end{cases}$$



- description **lagrangienne**:

$$\underline{V}(\underline{X}, t) = \frac{d\underline{U}(\underline{X}, t)}{dt} = \frac{\partial \underline{U}(\underline{X}, t)}{\partial t} \quad [\underline{V}(\underline{X}, t)] = \begin{pmatrix} 2\alpha t \\ X_1/\tau \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Champ de vitesse à partir de la description **eulérienne**:

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \underline{u}(\underline{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \underline{u}(\underline{x}, t)}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} \quad [\underline{v}(\underline{x}, t)] = \begin{pmatrix} 2\alpha t \\ \frac{x_1}{\tau} - 3\frac{\alpha}{\tau}t^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{t}{\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\alpha t \\ \frac{X_1}{\tau} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha t \\ \frac{1}{\tau}(x_1 - \alpha t^2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ on vérifie: $\underline{v}(\underline{x}, t) = \underline{V}(\underline{X}, t)$

Exemple

$$\underline{V}(\underline{X}, t) = 2\alpha t \underline{e}_1 + X_1/\tau \underline{e}_2$$

- Champ de vitesse :

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = 2\alpha t \underline{e}_1 + \frac{1}{\tau} (x_1 - \alpha t^2) \underline{e}_2$$

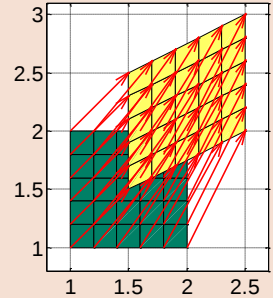
- Champ d'accélération en description **lagrangienne** :

$$\underline{A}(\underline{X}, t) = \frac{d\underline{V}(\underline{X}, t)}{dt} = \frac{\partial \underline{V}(\underline{X}, t)}{\partial t} \quad [\underline{A}(\underline{X}, t)] = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Champ d'accélération en description **eulérienne** :

$$\underline{a}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \underline{v}(\underline{x}, t)}{\partial t} + \underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{v}(\underline{x}, t) \quad [\underline{a}(\underline{x}, t)] = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ -2\frac{\alpha}{\tau}t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\alpha t \\ \frac{1}{\tau}(x_1 - \alpha t^2) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ détermination du champ d'accélération sans connaître la **trajectoire** des particules



CHAP II: Cinématique du milieu continu

Représentation du mouvement

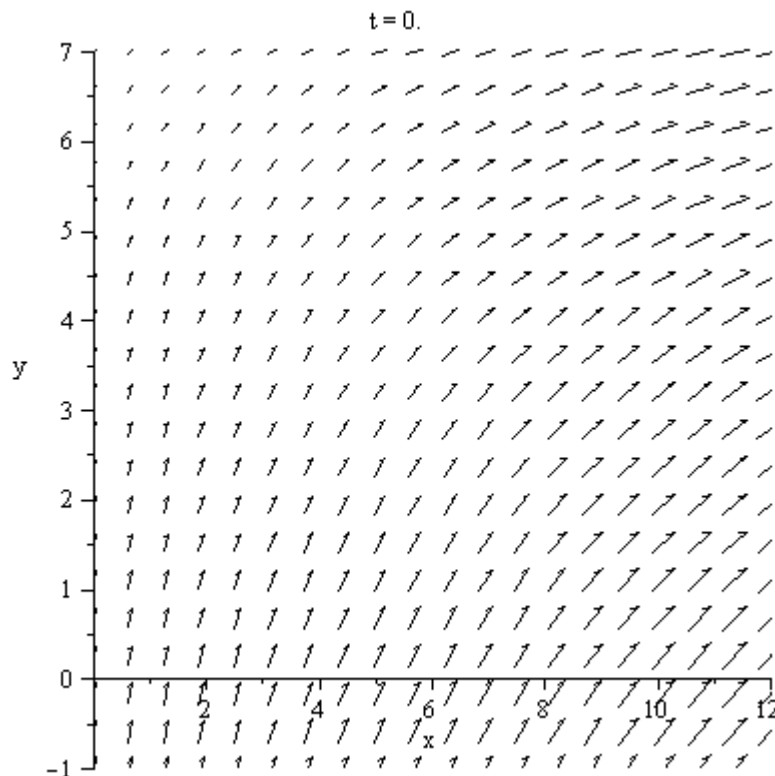
- Repérage des points matériels en mouvement
- Descriptions lagrangienne et eulérienne
- Déplacement, vitesse et accélération
- Quelques caractéristiques de la transformation

Trajectoires

= lieu des positions occupées par un point matériel au cours du temps

→ courbe paramétrée indépendante du temps

→ il y a autant de trajectoires que de points matériels



→ Description **lagrangienne** :

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$$

→ Description **eulérienne** :

$$d\underline{x} = \underline{v}(\underline{x}, t)dt \quad \text{avec} \quad \underline{x}(t=0) = \underline{X}$$

Exemple

- On reprend la transformation: $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$

$$\begin{cases} x_1 = \phi_1(\underline{X}, t) = X_1 + \alpha t^2 \\ x_2 = \phi_2(\underline{X}, t) = \frac{t}{\tau} X_1 + X_2 \\ x_3 = \phi_3(\underline{X}, t) = X_3 \end{cases}$$

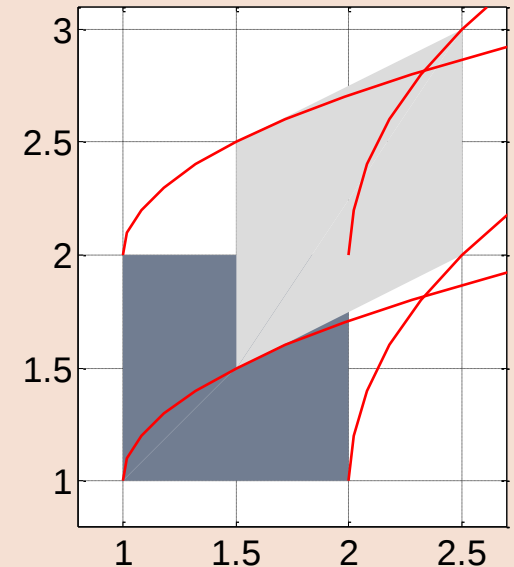
→ description **lagrangienne** = équation des **trajectoires**

- En description **eulérienne** on a vu : $\underline{v}(\underline{x}, t) = 2\alpha t \underline{e}_1 + \frac{1}{\tau} (x_1 - \alpha t^2) \underline{e}_2$

$$\underline{dx} = \underline{v}(\underline{x}, t) dt \Rightarrow \begin{cases} dx_1 = v_1(\underline{x}, t) dt = 2\alpha t dt \\ dx_2 = v_2(\underline{x}, t) dt = \frac{1}{\tau} (x_1 - \alpha t^2) dt \\ dx_3 = v_3(\underline{x}, t) dt = 0 \end{cases}$$

Condition initiale : $\underline{x}(t=0) = \underline{X}$

$$\begin{cases} x_1(t=0) = C_1 = X_1 \\ x_2(t=0) = C_2 = X_2 \\ x_3(t=0) = C_3 = X_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha t^2 + X_1 \\ x_2 = X_1 \frac{t}{\tau} + X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$



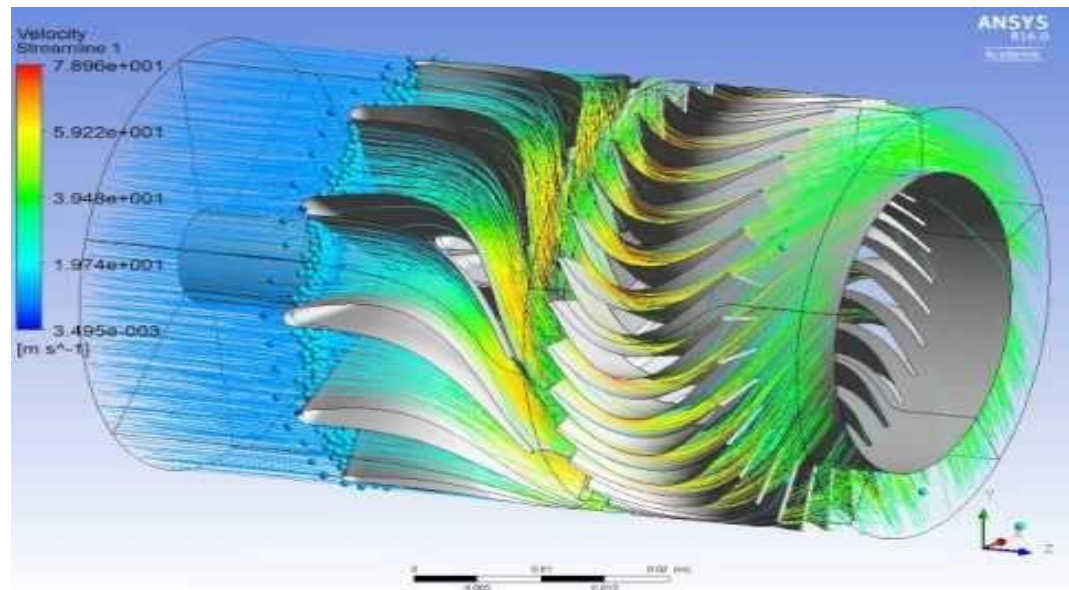
Lignes de courant

= enveloppe des champs des vecteurs vitesses à un instant t

→ Lignes tangentes à $\underline{v}(\underline{x}, t)$: $d\underline{x}$ est sur la ligne si $d\underline{x} \wedge \underline{v}(\underline{x}, t) = \underline{0}$

$$\underline{dx} \wedge \underline{v}(\underline{x}, t) = \underline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx_1}{v_1(\underline{x}, t)} = \frac{dx_2}{v_2(\underline{x}, t)} = \frac{dx_3}{v_3(\underline{x}, t)}$$

Exemple de visualisation:
(vraie à un instant donné)



Exemple

- Pour l'exemple précédent on a calculé le champ de vitesse :

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = 2\alpha t \underline{e}_1 + \frac{1}{\tau} (x_1 - \alpha t^2) \underline{e}_2$$

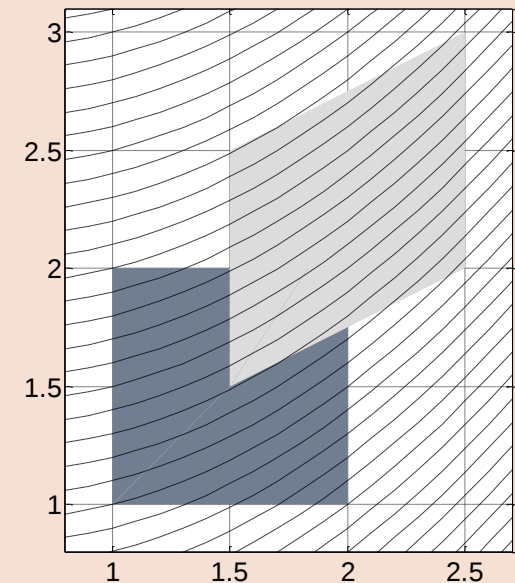
$$\frac{dx_1}{v_1(\underline{x}, t)} = \frac{dx_2}{v_2(\underline{x}, t)} = \frac{dx_3}{v_3(\underline{x}, t)} \Rightarrow \frac{dx_1}{2\alpha t} = \frac{dx_2}{\frac{1}{\tau} (x_1 - \alpha t^2)} \Rightarrow dx_1 \frac{1}{\tau} (x_1 - \alpha t^2) = 2\alpha t dx_2$$

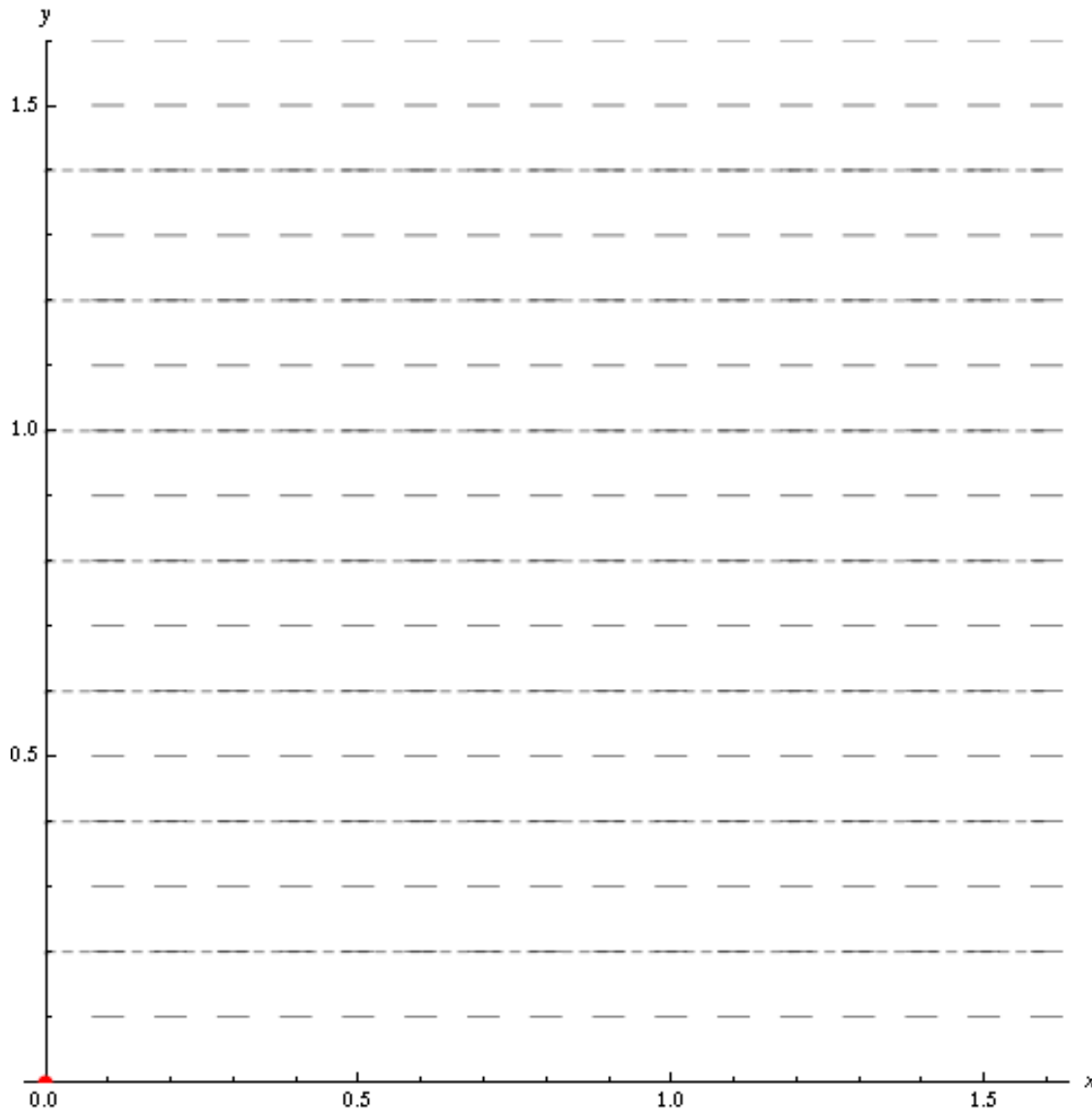
→ Résolution de l'équation différentielle :

$$\frac{1}{\tau} dx_1 x_1 - \frac{\alpha}{\tau} t^2 dx_1 = 2\alpha t dx_2$$

$$\Rightarrow \frac{x_1^2}{2\tau} - \frac{\alpha}{\tau} t^2 x_1 = 2\alpha t x_2 + cste$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{x_1}{2\alpha t \tau} \left(\frac{x_1}{2} - \alpha t^2 \right) + cste$$





En rouge: **trajectoires**

Pointillés: **lignes de courant**

(En bleu: **ligne d'émission** du point d'origine.)

■ Cas du mouvement stationnaire

= sa description eulérienne n'est pas fonction du temps

= champ de vecteurs vitesse fonction de l'espace uniquement

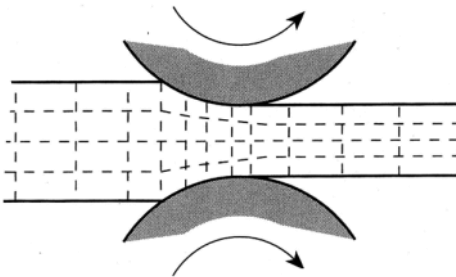
$$\underline{v}(\underline{x}, t) = \underline{v}(\underline{x})$$

Conséquences:

$$\begin{cases} \underline{dx} = \underline{v}(\underline{x})dt \\ \underline{x}(t=0) = \underline{X} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{dx_1}{v_1(\underline{x})} = \frac{dx_2}{v_2(\underline{x})} = \frac{dx_3}{v_3(\underline{x})}$$

= lignes de courant et trajectoires sont identiques

Laminage: stationnaire



Extrusion: non-stationnaire



CHAP II: Cinématique du milieu continu

Le gradient de la transformation

- Présentation
- Expression du gradient de la transformation
- Transport d'un vecteur matériel
- Jacobien de la transformation
- Décomposition polaire
- Transport d'un volume

Vecteur élémentaire liant le point M et le point P infiniment proche de M

$$\underline{dX} = \underline{X}^P - \underline{X}^M \quad \rightarrow \text{dans } K_0$$

Après déformation on a:

$$\underline{x}^M = \underline{\phi}(\underline{X}^M, t) \quad \underline{x}^P = \underline{\phi}(\underline{X}^P, t)$$

Le vecteur élémentaire devient dans K_t :

$$\underline{dx} = \underline{x}^P - \underline{x}^M = \underline{\phi}(\underline{X}^M + \underline{dX}, t) - \underline{\phi}(\underline{X}^M, t)$$

Taylor:
$$f(x + dx) = f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} \frac{1}{1!} dx + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \frac{1}{2!} dx^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} \frac{1}{n!} dx^n$$

Au premier ordre:
$$\underline{dx} = \underline{x}^P - \underline{x}^M = \underline{\phi}(\underline{X}^M + \underline{dX}, t) - \underline{\phi}(\underline{X}^M, t) = \frac{\partial \underline{\phi}(\underline{X}^M, t)}{\partial \underline{X}^M} \cdot d \underline{X}$$

$$d\underline{x} = \underline{x}^P - \underline{x}^M = \underline{\phi}(\underline{X}^M + d\underline{X}, t) - \underline{\phi}(\underline{X}^M, t) = \frac{\partial \underline{\phi}(\underline{X}^M, t)}{\partial \underline{X}^M} \cdot d\underline{X}$$

On exprime alors le **tenseur gradient de la transformation**:

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} = \underline{\underline{Grad}} \underline{x}(\underline{X}, t) \Rightarrow [\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}$$

= **application linéaire tangente** (approximation linéaire locale)

Exemple

Exemple de transformation plane

- On reprend la transformation précédente :

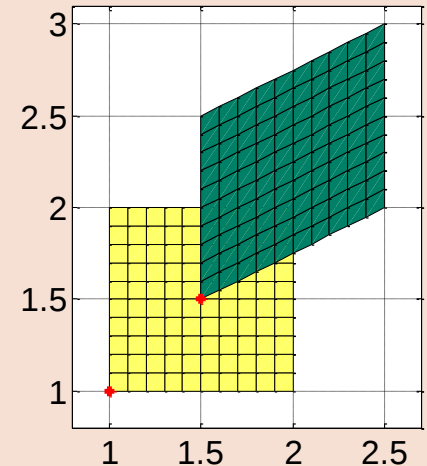
$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \alpha t^2 \\ x_2 = \frac{t}{\tau} X_1 + X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

- Le tenseur **gradient de la transformation** s'exprime :

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{x}(\underline{X}, t)}{\partial \underline{X}} = \frac{\partial x_i(\underline{X}, t)}{\partial X_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{t}{\tau} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$$

$$[\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t/\tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

→ indépendant de $\underline{X}$: transformation **homogène**



CHAP II: Cinématique du milieu continu

Le gradient de la transformation

- Présentation
- Expression du gradient de la transformation
- Transport d'un vecteur matériel
- Jacobien de la transformation
- Décomposition polaire
- Transport d'un volume

- On a vu précédemment : $\underline{u}(\underline{X}, t) = \underline{x}(\underline{X}, t) - \underline{X} \Rightarrow \underline{x}(\underline{X}, t) = \underline{u}(\underline{X}, t) + \underline{X}$
- On peut réécrire le tenseur gradient de la transformation:

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{X}} + \frac{\partial \underline{X}}{\partial \underline{X}} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{X}} + \underline{\underline{I}} \Rightarrow \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{\text{Grad}}}(\underline{u}(\underline{X}, t)) + \underline{\underline{I}}$$

Coordonnées cartésiennes

$$[\underline{\underline{F}}]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}$$

Coordonnées cylindriques

$$[\underline{\underline{F}}]_{(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) & \frac{\partial u_r}{\partial z} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & 1 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) & \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} & 1 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Mouvement de corps rigide

- le milieu subit uniquement une translation

$$\rightarrow \text{champ de déplacement uniforme} \rightarrow \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u} = \underline{\underline{0}} \rightarrow \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}}$$

Exemple

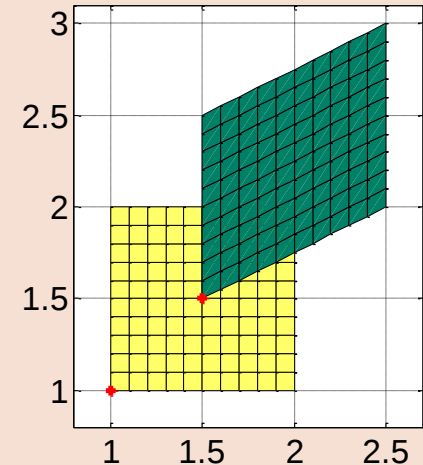
- On reprend la transformation précédente :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \alpha t^2 \\ x_2 = \frac{t}{\tau} X_1 + X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = x_1 - X_1 = \alpha t^2 \\ u_2 = x_2 - X_2 = \frac{t}{\tau} X_1 \\ u_3 = x_3 - X_3 = 0 \end{cases}$$

- Le gradient de la transformation s'écrit:

$$[\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + [\underline{\underline{Grad}} \underline{u}] = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t/\tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Si $t = 0$: mouvement de corps rigide $\rightarrow \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}}$



CHAP II: Cinématique du milieu continu

Le gradient de la transformation

- Présentation
- Expression du gradient de la transformation
- Transport d'un vecteur matériel
- Jacobien de la transformation
- Décomposition polaire
- Transport d'un volume

- Définition :
$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} \rightarrow \partial \underline{x} = \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \cdot \partial \underline{X}$$

- Appliqué à un vecteur matériel quelconque $d\underline{L}$:

$$d\underline{l} = \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \cdot d\underline{L} \quad \text{ou encore} \quad \begin{pmatrix} dl_1 \\ dl_2 \\ dl_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dL_1 \\ dL_2 \\ dL_3 \end{pmatrix}$$

Dilatation

- Dilatation = rapport des normes entre $\underline{A}$ et son transformé $\underline{a}$

$$\lambda = \frac{|\underline{a}|}{|\underline{A}|} = \frac{|\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{A}|}{|\underline{A}|}$$

- Dans le cas d'un mouvement de corps rigide : $\underline{\underline{F}} = \underline{I} \Rightarrow \lambda = 1$

Exemple

- On reprend la transformation précédente :
$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \alpha t^2 \\ x_2 = \frac{t}{\tau} X_1 + X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

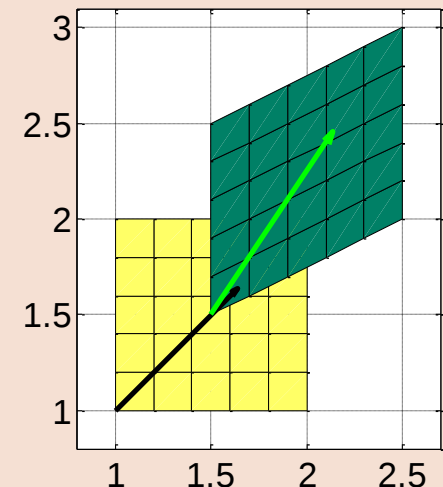
- Le tenseur **gradient de la transformation** s'exprime :

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{x}(\underline{X}, t)}{\partial \underline{X}} = \frac{\partial x_i(\underline{X}, t)}{\partial X_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{t}{\tau} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$$

- On considère le vecteur unitaire: $\underline{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{e}_1 + \underline{e}_2)$

- Transformée du vecteur: $\underline{a} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) \underline{e}_2$

- Dilatation: $\lambda = |\underline{a}| / |\underline{A}| = |\underline{\underline{F}} \cdot \underline{A}| / |\underline{A}| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1+t/\tau}{\sqrt{2}}\right)^2}$



CHAP II: Cinématique du milieu continu

Le gradient de la transformation

- Présentation
- Expression du gradient de la transformation
- Transport d'un vecteur matériel
- Jacobien de la transformation
- Décomposition polaire
- Transport d'un volume

- Matrice des composantes de $\underline{\underline{F}} =$ matrice **jacobienne**

$$\left[\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \right] = \begin{pmatrix} \partial x_1 / \partial X_1 & \partial x_1 / \partial X_2 & \partial x_1 / \partial X_3 \\ \partial x_2 / \partial X_1 & \partial x_2 / \partial X_2 & \partial x_2 / \partial X_3 \\ \partial x_3 / \partial X_1 & \partial x_3 / \partial X_2 & \partial x_3 / \partial X_3 \end{pmatrix}$$

- Déterminant de la matrice jacobienne = $J =$ **jacobien** de la transfo

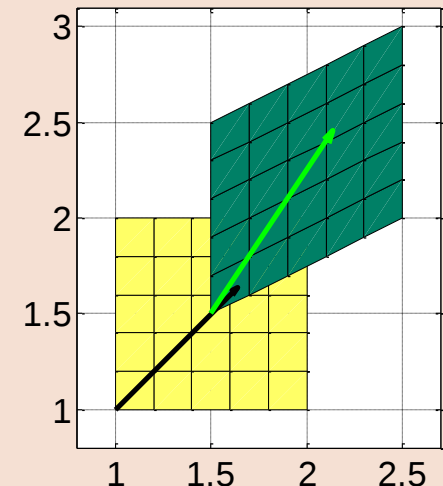
$$J = \det \underline{\underline{F}} = \det \left[\underline{\underline{F}} \right]$$

Exemple

- Matrice jacobienne : $\left[\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t/\tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Jacobien de la transformation :

$$J = \det \left[\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \right] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t/\tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

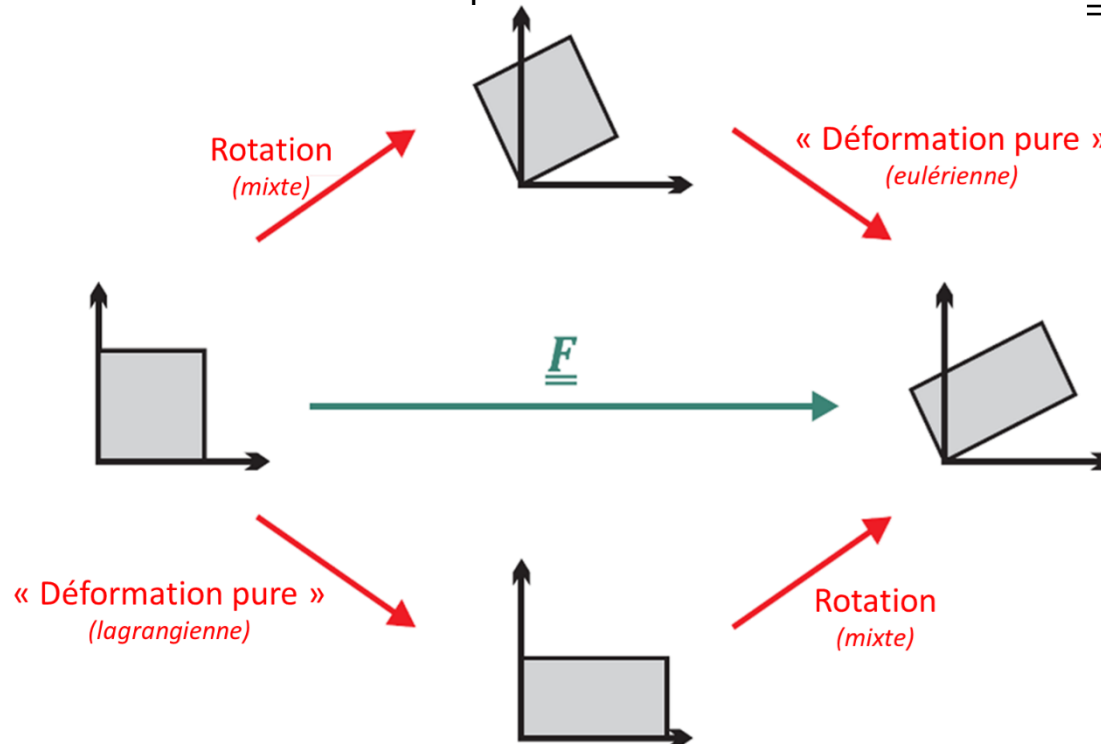


CHAP II: Cinématique du milieu continu

Le gradient de la transformation

- Présentation
- Expression du gradient de la transformation
- Transport d'un vecteur matériel
- Jacobien de la transformation
- Décomposition polaire
- Transport d'un volume

- Le tenseur $\underline{\underline{F}}$ contient toute l'information sur la transformation
→ Mouvements de corps rigide **ET** déformation
- On montre qu'on peut effectuer la décomposition suivante :
 - Cas 1** : une rotation $\underline{\underline{R}}$ suivie d'une déformation pure
 - Cas 2** : une déformation pure suivie d'une rotation $\underline{\underline{R}}$



CHAP II: Cinématique du milieu continu

Le gradient de la transformation

- Présentation
- Expression du gradient de la transformation
- Transport d'un vecteur matériel
- Jacobien de la transformation
- Décomposition polaire
- Transport d'un volume

- La transformation est une **bijection** de K_0 dans K_t

→ il existe un tenseur **inverse** $\underline{\underline{F}}^{-1}$ tel que: $\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \underline{X}}{\partial \underline{x}} = \underline{\underline{grad}}(\underline{X}(\underline{x}, t))$

$$d\underline{L} = \underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{x}, t) \cdot d\underline{l}$$

Interlude mathématique

Inverse d'un tenseur d'ordre 2:

- Un tenseur $\underline{\underline{T}}$ est **inversible** $\det \underline{\underline{T}} \neq 0$

→ le tenseur **inverse** est noté $\underline{\underline{T}}^{-1}$ et on a: $\underline{\underline{T}}^{-1} \cdot \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T}}^{-1}$

- Si deux tenseurs $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$ sont **inversibles**:

$$(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1}$$

$$(\underline{\underline{A}}^{-1})^{-1} = \underline{\underline{A}}$$

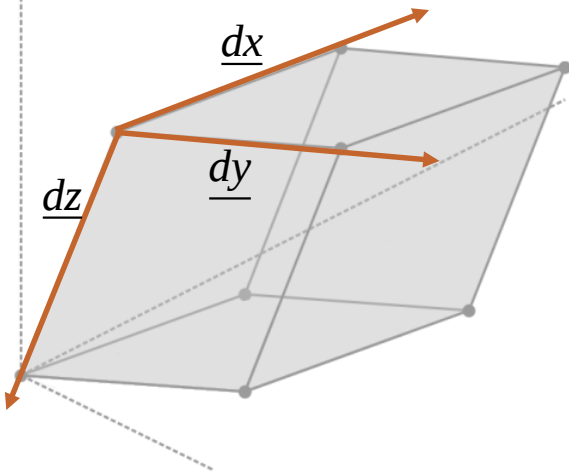


- Pour que la transformation soit bijective (et que $\underline{\underline{F}}^{-1}$ existe), le déterminant J de la matrice jacobienne est nécessairement non nul

$$J = \det \underline{\underline{F}} \neq 0$$

- Le volume $d\Omega$ du parallélépipède formé par $(\underline{dx}, \underline{dy}, \underline{dz})$ s'écrit :

$$d\Omega = \det(\underline{dx}, \underline{dy}, \underline{dz})$$



→ On montre que (pas ici ...) : $d\Omega = \det \underline{\underline{F}} d\Omega_0$

Au final:
$$\frac{d\Omega}{d\Omega_0} = \det \underline{\underline{F}} = J$$

$$0 < \det \underline{\underline{F}} = J < +\infty$$

Jacobien = **variation locale de volume**

Exemple

Exemple de transformation plane

- La transformation se fait elle à volume constant ?:

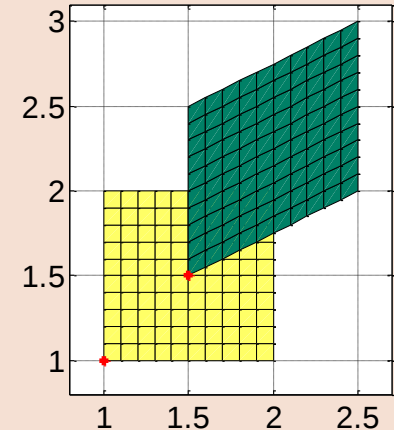
- Solution 1** : calculer le volume avant et après transformation

→ Possible uniquement si le volume est facile à calculer !!

- Solution 1** : Jacobien de la transformation

$$J = \det \left[\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \right] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t/\tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \frac{d\Omega}{d\Omega_0} = \det \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = 1$$

→ Oui , le volume est conservé !



CHAP II: Cinématique du milieu continu

Les déformations du milieu continu

- Recherche d'un tenseur des déformations
- Cas des transformations infinitésimales
- Mouvement de corps rigide

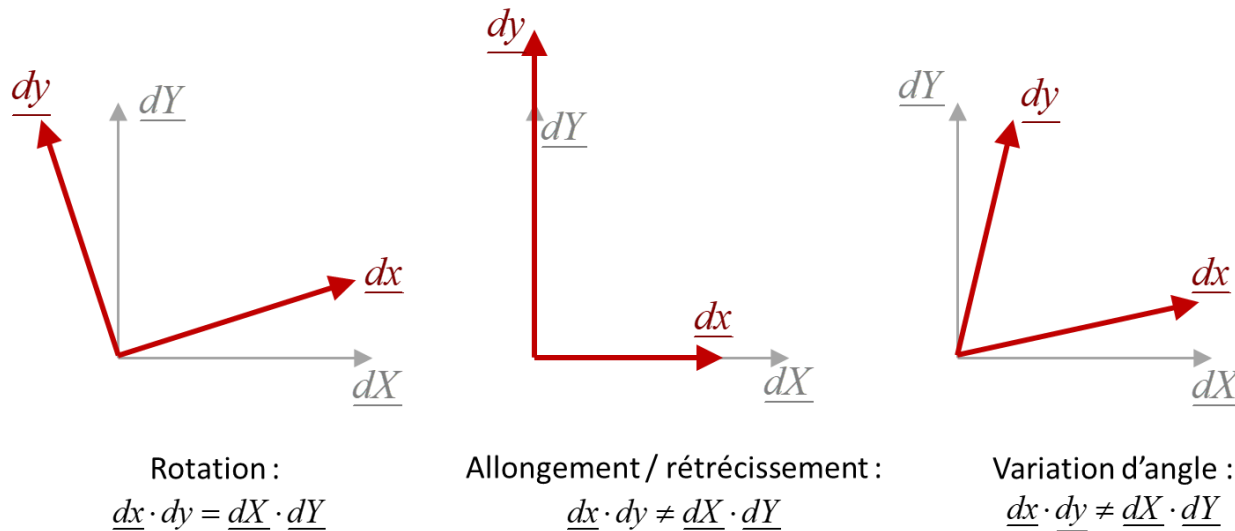
Rappel : gradient de la transformation et décomposition polaire

- On a introduit précédemment $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{Grad}}(\underline{u}) + \underline{\underline{I}}$

→ Il se décompose en une rotation pure et une déformation pure

Objectif : construire un tenseur **déformations**, qui ne contient pas la rotation $\underline{\underline{R}}$, et qui est **nul** lors d'un mouvement de corps rigide

Idée : évolution du **produit scalaire** entre deux vecteurs:
✓ Pas modifié lors d'un mouvement de corps rigide



Tenseur de Green-Lagrange

- Considérons en M deux vecteurs matériels $\underline{dX}, \underline{dY}$

→ Après transformation on a: $\underline{dx} = \underline{F}(\underline{X}, t) \cdot \underline{dX}$ $\underline{dy} = \underline{F}(\underline{X}, t) \cdot \underline{dY}$

- Evolution du produit scalaire de ces vecteurs:

$$\underline{dx} \cdot \underline{dy} = (\underline{F} \cdot \underline{dX}) \cdot (\underline{F} \cdot \underline{dY}) = \underline{dX} \cdot \underline{F}^T \cdot \underline{F} \cdot \underline{dY}$$

$$\underline{dx} \cdot \underline{dy} - \underline{dX} \cdot \underline{dY} = \underline{dX} \cdot \underline{F}^T \cdot \underline{F} \cdot \underline{dY} - \underline{dX} \cdot \underline{I} \cdot \underline{dY} = \underline{dX} \cdot \underbrace{(\underline{F}^T \cdot \underline{F} - \underline{I})}_{2\underline{E}} \cdot \underline{dY}$$

- On introduit le tenseur de Green-Lagrange : $\underline{E} = \frac{1}{2}(\underline{F}^T \cdot \underline{F} - \underline{I})$
- On montre facilement qu'il est **lagrangien** et **symétrique**

Tenseur de Green-Lagrange en fonction du déplacement

- Tenseur de déformation de Green-Lagrange :
$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}})$$
- On a vu précédemment :
$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u}(\underline{X}, t)$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{E}} &= \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) = \frac{1}{2} ((\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u})^T \cdot (\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u}) - \underline{\underline{I}}) \\ &= \frac{1}{2} (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u} + (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u})^T + (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u})^T \cdot \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u}) \end{aligned}$$

- Si l'on connaît $\underline{\underline{E}}$, le champ $\underline{u}$ s'obtient par intégration (à condition qu'il soit intégrable...)
- le champ $\underline{u}$ s'obtient à un mouvement de corps rigide près

Exemple

- On a calculé le gradient de la transformation précédente :

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 + \frac{t}{\tau} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1$$

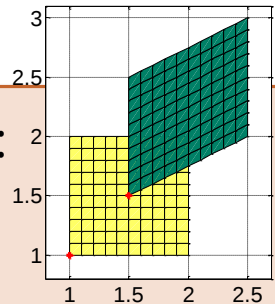
$$[\underline{\underline{E}}] = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & t/\tau & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t/\tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = [\underline{\underline{E}}] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (t/\tau)^2 & t/\tau & 0 \\ t/\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Deuxième forme en fonction du déplacement

$$\underline{u}(\underline{X}, t) = \alpha t^2 \underline{e}_1 + \frac{t}{\tau} X_1 \underline{e}_2$$

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T \cdot \underline{\underline{Grad}} \underline{u} \right)$$

$$[\underline{\underline{E}}] = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t/\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t/\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t/\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t/\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (t/\tau)^2 & t/\tau & 0 \\ t/\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



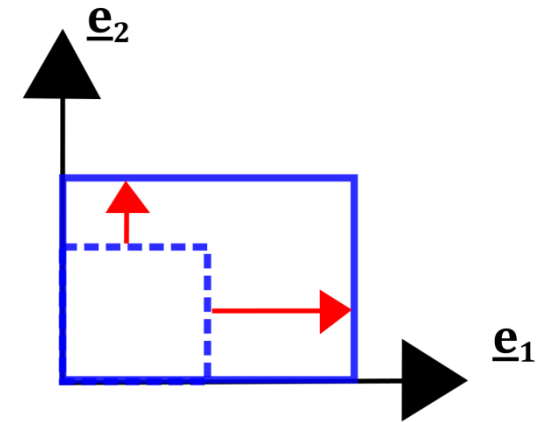
OK !

■ **Traction biaxiale:**

$$\begin{cases} x_1 = \phi_1(X, t) = a(t) X_1 \\ x_2 = \phi_2(X, t) = b(t) X_2 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{Grad}} \underline{\phi}(\underline{X}, t) \Rightarrow [\underline{\underline{F}}] = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) \Rightarrow [\underline{\underline{E}}] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a^2 - 1 & 0 \\ 0 & b^2 - 1 \end{pmatrix}$$

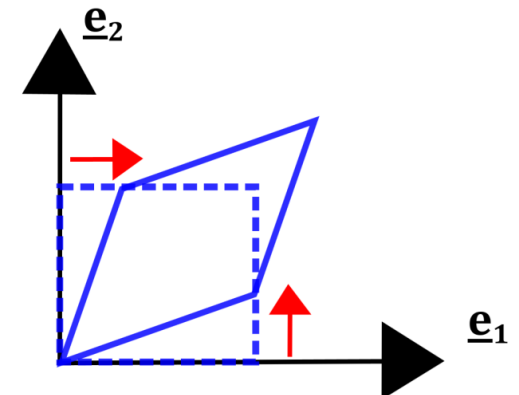


■ **Cisaillement:**

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + a(t) X_2 \\ x_2 = b(t) X_1 + X_2 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{Grad}} \underline{\phi}(\underline{X}, t) \Rightarrow [\underline{\underline{F}}] = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) \Rightarrow [\underline{\underline{E}}] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b^2 & a+b \\ a+b & a^2 \end{pmatrix}$$



A retenir absolument :

Les composantes des tenseurs de déformation sont sans dimension

CHAP II: Cinématique du milieu continu

Les déformations du milieu continu

- Recherche d'un tenseur des déformations
- Cas des transformations infinitésimales
- Mouvement de corps rigide

Tenseur de déformation de Green-Lagrange:

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{Grad}} \underline{u}(\underline{X}, t) + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u}(\underline{X}, t))^T + \underbrace{\underline{\underline{Grad}} \underline{u}(\underline{X}, t)^T \cdot (\underline{\underline{Grad}} \underline{u}(\underline{X}, t))}_{\text{terme non-linéaire}} \right)$$

terme non-linéaire

→ cas des **petites déformations** : $\underline{\underline{Grad}} \underline{u}(\underline{X}, t) \ll 1$

$$\underline{\underline{Grad}} \underline{u}^T \cdot (\underline{\underline{Grad}} \underline{u}) \ll \underline{\underline{Grad}} \underline{u}$$

→ cas des **petits déplacements**: on peut confondre K_0 et K_t

petits déplacements + petites déformations =

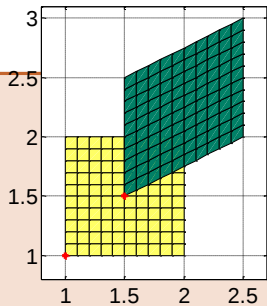
hypothèses des petites perturbations (HPP)

→ Dans ce cas on note

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \lim_{\underline{\underline{Grad}} \underline{u} \rightarrow 0} \underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T + \cancel{(\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T \cdot \underline{\underline{Grad}} \underline{u}} \right)$$

On introduit le **tenseur des déformations linéarisé (en HPP)**:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u}(\underline{X}, t) + (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u}(\underline{X}, t))^T \right) \Rightarrow [\underline{\underline{\varepsilon}}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) \\ & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \\ \text{sym} & & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}$$



Exemple

$$\begin{cases} x_1 = X_1 + \alpha t^2 \\ x_2 = (t/\tau) X_1 + X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u}(\underline{X}, t) = \frac{t}{\tau} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1$$

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left((t/\tau)^2 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + t/\tau (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2) \right)$$

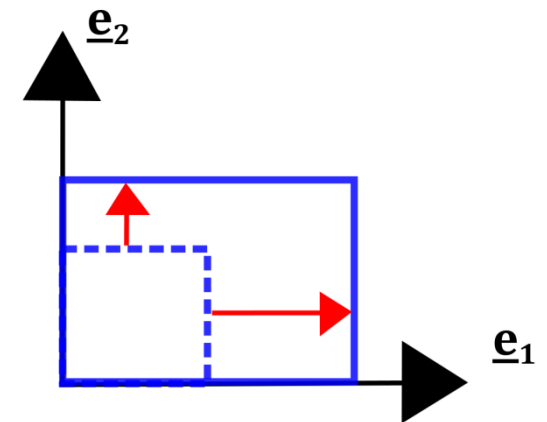
$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u}(\underline{X}, t) + (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u}(\underline{X}, t))^T \right) = \frac{1}{2} \frac{t}{\tau} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2)$$

Equivalents
quand
 $t^2 \ll t$

■ **Traction biaxiale:**
$$\begin{cases} x_1 = \phi_1(X, t) = a(t) X_1 \\ x_2 = \phi_2(X, t) = b(t) X_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = (a-1) X_1 \\ u_2 = (b-1) X_1 \end{cases} \Rightarrow [\underline{\underline{Grad}} \underline{u}] = \begin{pmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & b-1 \end{pmatrix}$$

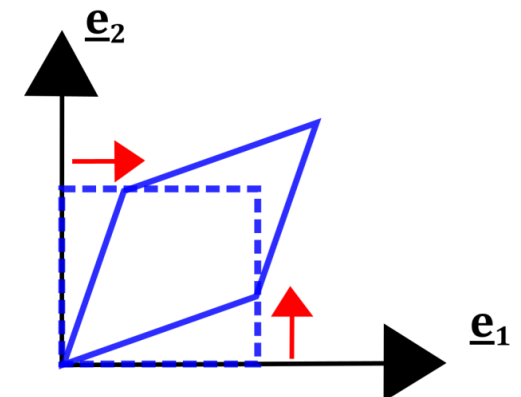
$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T) \Rightarrow [\underline{\underline{\varepsilon}}] = \begin{pmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & b-1 \end{pmatrix}$$



■ **Cisaillement:**
$$\begin{cases} x_1 = X_1 + a(t) X_2 \\ x_2 = b(t) X_1 + X_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = a X_2 \\ u_2 = b X_1 \end{cases} \Rightarrow [\underline{\underline{Grad}} \underline{u}] = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T) \Rightarrow [\underline{\underline{\varepsilon}}] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ b+a & 0 \end{pmatrix}$$



Tenseur des déformations linéarisées (HPP): interprétation

- Tenseur de déformation de **Green-Lagrange**: évolution du produit $\underline{dx} \cdot \underline{dy}$

$$\underline{dx} \cdot \underline{dy} - \underline{dX} \cdot \underline{dY} = \underline{dX} \cdot \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{dY} - \underline{dX} \cdot \underline{\underline{I}} \cdot \underline{dY} = 2\underline{dX} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{dY}$$

- En **HPP** on peut donc noter : $\underline{dx} \cdot \underline{dy} - \underline{dX} \cdot \underline{dY} \approx 2\underline{dX} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{dY}$

- On choisit $\underline{dX} = \underline{dY} = dX \underline{e}_1$: $\underline{dx} \cdot \underline{dx} = dx^2 \approx 2\underline{dX} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{dX} + \underline{dX} \cdot \underline{dX}$
 $\Rightarrow dx^2 \approx 2\varepsilon_{11} dX^2 + dX^2 = dX^2 (1 + 2\varepsilon_{11})$

- HPP** : développement limité au premier ordre : $\frac{dx}{dX} \approx \sqrt{1 + 2\varepsilon_{11}} \approx 1 + \varepsilon_{11}$

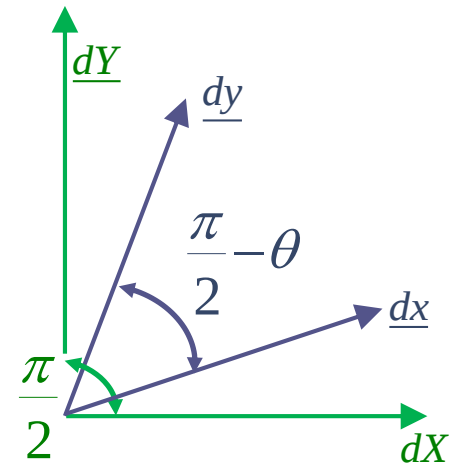
→ ε_{11} est l'**allongement**(si >0) ou **rétrécissement** (si <0) relatif selon $\underline{e}_1$

Tenseur des déformations linéarisées (HPP): interprétation

On choisit maintenant $\underline{dX} = dX \underline{e}_1$ et $\underline{dY} = dY \underline{e}_2$

$$\underline{dx} \cdot \underline{dy} \approx 2 \underline{dX} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{dY} + \cancel{\underline{dX} \cdot \underline{dY}}$$

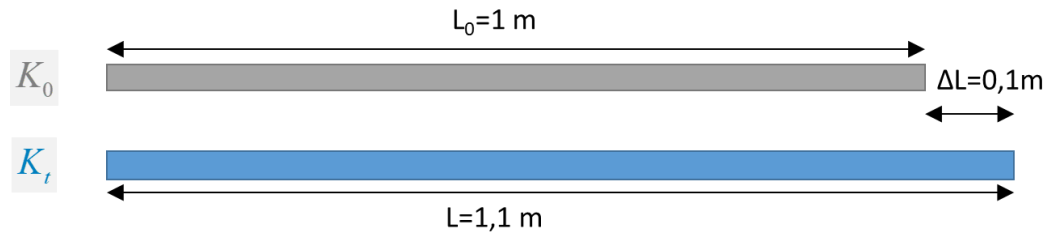
$$\widehat{(\underline{dx}, \underline{dy})} = \frac{\pi}{2} - \theta \Rightarrow \underline{dx} \cdot \underline{dy} = dx dy \sin \theta \approx dx dy \theta \approx 2 dX^2 \varepsilon_{12}$$



HPP $\rightarrow$ on s'arrête au premier ordre : $\theta \approx 2\varepsilon_{12}$

$\rightarrow \varepsilon_{12}$ représente la moitié de la **variation d'angle** entre $\underline{dx}$ et $\underline{dy}$

Concrètement : quelle déformation utiliser ???



- Nouvelle longueur après allongement : $L = L_0 + \Delta L$
- Déplacement (1D) : $u(X) = \Delta L \left(\frac{X}{L} \right)$
- Déformation de Green-Lagrange: $E = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta L}{L} + \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2 \right) = \frac{\Delta L}{L} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2$
- Déformation en HPP: $\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta L}{L} \right) = \frac{\Delta L}{L}$

- Application numérique

$\begin{cases} E = 0.105 = 10.5\% \\ \varepsilon = 0.10 = 10\% \end{cases}$	$\rightarrow 5\% \text{ d'erreur !}$
---	--------------------------------------

CHAP II: Cinématique du milieu continu

Les déformations du milieu continu

- Recherche d'un tenseur des déformations
- Cas des transformations infinitésimales
- Mouvement de corps rigide

- On considère un solide **indéformable** en déplacement

→ Décomposition polaire $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{R}}$

- Tenseur de Green-Lagrange :

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{R}} - \underline{\underline{I}}) = \underline{\underline{0}} \quad \text{car} \quad \underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{I}}$$

- Déplacements importants : HPP non satisfaite ! Si HPP: $\underline{\underline{\varepsilon}} \approx \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{0}}$

- Rappel : décomposition partie symétrique / antisymétrique

→ $\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{u}} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{u}})^T)$ est la partie symétrique de $\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{u}}$

→ $\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{\Lambda}} + \cancel{\underline{\underline{\Omega}}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{u}} - (\underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{u}})^T) \Rightarrow \underline{\underline{Grad}} \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{\Lambda}}$

- Par intégration : $\frac{d\underline{\underline{u}}}{d\underline{\underline{X}}} = \underline{\underline{\Lambda}} \Rightarrow \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}}_0 + \underline{\underline{\Lambda}} \cdot \underline{\underline{X}} \Rightarrow \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}}_0 + \underline{\underline{\Omega}} \wedge \underline{\underline{X}}$
vecteur adjoint

Exemple

- Solide indéformable en rotation : rotation $\underline{\underline{\Omega}} = \Omega \underline{e}_z$
- Ecriture évidente du déplacement : $\underline{u} = \Omega R \underline{e}_\theta$
- Calcul du gradient du déplacement (formulaire) :

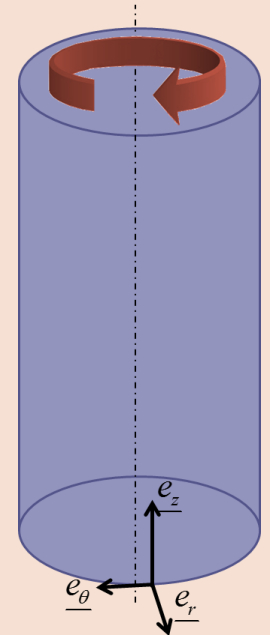
$$\underline{\underline{Grad}} \underline{u} = \frac{-u_\theta}{R} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial R} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r = -\Omega \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \Omega \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r$$

→ tenseur antisymétrique , on note : $\underline{\underline{Grad}} \underline{u} = \underline{\underline{\Lambda}}$

- Déformation du solide (indéformable !) :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T \right) = \frac{1}{2} \left(-\Omega \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \Omega \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \Omega \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta - \Omega \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r \right) = \underline{\underline{0}}$$

- Déplacement du point $\underline{X} = R \underline{e}_r$:
$$[\underline{u}] = \cancel{[\underline{u}_0]} + \begin{pmatrix} 0 & -\Omega & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \Omega R \underline{e}_\theta$$



CHAP II: Cinématique du milieu continu

Taux de déformation

- On se place en description eulérienne : $\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, t)$
- Dérivation par rapport au temps du produit scalaire :

$$\underline{\dot{dx}} \cdot \underline{dy} - \cancel{\underline{\dot{dX}} \cdot \underline{\dot{dY}}} = \underline{\dot{dx}} \cdot \underline{dy} + \underline{dx} \cdot \underline{\dot{dy}}$$

- Définition de l'opérateur gradient $\rightarrow$

$$\begin{cases} \underline{\dot{dx}} = \underline{dv} = \underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{dx} \\ \underline{\dot{dy}} = \underline{dv} = \underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{dy} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{k}} = \underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) = \text{tenseur de description eulérienne}$$

- Evolution du produit scalaire :

$$\underline{\dot{dx}} \cdot \underline{dy} - \cancel{\underline{\dot{dX}} \cdot \underline{\dot{dY}}} = \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{dx} \right) \cdot \underline{dy} + \underline{dx} \cdot \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{dy} \right)$$

$$\underline{\dot{dx}} \cdot \underline{dy} = \underline{dx} \cdot \left(\left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \right)^T + \underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \right) \cdot \underline{dy} = \underline{dx} \cdot 2\underline{\underline{d}} \cdot \underline{dy}$$

→ On introduit le tenseur **vitesse** (ou **taux**) de **déformation** eulérienne :

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) + \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \right)^T \right) \quad \text{ou encore} \quad d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

= partie symétrique du gradient du champ de vitesses

A partir du tenseur de description eulérienne on décompose:

$$\underline{\underline{k}} = \underline{\underline{d}} + \underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{k}} + \underline{\underline{k}}^T) + \frac{1}{2} (\underline{\underline{k}} - \underline{\underline{k}}^T)$$

→ On introduit le tenseur **vitesse de rotation** :

$$\underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) - \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \right)^T \right) \quad \text{ou encore} \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

= partie antisymétrique du gradient du champ de vitesses

Exemple

- On reprend la transformation précédente :

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = 2\alpha t \underline{e}_1 + \frac{1}{\tau} (x_1 - \alpha t^2) \underline{e}_2$$

- Le tenseur de description eulérienne s'écrit :

$$\underline{\underline{k}} = \underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) = \frac{1}{\tau} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1$$

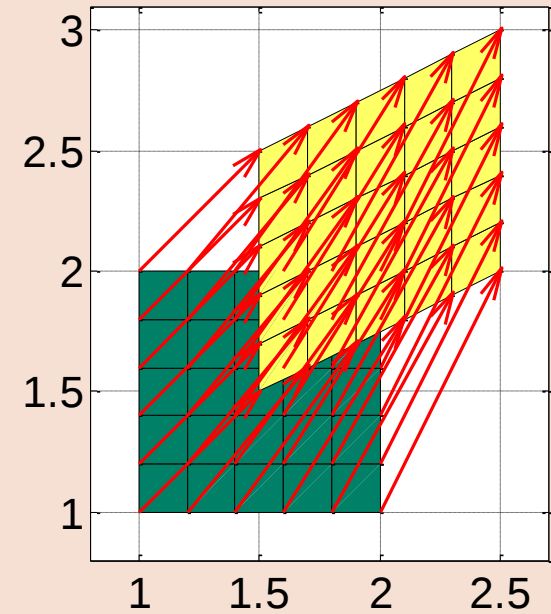
- En en déduit les deux quantités:

$$2\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) + \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \right)^T = \frac{1}{\tau} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2)$$

$$2\underline{\underline{\Omega}} = \underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) - \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \right)^T = \frac{1}{\tau} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 - \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2)$$

→ taux de déformation constant et homogène

→ vitesse de rotation constante et homogène



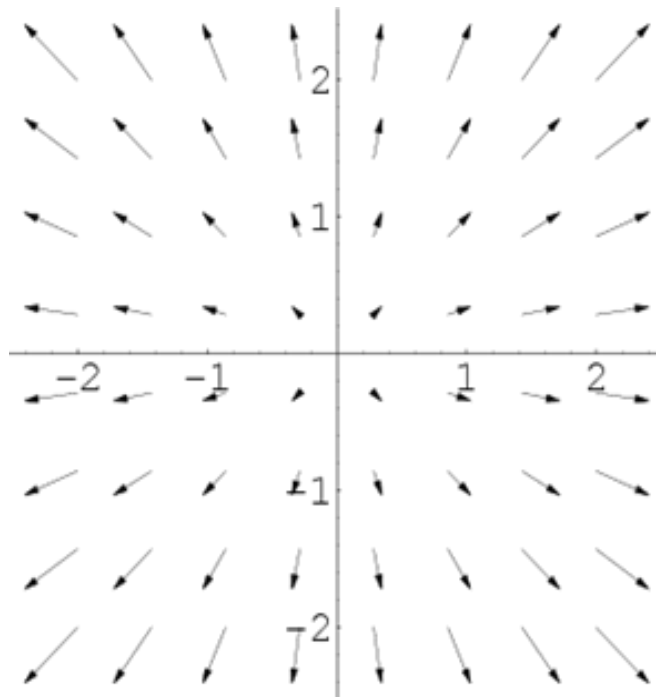
CHAP II: Cinématique du milieu continu

La conservation de la masse

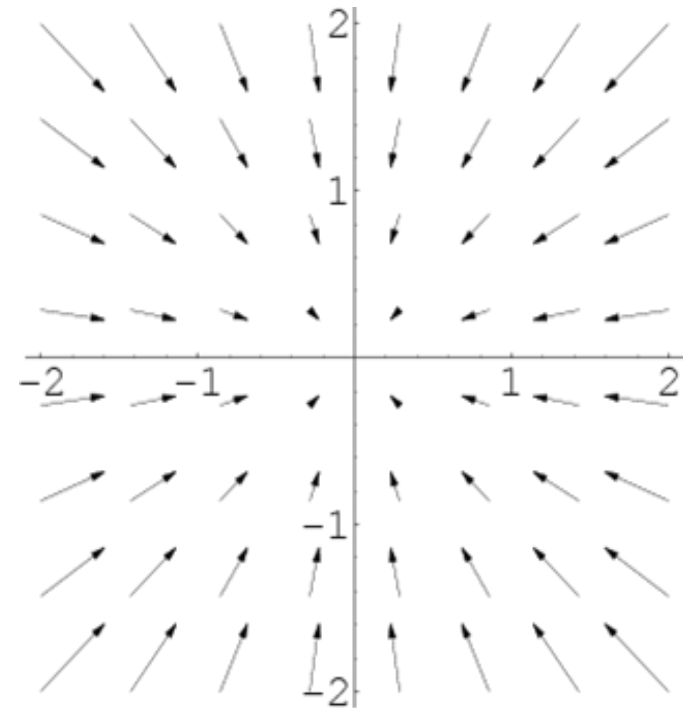
- Bagage mathématique : opérateur divergence
- Dérivée particulaire d'une intégrale de volume
- Equation de conservation de la masse

Divergence d'un champ de vecteurs

- Un champ de vecteurs $\underline{T}(\underline{x}) \rightarrow$ **divergence** = champ **scalaire**



$$\text{Div } \underline{T}(0) > 0$$



$$\text{Div } \underline{T}(0) < 0$$

Divergence d'un champ de vecteurs

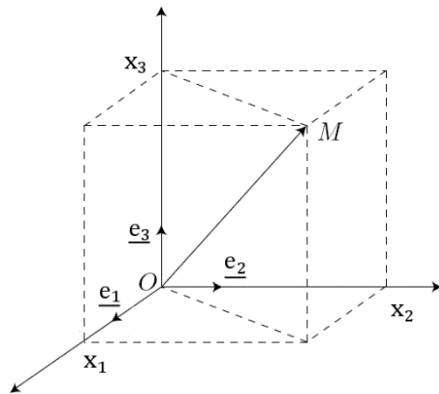
- Soit $\underline{T}(\underline{x})$ un champ de vecteurs défini sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$
- Le gradient de $\underline{T}(\underline{x})$ est un champ de tenseurs d'ordre 2
- On peut définir la **divergence** de $\underline{T}(\underline{x})$ de la façon suivante:

$$\text{div}(\underline{T}(\underline{x})) = \text{Tr}(\underline{\underline{\text{grad}(\underline{T}(\underline{x}))}})$$

→ Pas souligné car c'est un scalaire

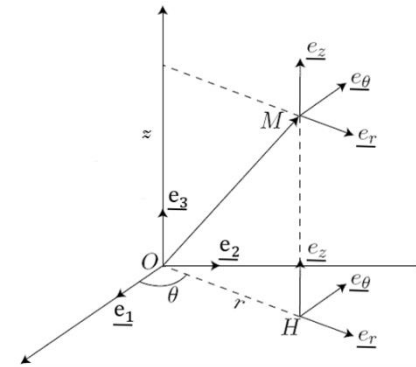
Divergence d'un champ de vecteurs

■ Coordonnées **cartésiennes**



$$\operatorname{div} \underline{T} = \operatorname{Tr} \left[\underline{\underline{\operatorname{grad} T}} \right] = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} + \frac{\partial T_2}{\partial x_2} + \frac{\partial T_3}{\partial x_3}$$

■ Coordonnées **cylindriques**



$$\operatorname{div} \underline{T} = \operatorname{Tr} \left[\underline{\underline{\operatorname{grad} T}} \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial (r T_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial T_z}{\partial z}$$

→ champ de scalaires

Divergence d'un champ de tenseurs d'ordre 2

- Beaucoup plus difficile à interpréter !!!

- Définition mathématique : $\underline{\underline{div}} \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{\nabla}}$

- En cartésiennes :
$$[\underline{\underline{div}} \underline{\underline{T}}]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

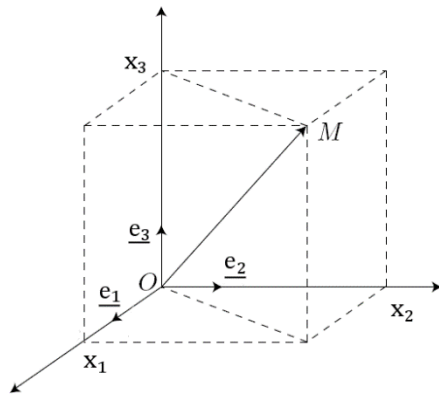
→ Souligné = champ de vecteurs

- La relation suivante sera souvent utilisée:

$$\underline{\underline{div}}(\alpha \underline{\underline{T}}) = \alpha \underline{\underline{div}}(\underline{\underline{T}}) + \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{grad}}(\alpha)$$

Divergence d'un champ de tenseurs d'ordre 2

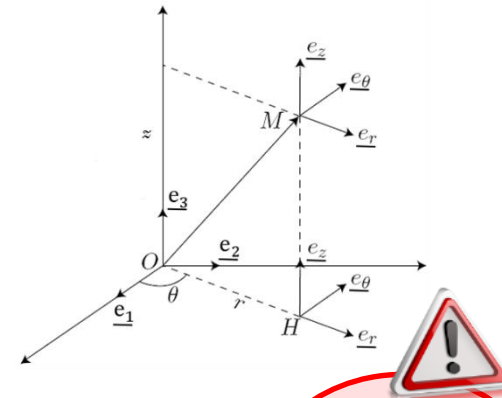
Coordonnées **cartésiennes**



$$[\underline{\text{div}} \underline{T}] = [\underline{T} \cdot \underline{\nabla}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

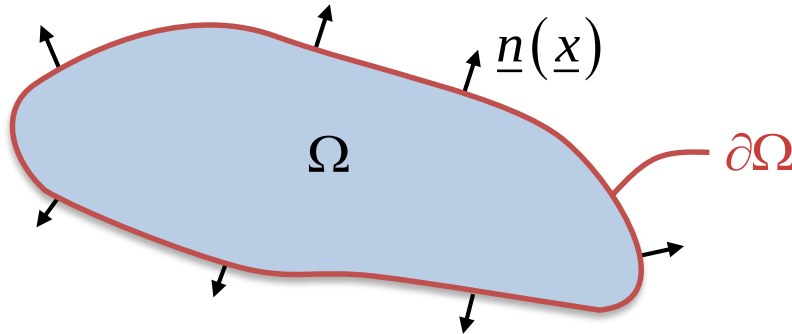
→ champ de vecteurs

Coordonnées **cylindriques**



$$[\underline{\text{div}} \underline{T}] = [\underline{T} \cdot \underline{\nabla}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (T_{rr} - T_{\theta\theta}) + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (T_{\theta r} - T_{r\theta}) + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} T_{zr} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Divergence d'un champ de tenseurs: formulation intégrale



$\underline{n}(\underline{x}) da$: élément de surface orienté

- Théorème de flux-divergence = **théorème de la divergence**
= formule de Stokes-Ostrogradski

Le flux du tenseur à travers $\partial\Omega$ est égal à l'intégrale de la divergence de ce tenseur sur tout le volume Ω

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_{\Omega} \text{div}(\underline{T}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \underline{T} \cdot \underline{n} da \\ \int_{\Omega} \underline{\text{div}}(\underline{\underline{T}}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{T}} \cdot \underline{n} da \end{cases}$$

- Le **laplacien** d'un champ de tenseurs est égal à la **divergence** de son **gradient**

→ l'opérateur gradient « augmente l'ordre » du tenseur :

Gradient de scalaires (ordre 0) = vecteurs (ordre 1)

Gradient de vecteurs (ordre 1) = tenseurs d'ordre 2

→ l'opérateur divergence « diminue l'ordre » du tenseur :

Divergence de vecteurs (ordre 1) = scalaires (ordre 0)

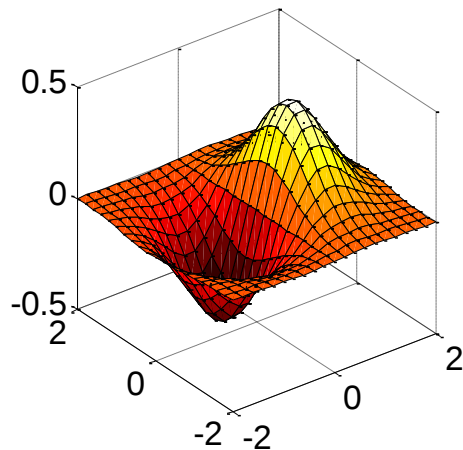
Divergence de tenseurs d'ordre 2 = vecteurs (ordre 1)

→ Le **laplacien** conserve l'ordre du tenseur

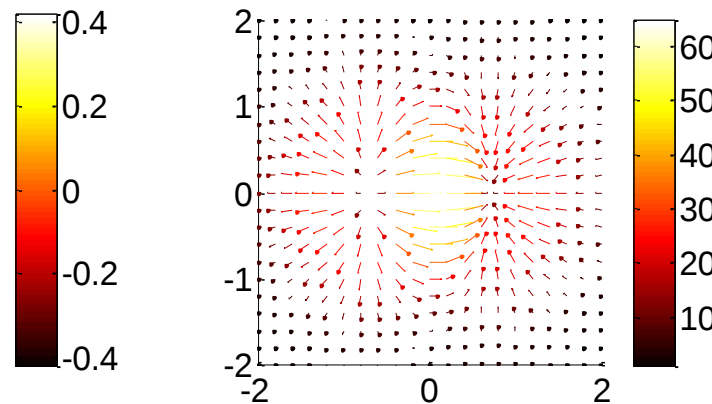
$$\Delta T = \operatorname{div}(\underline{\operatorname{grad} T})$$

$$\underline{\underline{\Delta T}} = \underline{\underline{\operatorname{div}}}(\underline{\underline{\operatorname{grad} T}})$$

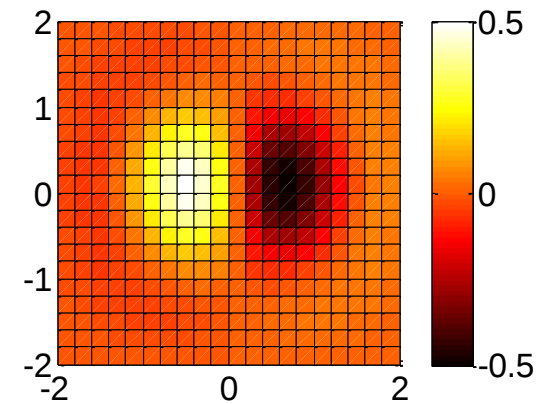
$$z(\underline{x}) = x_1 e^{-(x_1^2 + x_2^2)}$$



Fonction scalaire



Gradient



Laplacien

CHAP II: Cinématique du milieu continu

La conservation de la masse

- Bagage mathématique : opérateur divergence
- Dérivée particulaire d'une intégrale de volume
- Equation de conservation de la masse

- **Problématique:**

On veut exprimer la conservation d'une quantité $b(\underline{x}, t)$

→ évolution temporelle de quantités eulériennes intégrées sur un volume

- Soit un volume Ω_t de frontière $\partial\Omega_t$ dans la configuration actuelle K_t

→ on cherche à exprimer : $\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t) d\Omega_t = ?$

- D'après ce qui précède :

$$\begin{cases} \frac{d\Omega}{d\Omega_0} = \det \underline{\underline{F}} = J \\ \underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t) d\Omega_t = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} b(\phi(\underline{X}, t), t) J d\Omega_0$$

- Le volume Ω_0 dans la configuration de référence est fixe et donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t) d\Omega_t &= \int_{\Omega_0} \frac{d}{dt} (b(\phi(\underline{X}, t), t) J) d\Omega_0 \\ &= \int_{\Omega_0} \underbrace{\left(\frac{d}{dt} (b(\phi(\underline{X}, t), t)) \right) J + b(\phi(\underline{X}, t), t) \frac{d}{dt} (J)}_{\text{dérivée particulière}} d\Omega_0 \end{aligned}$$

- On a vu que $\dot{J} = \text{div } \underline{v} J$, et on exprime la dérivée particulière :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t) d\Omega_t = \int_{\Omega_0} \left(\underline{\text{grad}}(b) \cdot \underline{v} + \frac{\partial b}{\partial t} + b \text{div}(\underline{v}) \right) J d\Omega_0$$

$$\text{div}(\alpha \underline{a}) = \underline{\text{grad}} \alpha \cdot \underline{a} + \alpha \text{div}(\underline{a})$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t) d\Omega_t = \int_{\Omega_0} \left(\text{div}(b \underline{v}) + \frac{\partial b}{\partial t} \right) J d\Omega_0$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t) d\Omega_t = \int_{\Omega_0} \left(\operatorname{div}(b \underline{v}) + \frac{\partial b}{\partial t} \right) J d\Omega_0$$

$$\curvearrowright d\Omega_t = J d\Omega_0$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t) d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \left(\operatorname{div}(b(\underline{x}, t) \underline{v}) + \frac{\partial b(\underline{x}, t)}{\partial t} \right) d\Omega_t$$

$$\curvearrowright \int_{\Omega_t} \operatorname{div}(\underline{v}) d\Omega = \int_{\partial\Omega_t} \underline{v} \cdot \underline{n} da$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} b(\underline{x}, t) d\Omega_t = \underbrace{\int_{\partial\Omega_t} b(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot d\underline{a}}_{\text{effet de la convection due à la variation de volume}} + \underbrace{\int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} b(\underline{x}, t) d\Omega_t}_{\text{variation au cours du temps dans un volume considéré fixe}}$$

effet de la convection due à la
variation de volume

variation au cours du temps dans
un volume considéré fixe

CHAP II: Cinématique du milieu continu

La conservation de la masse

- Bagage mathématique : opérateur divergence
- Dérivée particulaire d'une intégrale de volume
- Equation de conservation de la masse

- En description **lagrangienne** :
$$\begin{cases} M_0(t) = \int_{\Omega_0} \rho_0(\underline{X}) d\Omega_0 \\ M(t) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) d\Omega_t \end{cases}$$

Conservation de la masse:

$$\forall t, M(t) - M_0 = 0 \Rightarrow M(t) - M_0 = \int_{\Omega_0} (\rho J - \rho_0) d\Omega_0 \quad \forall \Omega_0 \Rightarrow \begin{cases} \rho J = \rho_0 \\ \rho d\Omega = \rho_0 d\Omega_0 \end{cases}$$

- En description **eulérienne** :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) d\Omega_t = 0$$

dérivée particulière d'une intégrale de volume

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} b d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \left(\operatorname{div}(b \underline{v}) + \frac{\partial b}{\partial t} \right) d\Omega_t$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \left(\operatorname{div}(\rho(\underline{x}, t) \underline{v}) + \frac{\partial \rho(\underline{x}, t)}{\partial t} \right) d\Omega_t$$

- Formulation intégrale (globale) = formulation **faible**

$$\int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial \rho(\underline{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t)) \right) d\Omega_t = 0$$

$$\int_{\Omega_t} \operatorname{div}(\underline{v}) d\Omega = \int_{\partial\Omega_t} \underline{v} \cdot \underline{n} da$$

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial \rho(\underline{x}, t)}{\partial t} d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{da} = 0$$

variation dans le temps
de la masse volumique

flux de matière sortant

- Formulation locale = formulation **forte**

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial \rho(\underline{x}, t)}{\partial t} d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{da} = 0$$

→ vrai **quelque soit le volume d'intégration**

$$\frac{\partial \rho(\underline{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t)) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\operatorname{grad}}(\rho) \cdot \underline{v} \\ \operatorname{div}(\alpha \underline{a}) = \underline{\operatorname{grad}} \alpha \cdot \underline{a} + \alpha \operatorname{div}(\underline{a}) \end{cases}$$

$$\frac{d\rho(\underline{x}, t)}{dt} + \rho(\underline{x}, t) \operatorname{div}(\underline{v}(\underline{x}, t)) = 0$$

= **conservation de la masse**

- Cas **incompressible** : masse volumique constante !

$$\cancel{\frac{d\rho(\underline{x}, t)}{dt}} + \rho(\underline{x}, t) \operatorname{div}(\underline{v}(\underline{x}, t)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{div}(\underline{v}(\underline{x}, t)) = 0}$$

CHAPITRE III

Modélisation des efforts intérieurs

CHAP III: Modélisation des efforts intérieurs

Le vecteur-contrainte

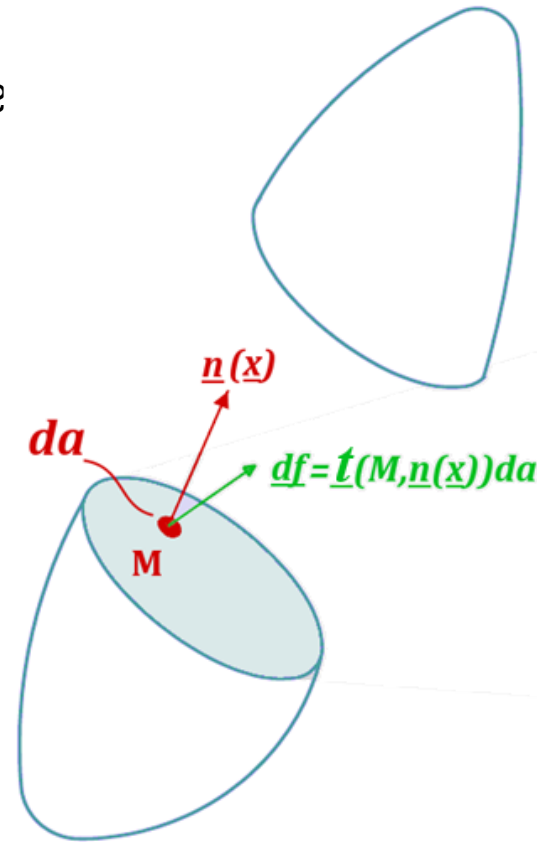
On se place dans la configuration actuelle : description **eulérienne**

- imaginons que l'on coupe de façon fictive un système matériel en M
- le plan de coupe s'appelle la **facette** $\underline{n}(\underline{x})$
- **résultante des efforts** d'une partie sur l'autre?

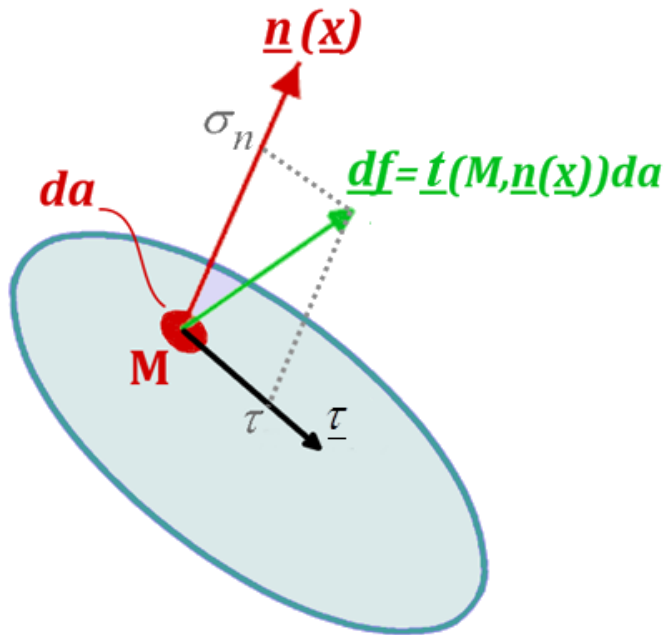
Densité surfacique de forces: $\underline{t}$

$$\underline{df} = \underline{t}(M, \underline{n}(\underline{x})) da$$

$$\underline{t}(M, \underline{n}(\underline{x})) = \lim_{da \rightarrow 0} \frac{d\underline{f}}{da}$$



- La densité surfacique de forces $\underline{t}$ s'appelle le **vecteur-contrainte**
- Le vecteur-contrainte dépend de la **position** $\underline{x}$ et de l'**orientation** $\underline{n}(\underline{x})$
- on peut décomposer le vecteur-contrainte :



composante **normale**

$$\sigma_n = \underline{t}(M, \underline{n}(\underline{x})) \cdot \underline{n}(\underline{x})$$

$$\tau_n = (\underline{t}(M, \underline{n}(\underline{x})) - \sigma_n \underline{n}(\underline{x})) \cdot \underline{\tau}(\underline{x})$$

composante **tangentielle**

$$\sigma_n < 0 \Rightarrow \text{compression}$$

$$\sigma_n > 0 \Rightarrow \text{traction}$$

→ composantes du vecteur-contrainte homogènes à une **pression (Pa)**

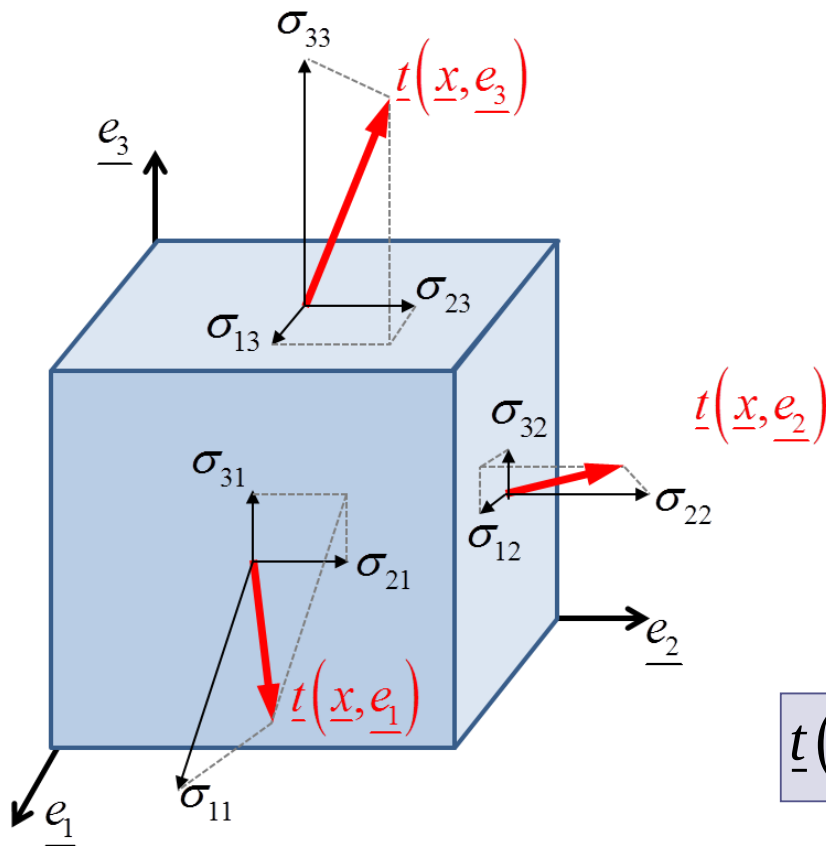
CHAP III: Modélisation des efforts intérieurs

Tenseur des contraintes de Cauchy

- Définition du tenseur des contraintes
- Symétrie du tenseur des contraintes
- Interprétation des composantes

- le vecteur-contrainte dépend de la **facette** considéré
- « objet mathématique » qui contient **tous** les vecteurs-contrainte en M ?

élément parallélépipédique
infinitésimal centré en M



$$\underline{t}(\underline{x}, \underline{e}_1) = \sigma_{11} \underline{e}_1 + \sigma_{21} \underline{e}_2 + \sigma_{31} \underline{e}_3$$

$$\underline{t}(\underline{x}, \underline{e}_2) = \sigma_{12} \underline{e}_1 + \sigma_{22} \underline{e}_2 + \sigma_{32} \underline{e}_3$$

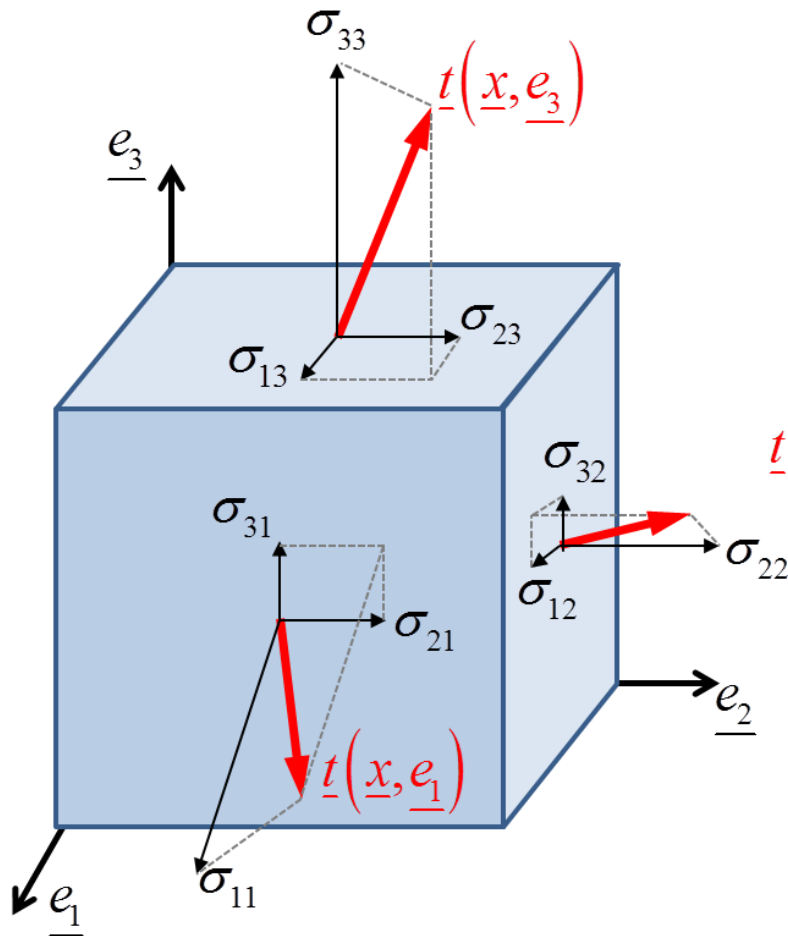
$$\underline{t}(\underline{x}, \underline{e}_3) = \sigma_{13} \underline{e}_1 + \sigma_{23} \underline{e}_2 + \sigma_{33} \underline{e}_3$$

$$\Rightarrow \underline{t}(\underline{x}, \underline{e}_i) = \sigma_{ji} \underline{e}_j$$

σ

$\swarrow$ Direction $\searrow$ Facette

$$\underline{t}(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x})) = \sigma_{ij}(\underline{x}) n_j(\underline{x}) \underline{e}_i = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x})$$



→ on vient d'introduire le **tenseur des contraintes de Cauchy**

$$\underline{t}(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x})) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x})$$

→ composante σ_{ii} = effort **normal**

→ composante σ_{ij} = effort **tangentiel**

→ tenseur d'ordre 2 $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x})$: **application linéaire** qui transforme un vecteur $\underline{n}(\underline{x})$ en un autre vecteur $\underline{t}(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x}))$

CHAP III: Modélisation des efforts intérieurs

Tenseur des contraintes de Cauchy

- Définition du tenseur des contraintes
- Symétrie du tenseur des contraintes
- Interprétation des composantes

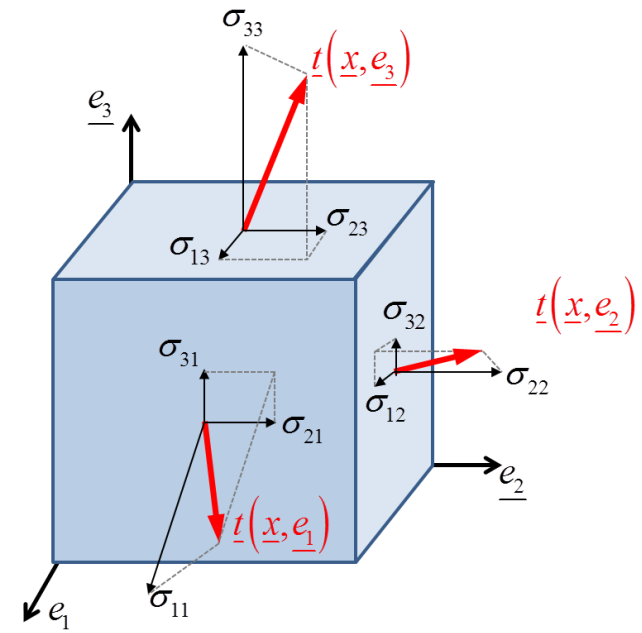
- on se place en $M(x_1, x_2, x_3)$ au centre de l'élément de côté dx
- équilibre statique du parallélépipède?

Equation d'équilibre des moments :

$$\left(\underline{t}(\underline{e}_1) \wedge \frac{dx}{2} \underline{e}_1 - \underline{t}(-\underline{e}_1) \wedge \frac{dx}{2} \underline{e}_1 \right) + \left(\underline{t}(\underline{e}_2) \wedge \frac{dx}{2} \underline{e}_2 - \underline{t}(-\underline{e}_2) \wedge \frac{dx}{2} \underline{e}_2 \right) + \left(\underline{t}(\underline{e}_3) \wedge \frac{dx}{2} \underline{e}_3 - \underline{t}(-\underline{e}_3) \wedge \frac{dx}{2} \underline{e}_3 \right) = \underline{0}$$

$$\underline{t}(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x})) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x})$$

$$\begin{aligned} & (\sigma_{11} \underline{e}_1 + \sigma_{12} \underline{e}_2 + \sigma_{13} \underline{e}_3) \wedge dx \underline{e}_1 \\ & + (\sigma_{21} \underline{e}_1 + \sigma_{22} \underline{e}_2 + \sigma_{23} \underline{e}_3) \wedge dx \underline{e}_2 \\ & + (\sigma_{31} \underline{e}_1 + \sigma_{32} \underline{e}_2 + \sigma_{33} \underline{e}_3) \wedge dx \underline{e}_3 = \underline{0} \end{aligned}$$



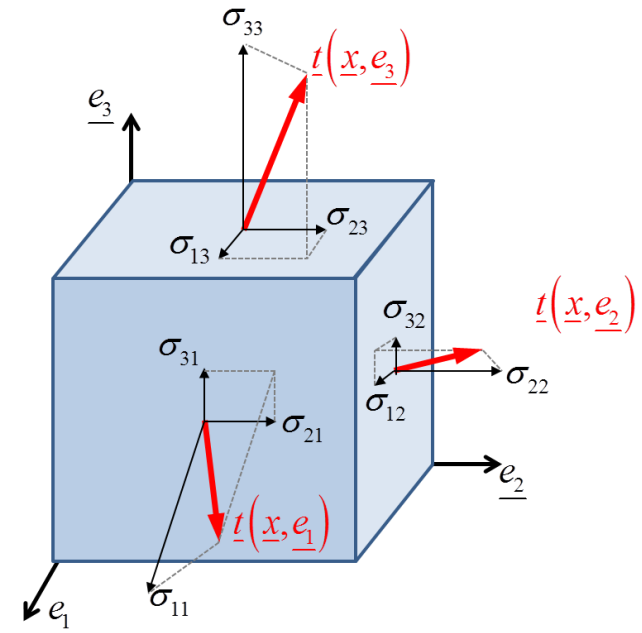
$$\Rightarrow dx(-\sigma_{12}\underline{e}_3 + \sigma_{13}\underline{e}_2 + \sigma_{21}\underline{e}_3 - \sigma_{23}\underline{e}_1 - \sigma_{31}\underline{e}_2 + \sigma_{32}\underline{e}_1) = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{21} - \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{13} - \sigma_{31} = 0 \\ \sigma_{32} - \sigma_{23} = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad \sigma_{13} = \sigma_{31} \quad \sigma_{23} = \sigma_{32}$$

→ le tenseur des contraintes de Cauchy est **symétrique** !!!

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T \quad \text{soit} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$



CHAP III: Modélisation des efforts intérieurs

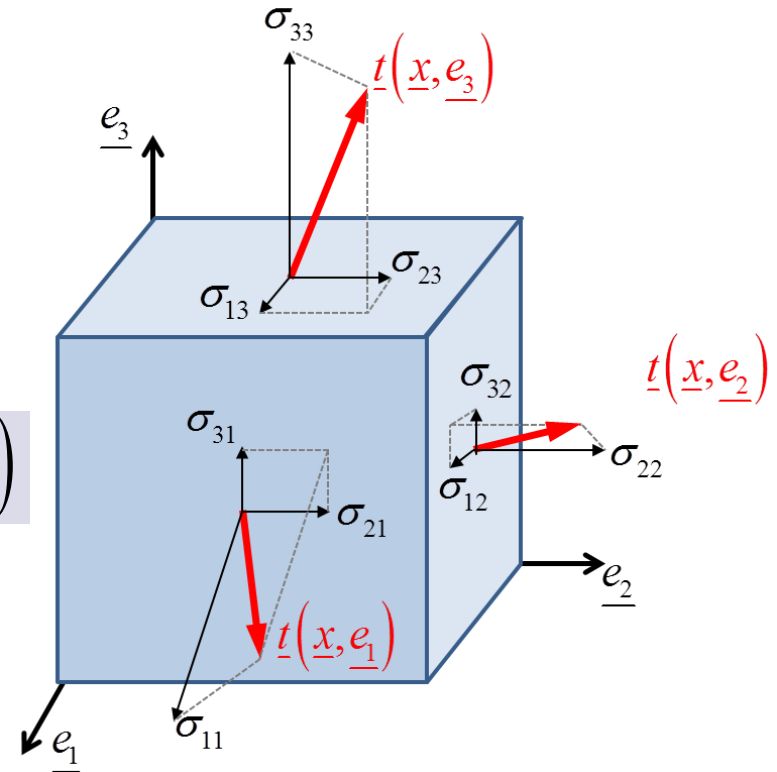
Tenseur des contraintes de Cauchy

- Définition du tenseur des contraintes
- Symétrie du tenseur des contraintes
- Interprétation des composantes

$\sigma_{ii} \rightarrow$ traction/compression selon $\underline{e}_i$

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

$\sigma_{i \neq j} \rightarrow$ Cisaillement dans le plan $(\underline{e}_i, \underline{e}_j)$



CHAP III: Modélisation des efforts intérieurs

Propriétés du tenseur des contraintes de Cauchy

- Diagonalisation d'une matrice
- Propriétés du tenseur des contraintes

Interlude mathématique

- $\mathbf{M}$ est diagonalisable s'il existe une matrice **inversible** ET une matrice **diagonale** telles que : $\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$

→ vecteur-colonnes de $\mathbf{P}$: **vecteurs propres**

$\mathbf{v}$ est un vecteur propre de $\mathbf{M} \Rightarrow$ il existe λ tel que $\mathbf{M}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$

- Possède une solution si et seulement si : $\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}) = 0$

→ solutions de cette équation : **valeurs propres** $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

- Matrice diagonale : $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}$ formée par les **valeurs propres**
→ « **diagonalisation** » de la matrice



Exemple

- Calculons les **valeurs propres** de $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$
- Equation caractéristique : $\det(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 6 & -4-\lambda \end{vmatrix}$
$$= (5-\lambda)(-4-\lambda) - (-3 \times 6)$$
$$= -20 - \lambda + \lambda^2 + 18$$
$$= \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

- Vecteurs propres** associés à λ_1 et λ_2 :

$$(\mathbf{M} - \lambda_1 \mathbf{I}) \mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5-2 & -3 \\ 6 & -4-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 - u_2 = 0$$

→ pas unique !

$$(\mathbf{M} - \lambda_2 \mathbf{I}) \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5+1 & -3 \\ 6 & -4+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2v_1 - v_2 = 0$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

CHAP III: Modélisation des efforts intérieurs

Propriétés du tenseur des contraintes de Cauchy

- Diagonalisation d'une matrice
- Propriétés du tenseur des contraintes

Interlude mathématique

Directions et valeurs principales d'un tenseur

- Soit un tenseur d'ordre 2 **symétrique** $\underline{\underline{T}}$
- On appelle **valeur propre** (ou **principale**) et **vecteur propre** (ou **direction principale**) le **scalaire** λ et le **vecteur** $\underline{v}$ tels que:

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{v} = \lambda \underline{v}$$

- On détermine les valeurs principales en résolvant : $\det(\underline{\underline{T}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0$
 → on les note T_I, T_{II}, T_{III}

- On détermine la direction principale T_i en résolvant :
$$\begin{cases} (\underline{\underline{T}} - T_i \underline{\underline{I}}) \cdot \underline{e}_i = \underline{0} \\ \underline{e}_i \cdot \underline{e}_i = 1 \end{cases}$$

 → on note les directions principales $\underline{e}_I, \underline{e}_{II}, \underline{e}_{III}$



Interlude mathématique

Directions et valeurs principales d'un tenseur

- Sans démonstration: si les trois valeurs principales de $\underline{\underline{T}}$ sont **distinctes**, alors les trois directions principales sont **orthogonales**
- La base formée par les vecteurs $\underline{e_I}, \underline{e_{II}}, \underline{e_{III}}$ est la base **principale**
- Dans **cette base principale** on a:

$$\underline{\underline{T}} = T_I \underline{e_I} \otimes \underline{e_I} + T_{II} \underline{e_{II}} \otimes \underline{e_{II}} + T_{III} \underline{e_{III}} \otimes \underline{e_{III}}$$

$$[\underline{\underline{T}}]_{(\underline{e_I}, \underline{e_{II}}, \underline{e_{III}})} = \begin{pmatrix} T_I & 0 & 0 \\ 0 & T_{II} & 0 \\ 0 & 0 & T_{III} \end{pmatrix}$$



Valeurs et directions principales

$\underline{\underline{\sigma}}$ est un tenseur symétrique d'ordre 2 :

→ Il existe une base $(\underline{e}_I, \underline{e}_{II}, \underline{e}_{III})$ appelée **base principale** telle que:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_I \underline{e}_I \otimes \underline{e}_I + \sigma_{II} \underline{e}_{II} \otimes \underline{e}_{II} + \sigma_{III} \underline{e}_{III} \otimes \underline{e}_{III} \quad \left[\underline{\underline{\sigma}} \right]_{(\underline{e}_I, \underline{e}_{II}, \underline{e}_{III})} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix}$$

Par convention: $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$

→ les facettes $(\underline{e}_I, \underline{e}_{II}, \underline{e}_{III})$ ne subissent que des contraintes **normales**

→ par exemple, pour la facette $\underline{e}_I$: $\underline{t} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_I = \sigma_I \underline{e}_I$

→ $\underline{e}_I$ est la **direction principale** associée à la **valeur principale** σ_I

Interlude mathématique

Invariants d'un tenseur d'ordre 2

- On appelle **invariant** du tenseur $\underline{\underline{T}}$ toute fonction **scalaire** de ses composantes qui reste **inchangée lors d'un changement de base**
- Sans démonstration : un tenseur d'ordre 2 symétrique possède toujours (au moins) 3 invariants indépendants

- Invariants les plus communs :

$$I_1^T = \text{Tr}(\underline{\underline{T}}) \quad I_2^T = \frac{1}{2} \left(\left(\text{Tr}(\underline{\underline{T}}) \right)^2 - \text{Tr}(\underline{\underline{T}}^2) \right) \quad I_3^T = \det(\underline{\underline{T}})$$

- Invariants par changement de base $\rightarrow$ dans la base **principale** :

$$\underline{\underline{T}} = T_I \underline{e}_I \otimes \underline{e}_I + T_{II} \underline{e}_{II} \otimes \underline{e}_{II} + T_{III} \underline{e}_{III} \otimes \underline{e}_{III}$$

$$I_1^T = T_I + T_{II} + T_{III} \quad I_2^T = T_I T_{II} + T_{II} T_{III} + T_I T_{III} \quad I_3^T = T_I T_{II} T_{III}$$



Invariants du tenseur des contraintes de Cauchy

→ pour déterminer ces valeurs propres on calcule :

$$P_T(\lambda) = \det(\underline{\underline{\sigma}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = -\lambda^3 + I_1^\sigma \lambda^2 - I_2^\sigma \lambda + I_3^\sigma$$

$I_1^\sigma, I_2^\sigma, I_3^\sigma$ sont des **scalaires invariants** par changement de base

- On peut exprimer ces invariants :

$$\begin{cases} I_1 = \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \\ I_2 = \frac{1}{2} \left(\left(\text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \right)^2 - \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}^2) \right) \\ I_3 = \det(\underline{\underline{\sigma}}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} \\ I_2 = \frac{1}{2} (\sigma_{ii} \sigma_{jj} - \sigma_{ij} \sigma_{ji}) = \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_I \sigma_{III} \\ I_3 = \det(\sigma_{ij}) = \sigma_I \sigma_{II} \sigma_{III} \end{cases}$$

→ par définition, ces **scalaires ne dépendent pas de l'observateur**

→ utiles pour caractériser le matériau ! (« critères de dimensionnement »)

Interlude mathématique

Tenseurs sphériques et déviatoriques

- Un tenseur d'ordre 2 quelconque $\underline{\underline{T}}$ peut être décomposé de façon unique de la façon suivante:

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^S + \underline{\underline{T}}^D \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{\underline{T}}^S = \alpha \underline{\underline{I}} = \frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{T}}) \underline{\underline{I}} \\ \underline{\underline{T}}^D = \underline{\underline{T}} - \underline{\underline{T}}^S = \underline{\underline{T}} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{T}}) \underline{\underline{I}} \end{cases}$$

- Le tenseur $\underline{\underline{T}}^S$ est appelée partie **sphérique** du tenseur $\underline{\underline{T}}$
- Le tenseur $\underline{\underline{T}}^D$ est appelée partie **déviatorique** du tenseur $\underline{\underline{T}}$

- On montre facilement les relations:

$$\text{Tr}(\underline{\underline{T}}^D) = 0$$

$$\text{Tr}(\underline{\underline{T}}^S) = \text{Tr}(\underline{\underline{T}})$$



Décomposition en parties sphérique et déviatorique

$\underline{\underline{\sigma}}$ est un tenseur d'ordre 2 :

→ Il existe une décomposition en partie **sphérique** et **déviatorique**:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^S + \underline{\underline{\sigma}}^D$$

partie « sphérique » partie « déviatorique »

→ on a les relations: $Tr(\underline{\underline{\sigma}}^D) = 0$ $Tr(\underline{\underline{\sigma}}^S) = Tr(\underline{\underline{\sigma}})$ $\underline{\underline{\sigma}}^S = \left(\frac{Tr(\underline{\underline{\sigma}})}{3} \right) \underline{\underline{I}}$

→ **pression hydrostatique**: $p = \frac{Tr(\underline{\underline{\sigma}})}{3} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})$

→ $\underline{\underline{\sigma}}^D$ est symétrique, et il admet les mêmes vecteurs propres que $\underline{\underline{\sigma}}$

partie **sphérique** : « changement de **volume** sans changement de **forme** »

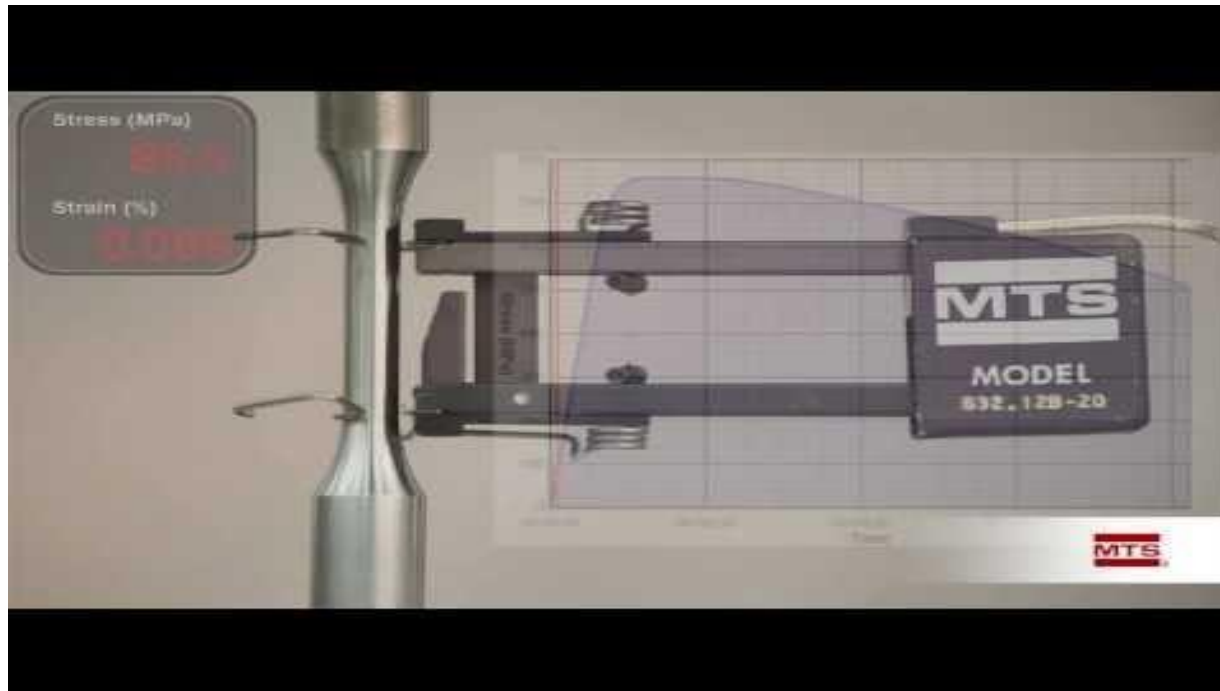
partie **déviatorique** : « changement de **forme** à **volume** constant »

Traction uniaxiale

$$\sigma_{zz} > 0$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{zz} \underline{e_z} \otimes \underline{e_z}$$

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} \sigma_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

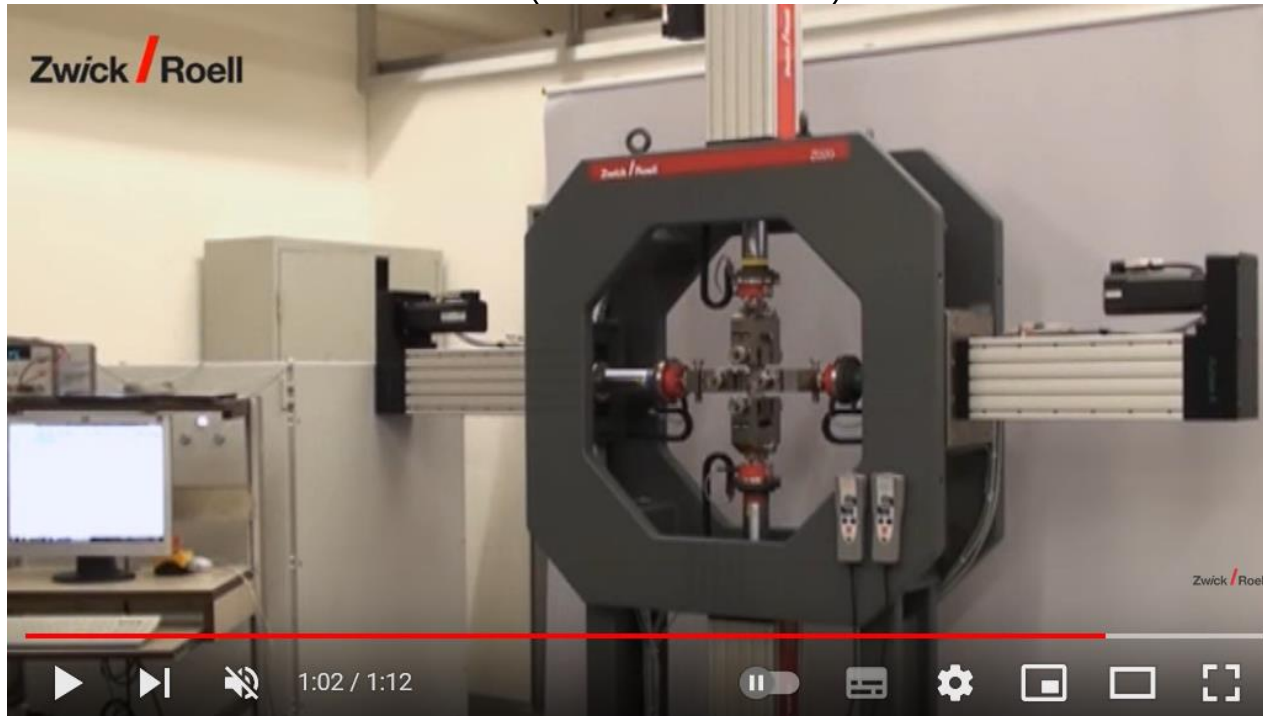


Traction biaxiale

$$\sigma_{11} > 0 \quad \sigma_{22} > 0$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{11} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sigma_{22} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2$$

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

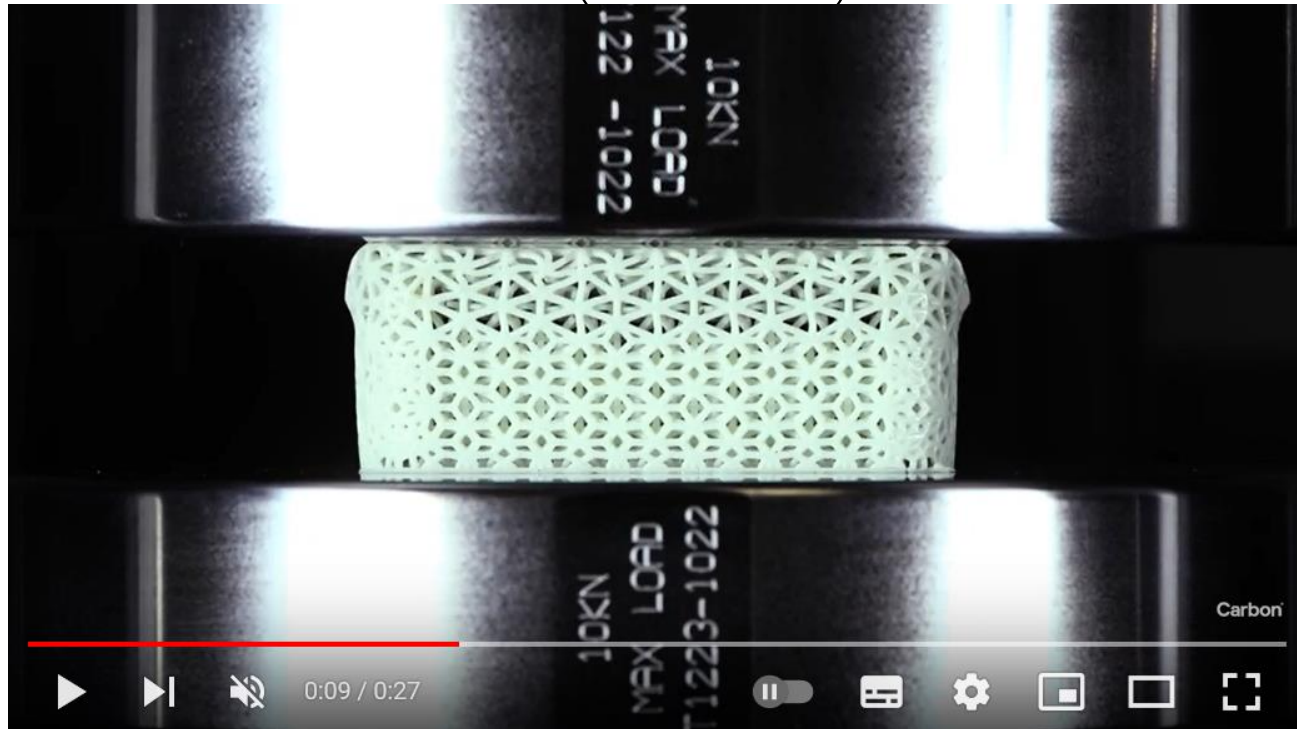


Compression uniaxiale

$$\sigma_{zz} < 0$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{zz} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\sigma}} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

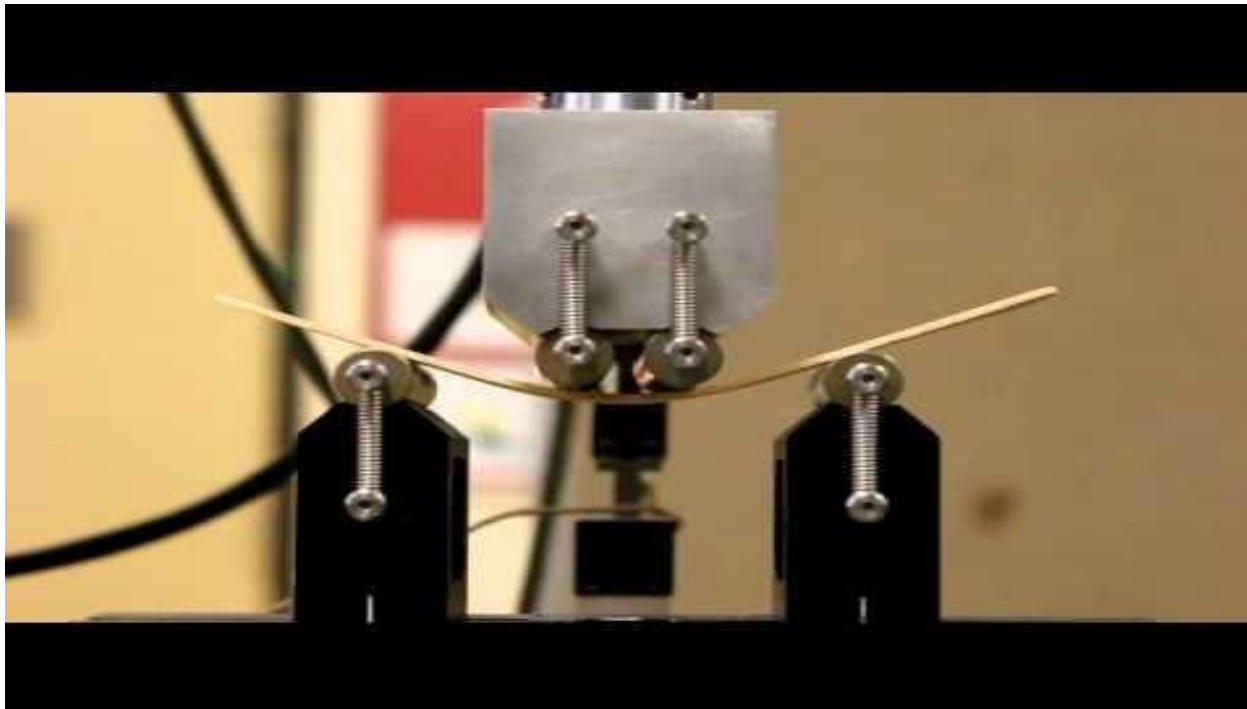


Flexion

$$\sigma_{11}(x) < 0 \quad \text{ou} \quad \sigma_{11}(x) > 0 \quad \text{suivant } x$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(x) = \sigma_{11}(x) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$$

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Torsion (cisaillement)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{\theta z} \underline{e}_{\theta} \otimes \underline{e}_z + \sigma_{z\theta} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_{\theta} = \tau (\underline{e}_{\theta} \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_{\theta})$$

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta z} = \tau \\ 0 & \sigma_{z\theta} = \tau & 0 \end{pmatrix}$$



CHAP III: Modélisation des efforts intérieurs

Equilibre : équation de la dynamique

- Élément de matière :

volume $d\Omega_t$

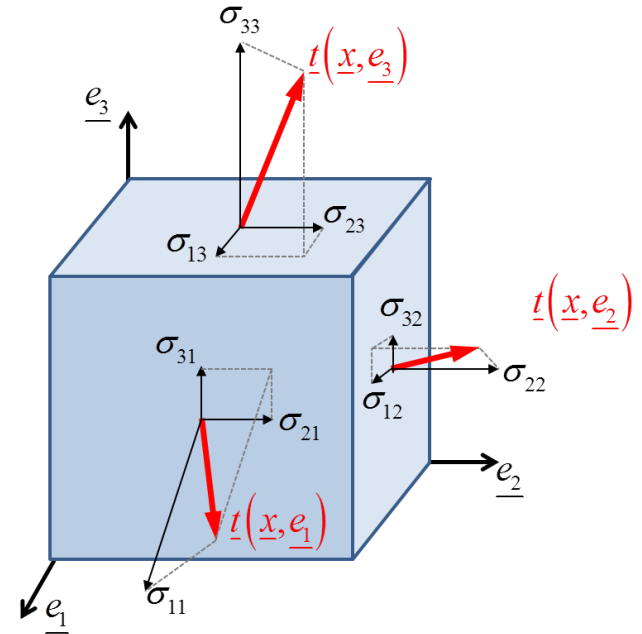
masse dm

frontière $\partial\Omega_t$ (fermée)

- Bilan des efforts:

efforts de volume $\int_{\Omega_t} \rho \underline{f}^m d\Omega_t$

efforts de surface $\int_{\partial\Omega_t} \underline{t} da$



- Principe fondamental de la dynamique :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \underline{v} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho \underline{f}^m d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \underline{t} da$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \underline{v} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho \underline{f}^m d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \underline{t} da$$

vecteur-contrainte

$$\underline{t} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \underline{v} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho \underline{f}^m d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} da$$

théorème de la divergence

$$\int_{\Omega_t} \text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) d\Omega = \int_{\partial\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} da$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \underline{v} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho \underline{f}^m d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) d\Omega_t$$

On peut montrer que : $\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \underline{v} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho \frac{d\underline{v}}{dt} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho \underline{a} d\Omega_t$

avec $\underline{a}$ la dérivée **particulaire** du champ de vitesse

- Le PFD devient alors :

$$\int_{\Omega_t} \rho \underline{a} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho \underline{f}^m d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \underline{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) d\Omega_t$$

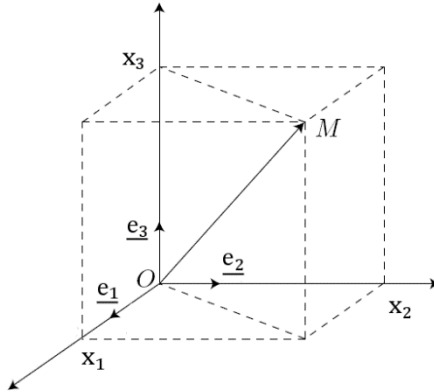
= Formulation **faible** (intégrale) de **l'équation d'équilibre**

- Cette équation est vraie quelque soit le volume d'intégration:

$$\rho \underline{a} = \underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{f}^m$$

= Formulation **forte** (locale) de **l'équation d'équilibre**

■ Coordonnées **cartésiennes**

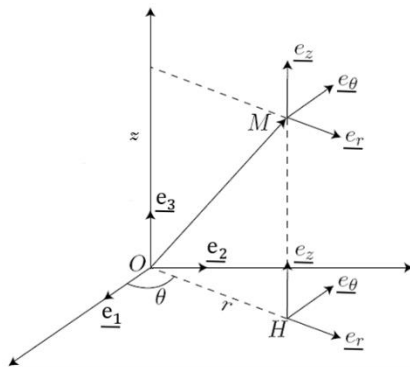


$$\rho(f_x^m - a_x) + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\rho(f_y^m - a_y) + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$\rho(f_z^m - a_z) + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$$

■ Coordonnées **cylindriques**



$$\rho(f_r^m - a_r) + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$$

$$\rho(f_\theta^m - a_\theta) + \frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0$$

$$\rho(f_z^m - a_z) + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0$$



CHAPITRE IV : NOTE TECHNIQUE

Les conditions aux limites

CHAP IV: Les conditions aux limites

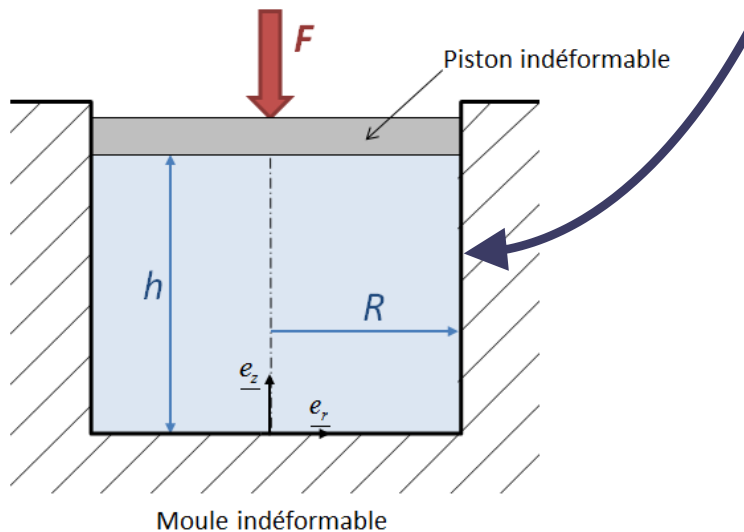
Les conditions aux limites

- Efforts ou déplacements ?
- Conditions locales ou globales ?
- Surface libre
- Tableau récapitulatif

A retenir :

On n'impose **jamais** (dans les exercices classiques) des conditions aux limites qui portent **à la fois** sur le **déplacement** et l'**effort** :

déplacement connu $\rightarrow$ effort à déterminer
effort connu $\rightarrow$ déplacement à déterminer



Exemple :

- déplacement connu (=0) selon $\underline{e}_r$

$$\underline{u} \cdot \underline{e}_r = u_r = 0$$

- déplacement inconnu selon $\underline{e}_z$ et $\underline{e}_\theta$

- vecteur-contrainte connu selon $\underline{e}_z$ et $\underline{e}_\theta$

$$\underline{t}(\underline{n} = \underline{e}_r) \cdot \underline{e}_z = \underline{t}(\underline{n} = \underline{e}_r) \cdot \underline{e}_\theta = 0$$

- vecteur-contrainte inconnu selon $\underline{e}_r$

CHAP IV: Les conditions aux limites

Les conditions aux limites

- Efforts ou déplacements ?
- Conditions locales ou globales ?
- Surface libre
- Tableau récapitulatif

A retenir :

effort

= grandeur **globale**
(intégrée sur une surface)

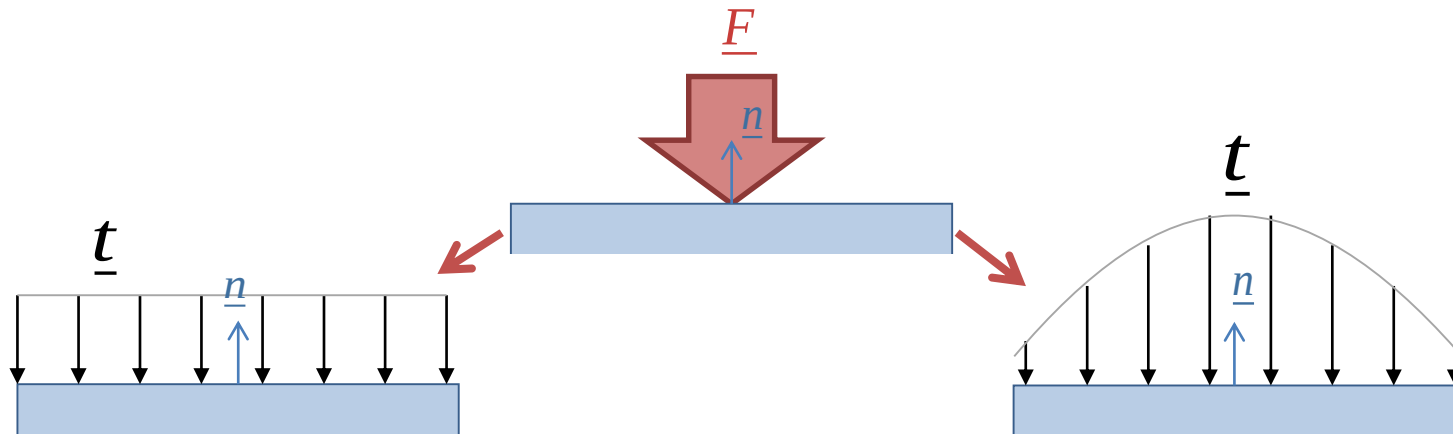
= **intégrale surfacique**
d'une densité d'efforts
(vecteur-contrainte).

$\neq$

pression

= grandeur **locale**
(vraie **en tout point** de la
surface)

= **composante normale**
du vecteur-contrainte



CHAP IV: Les conditions aux limites

Les conditions aux limites

- Efforts ou déplacements ?
- Conditions locales ou globales ?
- Surface libre
- Tableau récapitulatif

A retenir :

SURFACE LIBRE

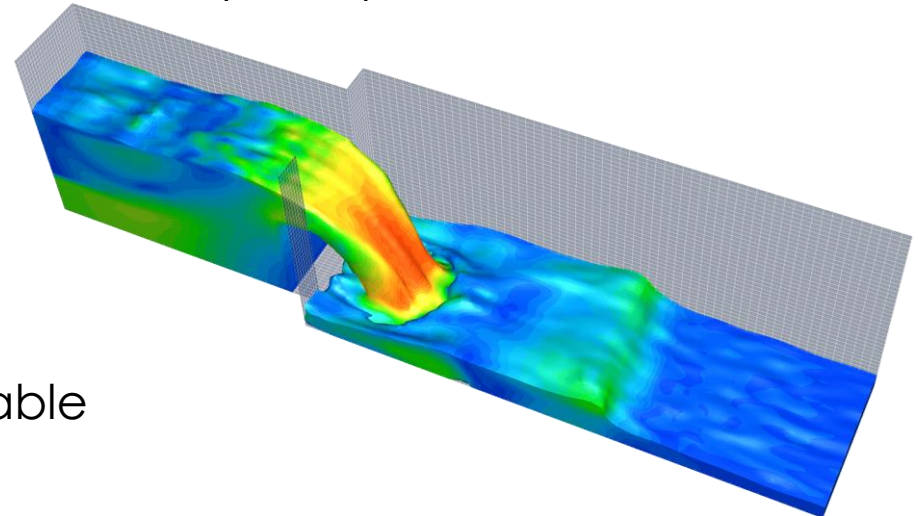
Surface libre : conditions aux limites fortes !!

= vecteur-contrainte connu dans les trois directions !

= déplacement inconnu

En mécanique des fluides

= application de la pression atmosphérique



En mécanique du solide

= pression atmosphérique négligeable

= vecteur-contrainte **nul**

CHAP IV: Les conditions aux limites

Les conditions aux limites

- Efforts ou déplacements ?
- Conditions locales ou globales ?
- Surface libre
- Tableau récapitulatif



Paroi indéformable		$\underline{u}(\underline{x} \in S) \cdot \underline{e}_1 = u_1(\underline{x} \in S) = 0$ $\underline{t}(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) \cdot \underline{e}_1 = ?$
Frontière encastree		$\underline{u}(\underline{x} \in S) = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} u_1(\underline{x} \in S) = 0 \\ u_2(\underline{x} \in S) = 0 \\ u_3(\underline{x} \in S) = 0 \end{cases} \quad \underline{t}(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) = ? \Rightarrow \begin{cases} t_1(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) = ? \\ t_2(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) = ? \\ t_3(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) = ? \end{cases}$
Déplacement imposé		$\underline{u}(\underline{x} \in S) = \underline{U} \Rightarrow \begin{cases} u_1(\underline{x} \in S) = U_1 \\ u_2(\underline{x} \in S) = U_2 \\ u_3(\underline{x} \in S) = U_3 \end{cases} \quad \underline{t}(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) = ? \Rightarrow \begin{cases} t_1(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) = ? \\ t_2(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) = ? \\ t_3(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) = ? \end{cases}$
Pression imposée		$\underline{t}(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) = p \underline{e}_1$



Effort homogène imposé Pas de frottement		$\int_S \underline{t}(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) dS = F \underline{e}_1 \Rightarrow \begin{cases} S \times t_1(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) = F \\ S \times t_2(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) = 0 \\ S \times t_3(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) = 0 \end{cases}$ $\underline{u}(\underline{x} \in S) = ? \Rightarrow \begin{cases} u_1(\underline{x} \in S) = ? \\ u_2(\underline{x} \in S) = ? \\ u_3(\underline{x} \in S) = ? \end{cases}$
Frottement: loi de Coulomb		$\underline{t}(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) \cdot \underline{e}_2 = \underline{t}(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) \cdot \underline{e}_3 = \mu \times \underline{t}(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) \cdot \underline{e}_1$ $\underline{u}(\underline{x} \in S) = ? \Rightarrow \begin{cases} u_1(\underline{x} \in S) = ? \\ u_2(\underline{x} \in S) = ? \\ u_3(\underline{x} \in S) = ? \end{cases}$
Couple imposé		$\underline{C} = \int_S \underline{HM} \wedge \underline{t}(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) dS = \int_S (y \underline{e}_2 + z \underline{e}_3) \wedge \underline{t}(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) dS$

CHAPITRE V

Application aux matériaux solides

CHAP V: Application aux matériaux solides

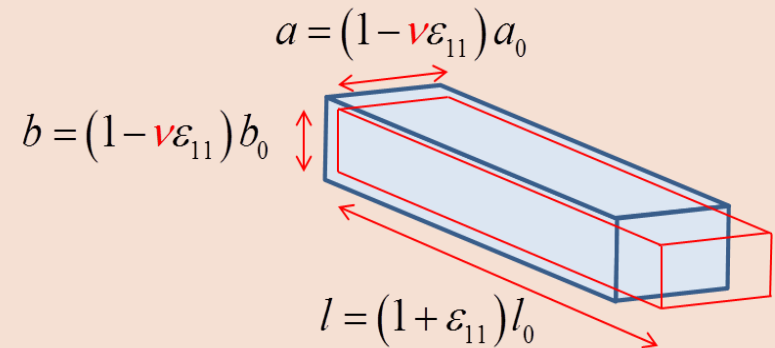
L'essai de traction

- Loi de comportement
- L'essai de traction
- Limite d'élasticité
- Cas unidimensionnel : le module d'Young

Exemple

L'essai de traction

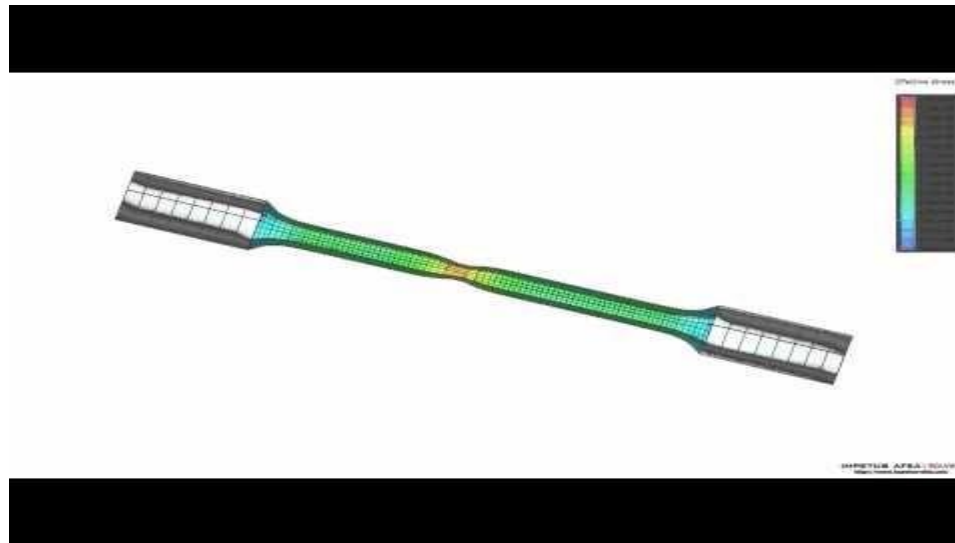
- On considère une éprouvette parallélépipédique de côté $a \times b$ et de longueur l
- On le soumet à un effort longitudinal
 - Déformation positive dans le sens longitudinal
 - Déformations négatives dans les directions transverses
- Questions
 - Quel est le lien entre l'effort imposé et les déformations?
 - Comment caractériser le matériau (indépendamment de la forme de l'éprouvette) ?



Recherche d'une *loi de comportement* =
relation locale entre champ de déformation, champ des efforts intérieurs et champ de température

ex: loi de Hooke en 1D $\rightarrow$ relation linéaire

- $\rightarrow$ On cherche une loi **locale** à partir d'essais à l'échelle **globale**
- $\rightarrow$ hypothèse d'homogénéité des champs (traction simple, ...)



ex: essai de traction: on suppose les contraintes/déformations constantes dans la partie utile de l'éprouvette

CHAP V: Application aux matériaux solides

L'essai de traction

- Loi de comportement
- L'essai de traction
- Limite d'élasticité
- Cas unidimensionnel : le module d'Young

→ Champ imposé $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{zz} \underline{e_z} \otimes \underline{e_z}$ $\sigma_{zz} \left(\varepsilon_{zz}, \dot{\varepsilon}_{zz}, T, \dots \right)$

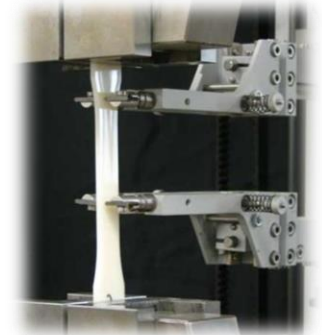


- **Mesure des efforts** : cellules de charge
- **Mesure des déformations**

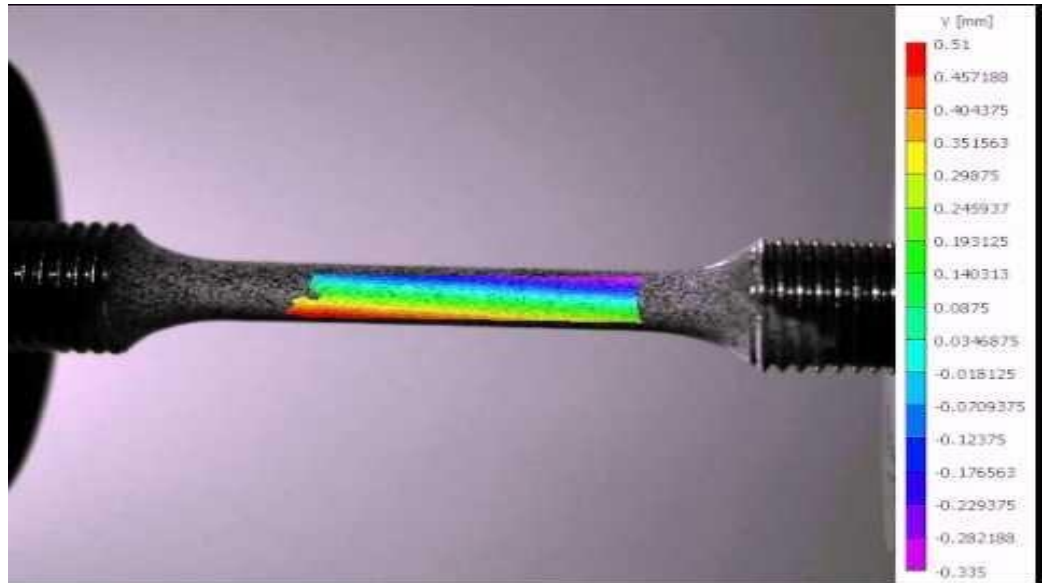
→ Jauge de déformation

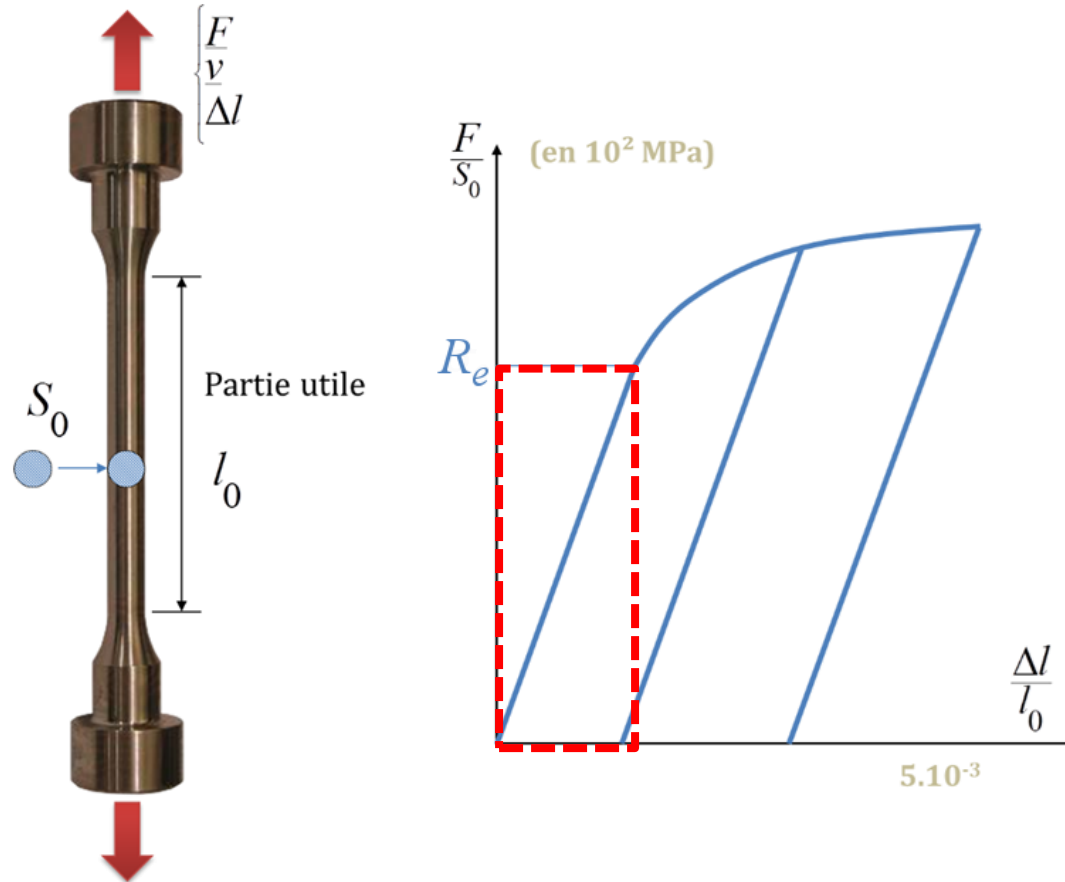


→ Extensomètres



→ Corrélation d'images





Remarque :

- Utilisation courante de $F / S_0 \approx \sigma_{zz}$: « contrainte nominale »
- Utilisation courante de $\Delta l / l_0 = \varepsilon_{zz}$: « déformation nominale »

En dessous de la **limité élastique R_e** : loi linéaire pour certains matériaux

Exemple

L'essai de traction

- Différence entre contrainte nominale et contrainte de Cauchy ?

$$\sigma_N = \frac{F}{S_0} = \frac{F}{a_0 b_0}$$

$$\sigma_{11} = \frac{F}{S} = \frac{F}{ab} = \frac{F}{a_0 (1 - \nu \varepsilon_{11}) b_0 (1 - \nu \varepsilon_{11})} = \frac{F}{S_0 (1 - \nu \varepsilon_{11})^2} = \frac{\sigma_N}{(1 - \nu \varepsilon_{11})^2}$$

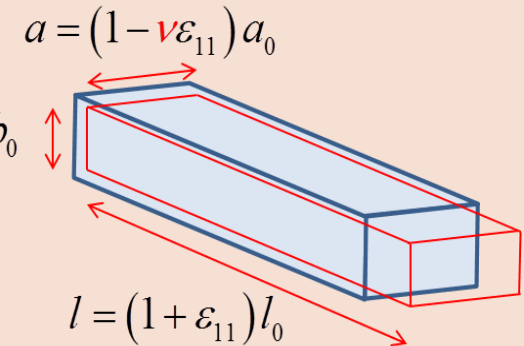
- Notion de dilatation ?

$$\lambda = \frac{l}{l_0} = \frac{(1 + \varepsilon_{11}) l_0}{l_0} = 1 + \varepsilon_{11}$$

$$\frac{1}{(1 - \nu \varepsilon_{11})^2} \xrightarrow{\varepsilon_{11} \rightarrow 0} 1$$

- Déformation transverse ?

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{\Delta a}{a_0} = \frac{\Delta b}{b_0} = -\nu \varepsilon_{11}$$

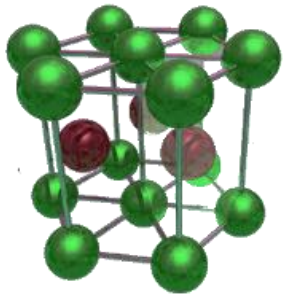
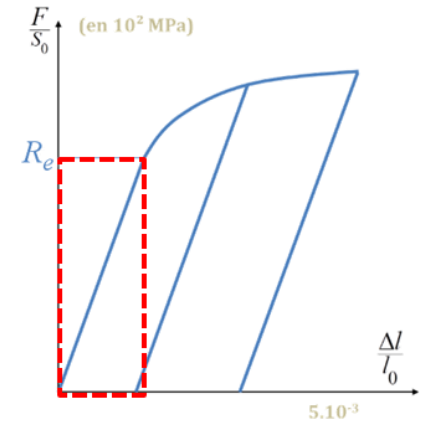


CHAP V: Application aux matériaux solides

L'essai de traction

- Loi de comportement
- L'essai de traction
- Limite d'élasticité
- Cas unidimensionnel : le module d'Young

- Dans cette zone linéaire dite **élastique**, les **contraintes** et les **déformations** sont reliées **linéairement**



- Déformations élastiques = modification **réversible** de l'espace interatomique

Objectif : définir une relation 3D entre contraintes et déformations

→ **intrinsèque** au matériau : - ne doit pas dépendre de la **base**
- ne doit pas dépendre de l'**observateur**

Hypothèse : on se place à température constante

→ mais les effets de la température existent !!

CHAP V: Application aux matériaux solides

L'essai de traction

- Loi de comportement
- L'essai de traction
- Limite d'élasticité
- Cas unidimensionnel : le module d'Young

- Postulat de base de **l'élasticité** :

Un seul état de **déformation** $\leftrightarrow$ un seul état de **contrainte**

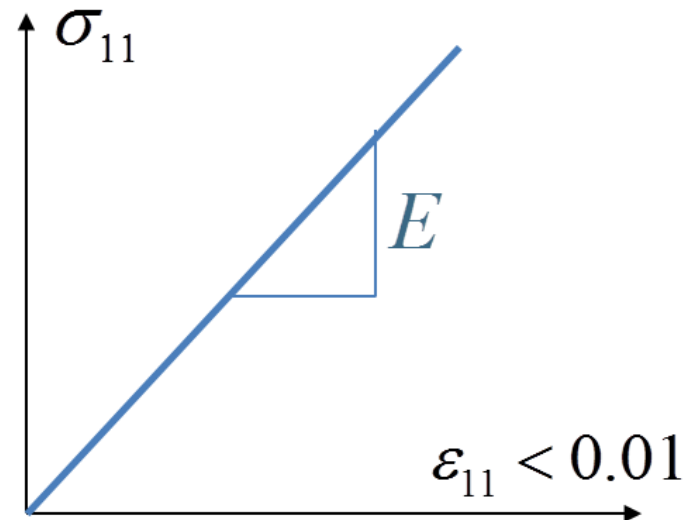
→ Indépendant de la **vitesse de déformation** ou de variables internes

- Dans l'axe de l'éprouvette :

relation **linéaire** entre **contraintes** et **déformations** en-deçà d'un seuil

- On introduit un coefficient de proportionnalité :
le **module de Young** (Pa)

$$\sigma_{zz} = E \varepsilon_{zz}$$



= mesure de la « rigidité » du matériau élastique linéaire

= ne dépend que du matériau (et pas de la forme du solide)

Matériau	E (GPa)	Matériau	E (GPa)
Acier	210	Béton	20-50
Fonte	90→160	Bois	10→20
Aluminium	70	Nanotubes de Carbone	1100
Plomb	20	Verre	70
Titane	114	Caoutchouc	0.001→0.1

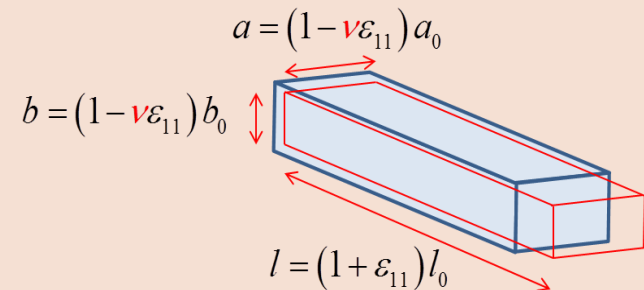
Exemple

$$\sigma_{11} = \frac{F}{S} = E \varepsilon_{11} = E \frac{\Delta l}{l_0} \Rightarrow F = ES \frac{1}{l_0} \Delta l$$

→ Rigidité d'un ressort :

$$F = ES \frac{1}{l_0} \Delta l = KU$$

K



CHAP V: Application aux matériaux solides

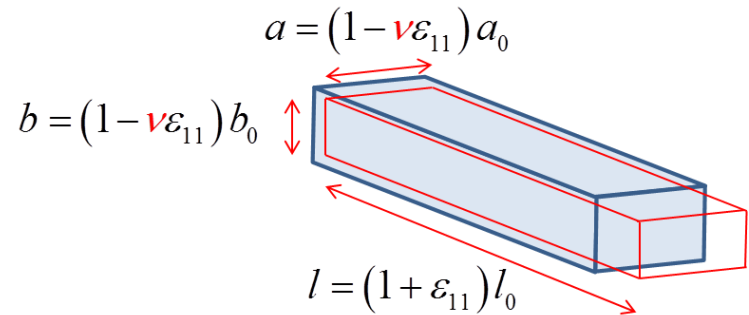
Le matériau solide élastique linéaire isotrope

- Considérations générales
- Loi de comportement
- Interprétation des paramètres matériau

- en **3D** :

déformation dans une direction

→ déformations transverses !



- loi contraintes = f (déformations) : **tridimensionnelle**
- loi **tensorielle** : indépendante de la base considérée

- **Hypothèse 1** : on se place en **HPP** !! (pour la suite : 3A ENSEM)

- **Hypothèse 2** : on étudie le solide **élastique linéaire** (suite : 3A ENSEM)

- Base : **thermodynamique** des milieux continus (annexe sur Arche)
 - Expressions lagrangiennes du **premier** et **second principe**
 - Potentiel thermodynamique menant à une loi **linéaire**

CHAP V: Application aux matériaux solides

Le matériau solide élastique linéaire isotrope

- Considérations générales
- Loi de comportement
- Interprétation des paramètres matériau

- Dans le cas d'un matériau **isotrope** : **2 paramètres suffisent**
- On se place dans un état dit **naturel** : $\underline{\underline{\sigma}}^0 = \underline{\underline{0}}$
- La loi de comportement **élastique linéaire isotrope en HPP** s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}$$

→ 2 paramètres scalaires appelés **coefficients de Lamé**

- On peut écrire la loi de comportement **inverse** (état naturel):

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}}$$

- E est le **module de Young** du matériau (généralement en GPa)
- ν est le **coefficient de Poisson** du matériau (sans unité)

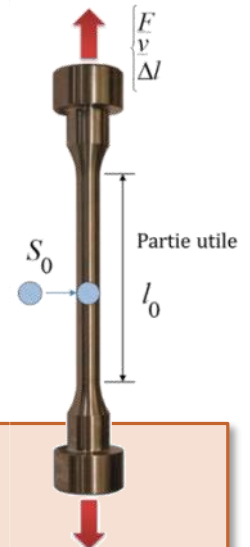
- 2 paramètres matériau :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}}$$

→ paramètres non indépendants car 2 suffisent à caractériser le matériau!

$$\begin{cases} E = \mu \left(\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \right) \\ \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = E \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{cases}$$



Exemple

- Cas de la traction simple:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{11} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 = \frac{F}{S} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}} = \frac{\sigma_{11}}{E} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \frac{\nu}{E} \sigma_{11} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3)$$

CHAP V: Application aux matériaux solides

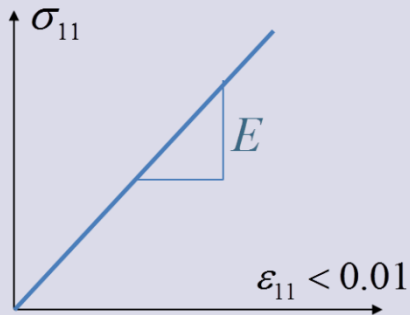
Le matériau solide élastique linéaire isotrope

- Considérations générales
- Loi de comportement
- Interprétation des paramètres matériau

Module de Young et coefficient de Poisson

Module de Young :
pente de la courbe

$$\sigma_{11} = f(\varepsilon_{11})$$



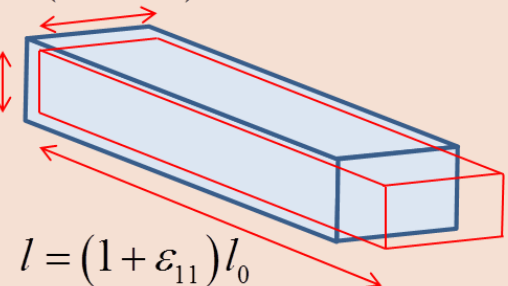
$$[\underline{\varepsilon}] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu\sigma_{11}}{E} = -\nu\varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu\sigma_{11}}{E} = -\nu\varepsilon_{11} \end{pmatrix}$$

Coefficient de Poisson:
compaction transverse

$$a = (1 - \nu\varepsilon_{11}) a_0$$

$$b = (1 - \nu\varepsilon_{11}) b_0$$

$$l = (1 + \varepsilon_{11}) l_0$$

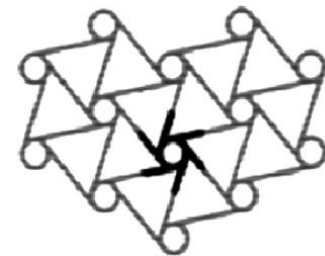
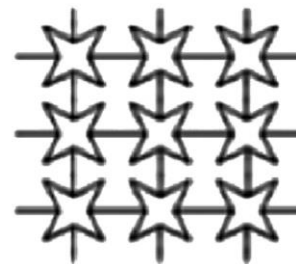
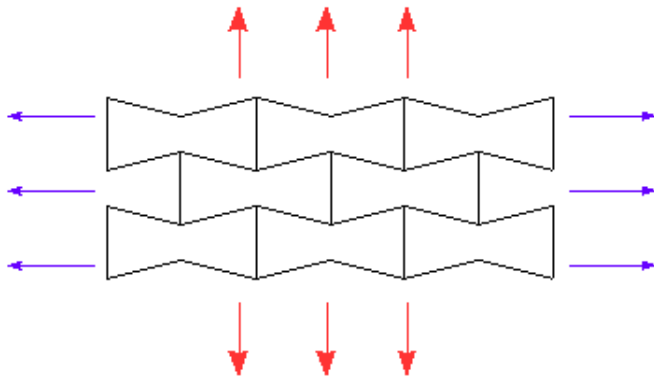


Le coefficient de Poisson : ordre de grandeur

Matériau	ν
Acier	$\sim 0,3$
Fonte	$0,21 \rightarrow 0,26$
Aluminium	$0,34$
Plomb	$0,44$
Titane	$0,34$

- Valeur commune : $\nu \approx 0.3$
- Pour un matériau quasi-incompressible:
 $\nu \rightarrow 0.5$

Au passage : coefficient de Poisson négatif ? $\rightarrow$ milieu **auxétique**



CHAP V: Application aux matériaux solides

Résolution du problème d'élastostatique

- Formulation du problème
- Principe de Saint-Venant
- Schéma de résolution classique
- La méthode des éléments finis

Hypothèses

- Elasticité linéaire, matériau isotrope
- HPP ($\underline{\underline{E}} \rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}}$ et $\underline{x} \rightarrow \underline{X}$)
- Petits écarts de température ($\Delta\Theta \rightarrow 0$)
- État « naturel » (pas de contraintes initiales) ($\sigma^0 = 0$)

Formulation du problème

- Équilibre du système $\underline{a}(\underline{X}, t) = \underline{0}$
- On connaît les forces volumiques
- On connaît les déplacements sur $\partial\Omega^U$
- On connaît les efforts surfaciques sur $\partial\Omega^T$

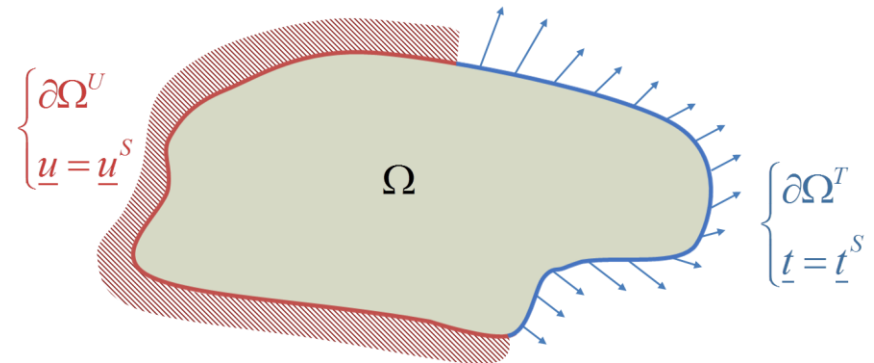
Problème **régulier**: $\partial\Omega^T \cup \partial\Omega^U = \partial\Omega$ et $\partial\Omega^T \cap \partial\Omega^U = \emptyset$

→ dans ce cas la solution est **unique**

Sinon: $\partial\Omega^T \cup \partial\Omega^U \neq \partial\Omega$ → on cherche alors une solution **approchée**

- $$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \underline{\text{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) + \rho(\underline{\underline{f}}^m - \underline{\underline{a}}) = \underline{\underline{0}} \\ (2) \quad \underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \\ (3) \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = 1/2 (\underline{\underline{\text{Grad}}}(\underline{\underline{u}}) + \underline{\underline{\text{Grad}}}(\underline{\underline{u}})^T) \\ (4) \quad \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{t}}^s \quad \text{connu en tout point de } \partial\Omega^T \\ (5) \quad \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}}^s \quad \text{connu en tout point de } \partial\Omega^U \end{array} \right.$$

Indice « s » pour « surface »



→ Premier cas: l'inconnue principale est le **champ de déplacement**

→ Second cas: l'inconnue principale est le **champ de contraintes**

CHAP V: Application aux matériaux solides

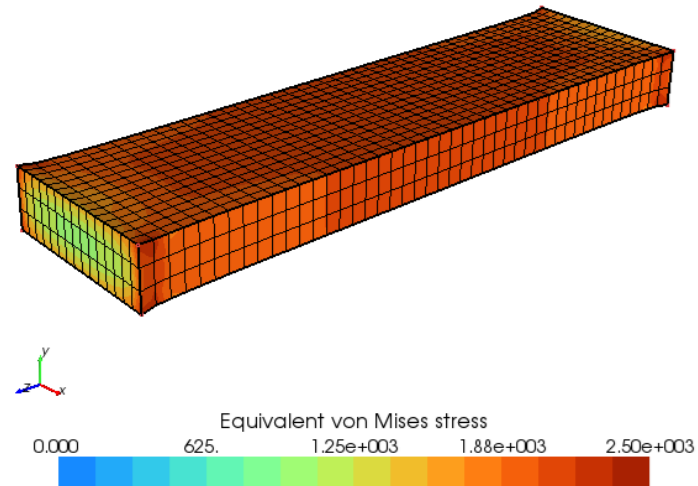
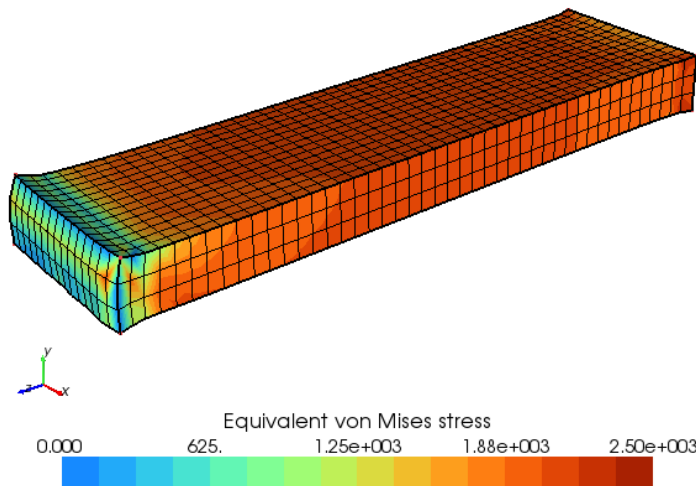
Résolution du problème d'élastostatique

- Formulation du problème
- Principe de Saint-Venant
- Schéma de résolution classique
- La méthode des éléments finis

- **Cas courant** : on ne connaît pas la **manière précise** avec laquelle les efforts sont appliqués
 - pas de conditions aux limites
 - résolution du problème ?

Hypothèse de Saint-Venant:

« L'état de contraintes et de déformations suffisamment loin d'une surface ne dépend que du torseur résultant des efforts appliqués, et non pas de leur répartition précise »

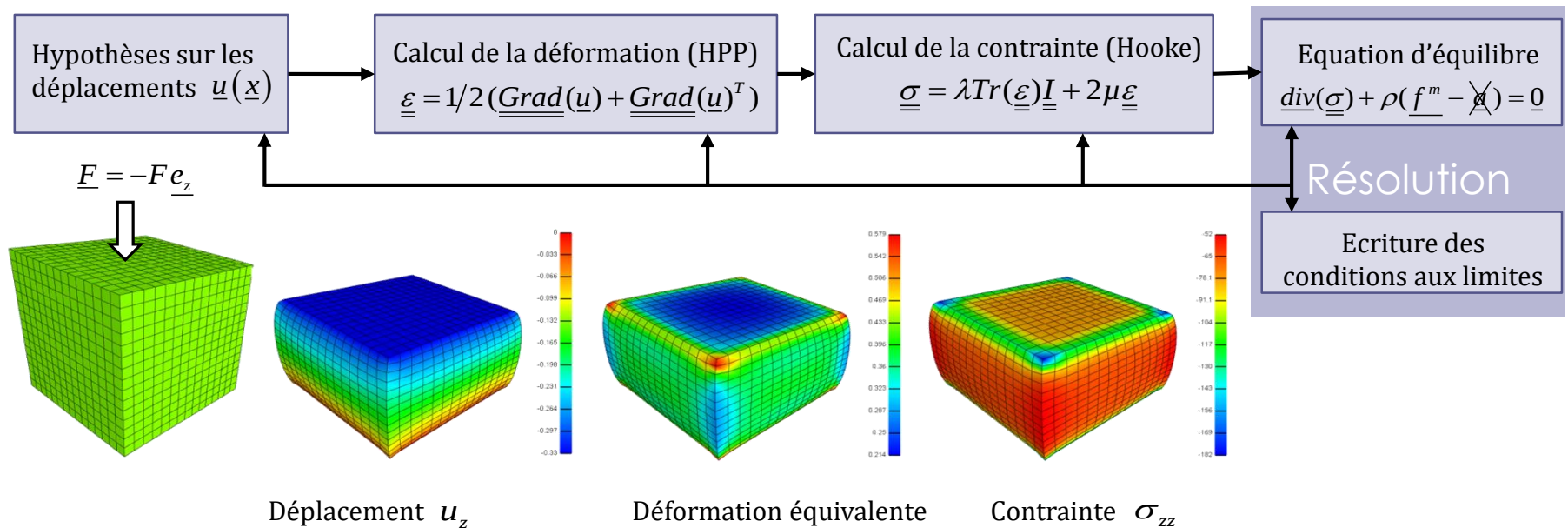


CHAP V: Application aux matériaux solides

Résolution du problème d'élastostatique

- Formulation du problème
- Principe de Saint-Venant
- Schéma de résolution classique
- La méthode des éléments finis

- **Cas courant** : on imagine une forme pour le champ de déplacements
 - On déduit la déformation puis la contrainte (loi de Hooke)
 - On écrit l'équation d'équilibre, on résout avec les CL
 - On détermine entièrement contraintes, déformations, déplacements



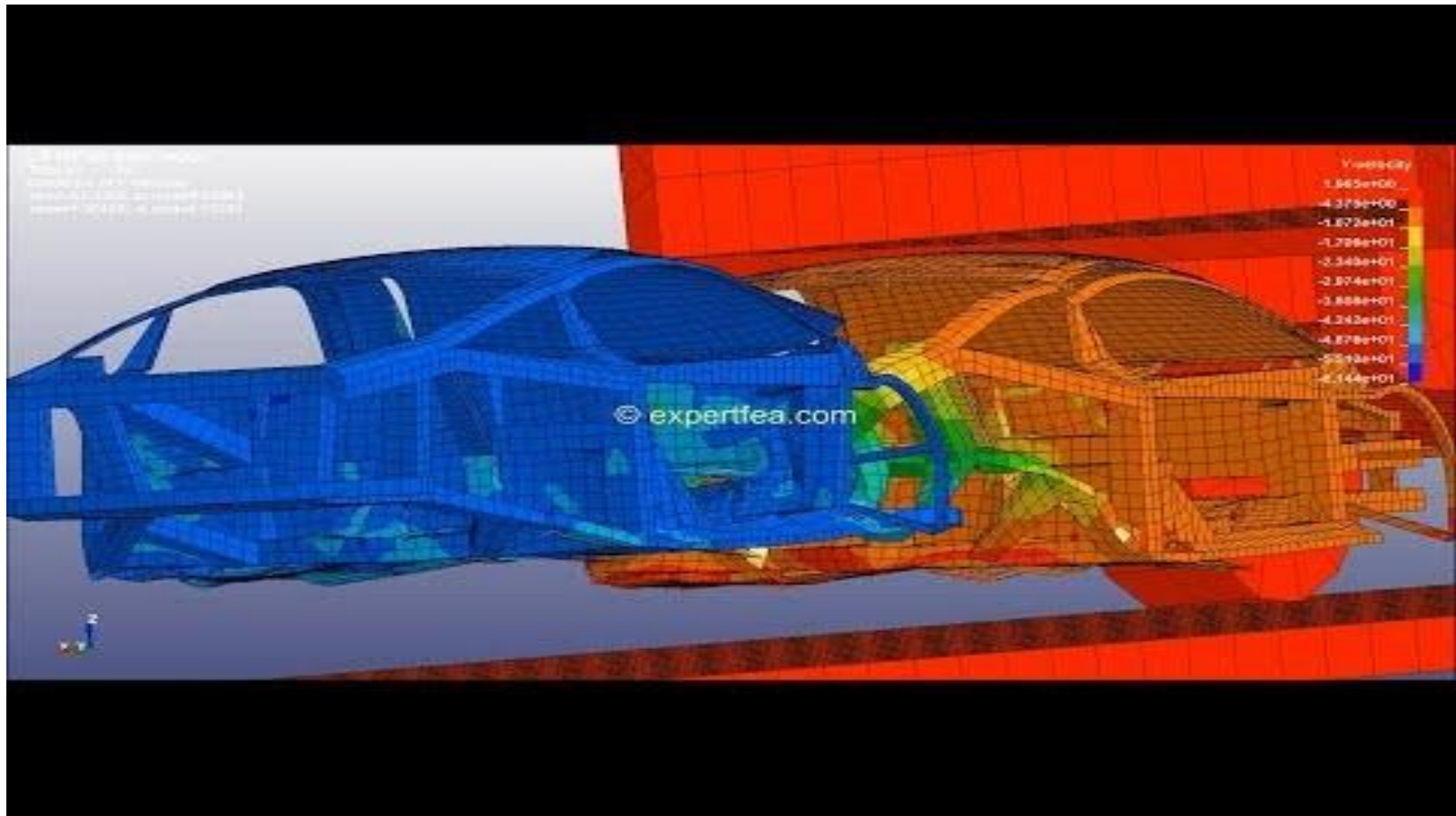
CHAP V: Application aux matériaux solides

Résolution du problème d'élastostatique

- Formulation du problème
- Principe de Saint-Venant
- Schéma de résolution classique
- La méthode des éléments finis

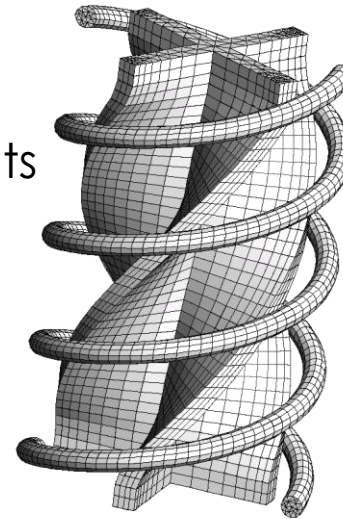
problème réel = **géométrie** et **chargement** complexes

→ les méthodes **analytiques** ne sont plus suffisantes

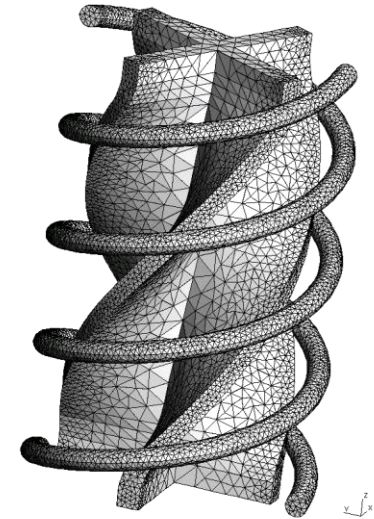


Idée: le domaine est **discrétisé** en un ensemble d'**éléments finis** simples

- on connaît les efforts ou les déplacements aux nœuds des éléments
- on sait résoudre **analytiquement** le problème mécanique sur ces éléments



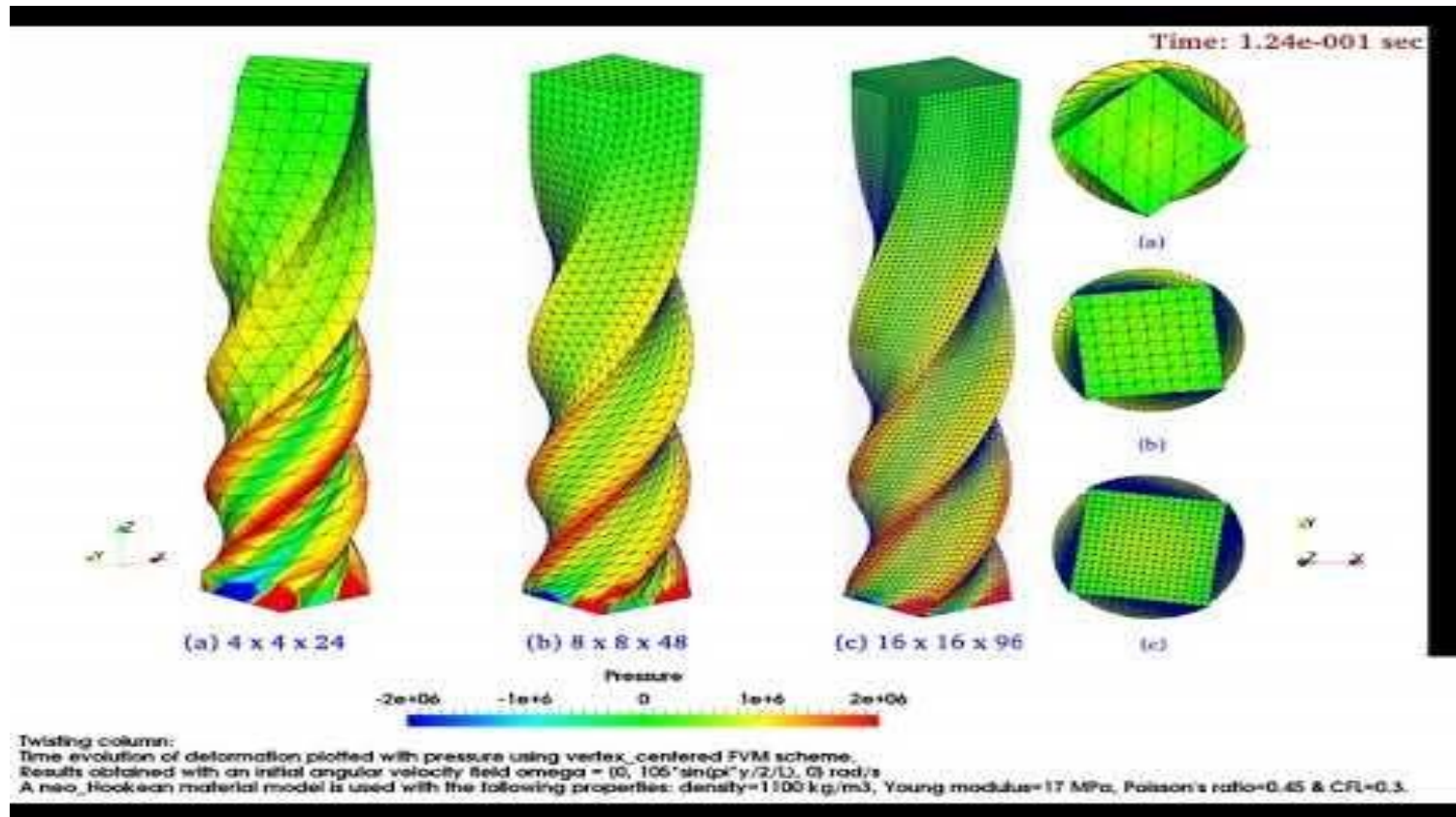
maillage en
hexaèdres



maillage en
tétraèdres

- assemblage des éléments → **matrice de rigidité globale** du système
- obtention des champs aux nœuds → **interpolation** sur les éléments

- nombre d'éléments finis importants → **convergence** vers la solution
- devient problématique dans le cas de **non-linéarités**
(grandes déformations, loi de comportement, contact ...)
- **2A/3A ENSEM... !**



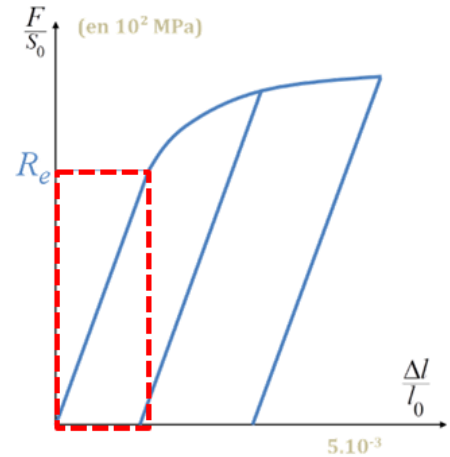
CHAP V: Application aux matériaux solides

Introduction au dimensionnement

- Le dimensionnement
- Cas unidimensionnel
- Notion de contrainte équivalente
- Contrainte équivalente de Von Mises

Dimensionner : pourquoi faire ?

- En-dessous de la **limite élastique R_e** , le comportement est élastique (et réversible)
- Au-delà de cette limite:



- ✓ endommagement
- ✓ déformations plastiques (irréversibles)
- ✓ rupture

Dans beaucoup d'applications : cette limite ne doit pas être atteinte !

CHAP V: Application aux matériaux solides

Introduction au dimensionnement

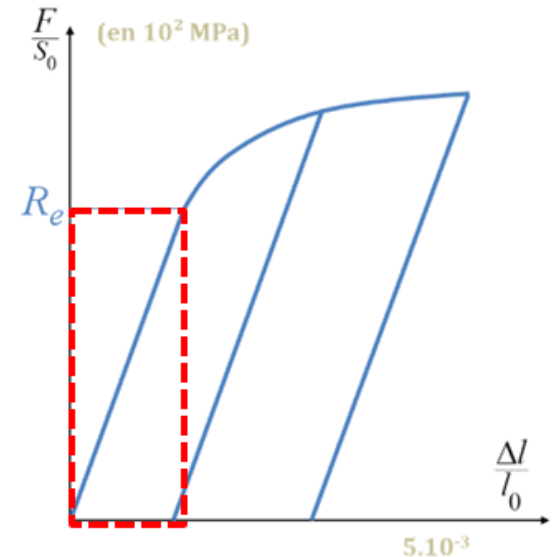
- Le dimensionnement
- Cas unidimensionnel
- Notion de contrainte équivalente
- Contrainte équivalente de Von Mises

1D → essai de traction !

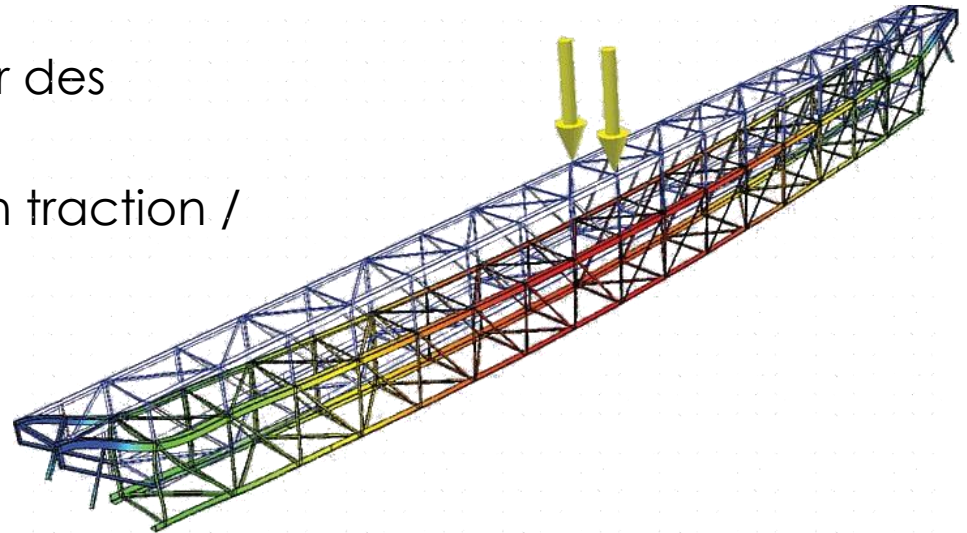
$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{zz} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z = \frac{F}{S} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$$

Critère de dimensionnement : trivial !!

$$\sigma_{zz} = \frac{F}{S} \leq R_e$$



- suffisant pour dimensionner des structures en **treillis**
(= ensemble de barres en traction / compression)

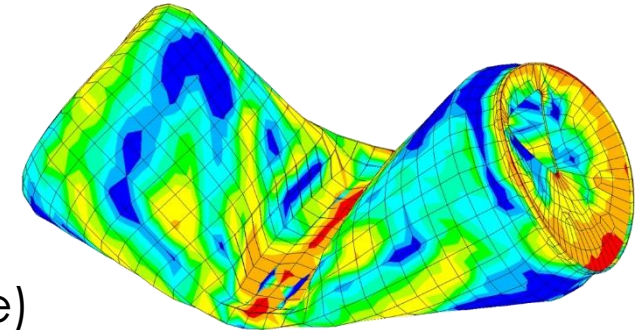


CHAP V: Application aux matériaux solides

Introduction au dimensionnement

- Le dimensionnement
- Cas unidimensionnel
- Notion de contrainte équivalente
- Contrainte équivalente de Von Mises

- Cas général : tenseur des contraintes



$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (\text{dans un repère quelconque})$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_I \underline{e}_I \otimes \underline{e}_I + \sigma_{II} \underline{e}_{II} \otimes \underline{e}_{II} + \sigma_{III} \underline{e}_{III} \otimes \underline{e}_{III} \quad (\text{dans le repère principal})$$

Objectif : comparer cet état de contraintes avec la limite élastique !

Définition : *contrainte équivalente* = scalaire à comparer avec R_e

- **formulation en termes d'invariants** : intéressant car non dépendants de la base choisie
- **constatation** : *l'énergie de distorsion élastique* (due à un changement de forme sans changement de volume) est un bon indicateur

CHAP V: Application aux matériaux solides

Introduction au dimensionnement

- Le dimensionnement
- Cas unidimensionnel
- Notion de contrainte équivalente
- Contrainte équivalente de Von Mises

Rappel : décomposition en parties sphérique et déviatorique

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^S + \underline{\underline{\sigma}}^D \quad \text{avec} \quad \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}^D) = 0 \quad \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}^S) = \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \quad \underline{\underline{\sigma}}^S = \left(\frac{\text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}})}{3} \right) \underline{\underline{I}}$$

partie « sphérique » partie « déviatorique »

→ partie déviatorique : $\underline{\underline{\sigma}}^D = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}}$ changement de forme sans
changement de volume

→ invariants de la partie déviatorique :

$$\begin{cases} I_1^{\sigma^D} = J_1 = \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}^D) = 0 \\ I_2^{\sigma^D} = J_2 = \frac{1}{2} \left(\left(\text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}^D) \right)^2 - \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}^{D^2}) \right) \\ I_3^{\sigma^D} = J_3 = \det(\underline{\underline{\sigma}}^D) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} J_1 = \sigma_I^D + \sigma_{II}^D + \sigma_{III}^D = 0 \\ J_2 = \sigma_I^D \sigma_{II}^D + \sigma_{II}^D \sigma_{III}^D + \sigma_I^D \sigma_{III}^D \\ J_3 = \sigma_I^D \sigma_{II}^D \sigma_{III}^D \end{cases}$$

Observation : bon indicateur de la sortie du régime élastique !

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sqrt{3J_2} - R_e = \underbrace{\sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{\sigma}}^D : \underline{\underline{\sigma}}^D}}_{\sigma_{VM}} - R_e = 0$$

σ_{VM} = « contrainte équivalente au sens de Von Mises »

→ tous calculs faits :

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)}$$

→ invariant : on peut l'écrire dans la base principale !

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_I - \sigma_{III})^2}$$

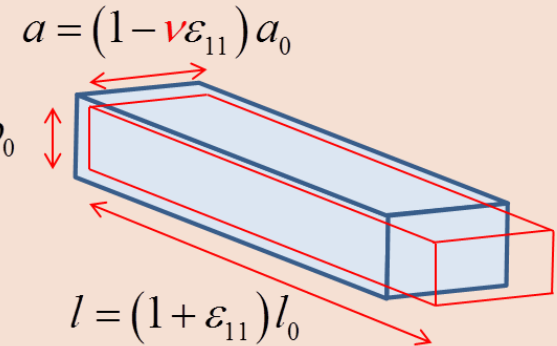
→ pour un état de contrainte quelconque : on peut comparer σ_{VM} et R_e

Exemple

- Essai de traction: état de contraintes

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{F}{S} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$$

$$b = (1 - \nu \varepsilon_{11}) b_0$$



- Passage dans le repère principal : déjà fait !

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{F}{S} \underline{e}_I \otimes \underline{e}_I \quad \sigma_I = \frac{F}{S}, \sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$$

- Contrainte équivalente au sens de Von Mises :

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\cancel{\sigma_I} - \cancel{\sigma_{II}})^2 + (\cancel{\sigma_{II}} - \cancel{\sigma_{III}})^2 + (\cancel{\sigma_{III}} - \cancel{\sigma_I})^2}$$

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{F}{S}\right)^2 + \left(-\frac{F}{S}\right)^2} = \frac{F}{S}$$

- Critère de dimensionnement : $\sigma_{VM} \leq R_e \quad \Rightarrow \quad F \leq R_e S$

Exemple

- Arbre en torsion : état de contraintes

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z + \tau (\underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z)$$

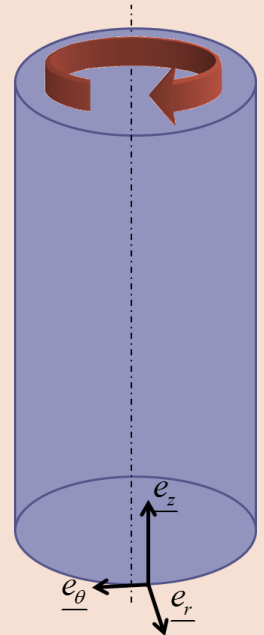
- Passage dans le repère principal

$$[\underline{\underline{\sigma}}]_{(\underline{e}_I, \underline{e}_{II}, \underline{e}_{III})} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \end{pmatrix}$$

- Contrainte équivalente au sens de Von Mises :

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2} = \dots = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

- Critère de dimensionnement : $\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq R_e$



CHAPITRE VI

Application aux fluides

CHAP VI: Application aux fluides

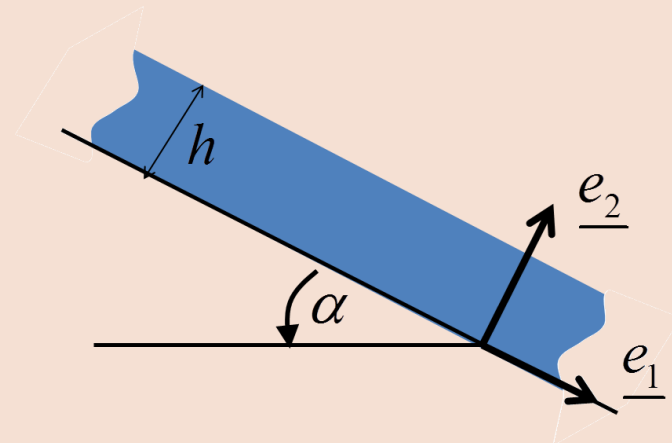
Cinématique des fluides

- Description de la transformation
- Vitesse de déformation
- Bagage mathématique : le rotationnel
- Vorticité et tourbillon

Exemple

Ecoulement le long d'un plan incliné

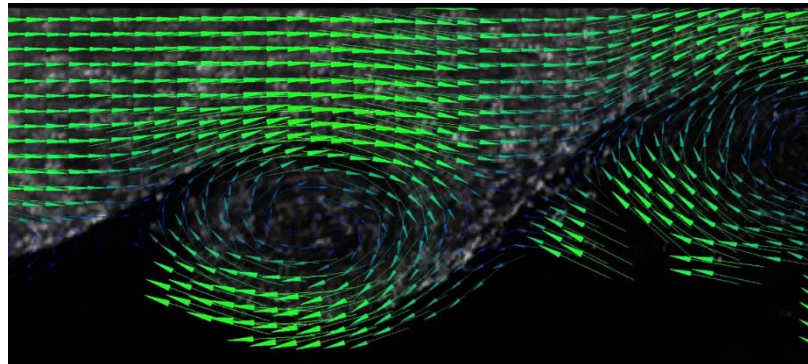
- Fluide d'épaisseur h soumis aux seules forces de pesanteur



- Intuition : plus le fluide est visqueux, plus l'écoulement est lent !
- Questions :
 - Quel est le lien entre vitesse et viscosité ?
 - Quel est le profil de vitesses dans l'épaisseur du fluide ?

Pour un fluide en mouvement : notion de « configuration de référence » ?

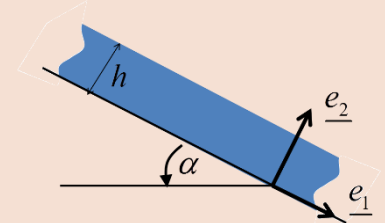
→ utilisation de la description eulérienne $\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, t)$



- **Rappel** : définition de la trajectoire $d\underline{x} = \underline{v}(\underline{x}, t)dt$ avec $\underline{x}(t = 0) = \underline{X}$
- **Rappel** : définition de la ligne de courant $\frac{dx_1}{v_1(\underline{x}, t)} = \frac{dx_2}{v_2(\underline{x}, t)} = \frac{dx_3}{v_3(\underline{x}, t)}$

Exemple

- Physique et symétrie du problème : on propose le champ de vitesses $\underline{v}(x_2) = v_1(x_2)\underline{e}_1$



CHAP VI: Application aux fluides

Cinématique des fluides

- Description de la transformation
- Vitesse de déformation
- Bagage mathématique : le rotationnel
- Vorticité et tourbillon

- résultats obtenus précédemment :

✓ tenseur de **description eulérienne** : $\underline{\underline{k}} = \underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t)$

✓ la partie **symétrique** de ce tenseur est **la vitesse de déformation** :

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) + \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \right)^T \right)$$

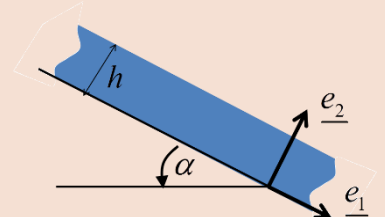
✓ la partie **antisymétrique** de ce tenseur est **la vitesse de rotation** :

$$\underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) - \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \right)^T \right)$$

Exemple

$$\left[\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \right] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \left[\underline{\underline{d}} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \left[\underline{\underline{\Omega}} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 \\ -\frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{v}(x_2) = v_1(x_2) \underline{e}_1$



CHAP VI: Application aux fluides

Cinématique des fluides

- Description de la transformation
- Vitesse de déformation
- Bagage mathématique : le rotationnel
- Vorticité et tourbillon

Définition du rotationnel d'un champ de vecteurs

- **Rotationnel** d'un champ de vecteurs: $\underline{\text{rot}} \underline{T} = \underline{\nabla} \wedge \underline{T}$

→ Rotationnel d'un champ de vecteurs = champ de vecteurs

- Coordonnées **cartésiennes**

$$[\underline{\text{rot}} \underline{T}] = [\underline{\nabla}] \wedge [\underline{T}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_3}{\partial x_2} - \frac{\partial T_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_1}{\partial x_3} - \frac{\partial T_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial T_2}{\partial x_1} - \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

- Coordonnées **cylindriques**

$$[\underline{\text{rot}} \underline{T}] = [\underline{\nabla}] \wedge [\underline{T}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial T_z}{\partial \theta} - \frac{\partial T_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial T_r}{\partial z} - \frac{\partial T_z}{\partial r} \\ \frac{\partial r T_\theta}{\partial r} - \frac{\partial T_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

CHAP VI: Application aux fluides

Cinématique des fluides

- Description de la transformation
- Vitesse de déformation
- Bagage mathématique : le rotationnel
- Vorticité et tourbillon

- on peut définir alors le champ de **vorticité** du fluide $\underline{\omega}$ tel que :

$$\underline{\omega}(\underline{x}, t) = \underline{rot} \, \underline{v}(\underline{x}, t)$$

→ la direction de $\underline{\omega}$ est l'axe de rotation locale du fluide

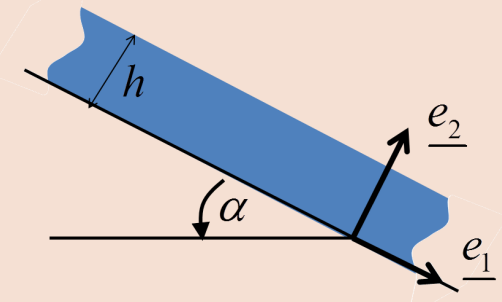


Exemple

- Vorticité du fluide (sans en connaître encore la forme exacte) :

$$[\underline{\omega}(\underline{x}, t)] = [\underline{rot} \, \underline{v}(\underline{x}, t)] = \begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial v_3}{\partial x_2}} - \cancel{\frac{\partial v_2}{\partial x_3}} \\ \cancel{\frac{\partial v_1}{\partial x_3}} - \cancel{\frac{\partial v_3}{\partial x_1}} \\ \cancel{\frac{\partial v_2}{\partial x_1}} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}(\underline{x}_2) = v_1(\underline{x}_2) \underline{e}_1$$



- On considère le tenseur **vitesse de rotation** ci-dessus

$$\underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) - \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \right)^T \right)$$

→ tenseur d'ordre 2 : application linéaire qui « transforme un vecteur en un autre vecteur »

- On applique ce tenseur à un vecteur quelconque $\underline{a}$:

$$[\underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{a}] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) a_2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) a_3 \\ \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) a_1 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) a_3 \\ \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) a_1 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) a_2 \end{pmatrix}$$

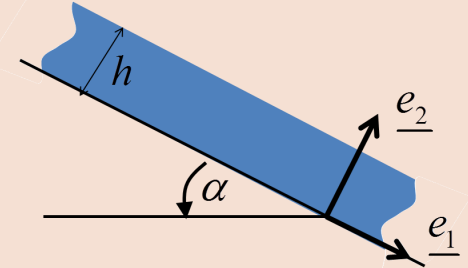
→ on peut définir un **vecteur tourbillon** $\underline{\underline{\Omega}}$ tel que : $\underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{a} = \underline{\underline{\Omega}} \wedge \underline{a}$

→ on constate rapidement : $\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \underline{\underline{rot}} \underline{v}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\omega}}(\underline{x}, t)$

Exemple

- Vitesse de rotation calculée :

$$[\underline{\underline{\Omega}}] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \partial v_1 / \partial x_2 & 0 \\ -\partial v_1 / \partial x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



- Transformation d'un vecteur :
$$[\underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{a}] = \frac{1}{2} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- On peut définir $\underline{\underline{\Omega}}$ tel que $\underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{a} = \underline{\underline{\Omega}} \wedge \underline{a}$:

$$\left. \begin{aligned} [\underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{a}] &= \frac{1}{2} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ [\underline{\underline{\Omega}} \wedge \underline{a}] &= \begin{pmatrix} \Omega_2 a_3 - \Omega_3 a_2 \\ \Omega_3 a_1 - \Omega_1 a_3 \\ \Omega_1 a_2 - \Omega_2 a_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{a} = \underline{\underline{\Omega}} \wedge \underline{a} \Rightarrow \begin{cases} \Omega_3 = -\frac{1}{2} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ \Omega_1 = \Omega_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\omega}}(\underline{x}, t)$$

CHAP VI: Application aux fluides

Lois de conservation

- Conservation de la masse
- Conservation de la quantité de mouvement

- rappel : expression **eulérienne** de la **conservation de la masse**

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{v}) = 0} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\underline{v}) = 0}$$

- On peut également proposer la formulation **faible** suivante :

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \rho \underline{v} \cdot \underline{da} = 0$$

Variation dans le
temps de la masse
volumique

Flux de matière
sortante

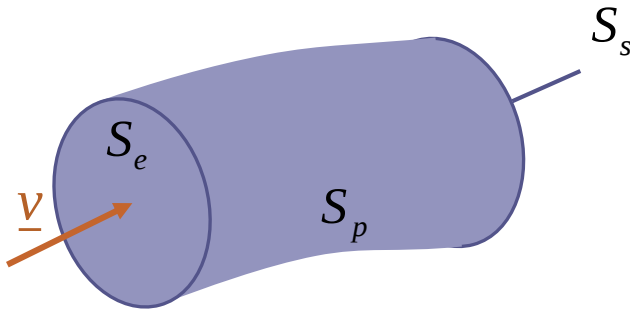
- Ecoulement **stationnaire**

= description eulérienne indépendante du temps $\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

la conservation de la masse devient : $\int_{\partial\Omega_t} \rho \underline{v} \cdot \underline{da} = 0$

- Cas d'une **canalisation** en mouvement **stationnaire**

frontière = surface d'entrée S_e + surface de sortie S_s + paroi S_p



→ Conservation de la masse :

$$\int_{\partial\Omega_t} \rho \underline{v}(\underline{x}, t) \underline{da} = \int_{S_e} \rho \underline{v} \cdot \underline{da} + \int_{S_s} \rho \underline{v} \cdot \underline{da} + \int_{S_p} \rho \underline{v} \cdot \underline{da} = 0$$

- Paroi étanche → $\int_{S_p} \rho \underline{v} \cdot \underline{da} = 0$ → $-\int_{S_e} \rho \underline{v} \cdot \underline{da} = \int_{S_s} \rho \underline{v} \cdot \underline{da} = Q_m$
= **conservation du débit massique** (en kg.s^{-1})

- Equation de conservation de la masse : $\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div}(\underline{v}) = 0$

- Si le fluide est **incompressible** : $\rho(\underline{x}, t) = \rho_0$

→ on retrouve la condition d'incompressibilité $\text{div}(\underline{v}) = 0$

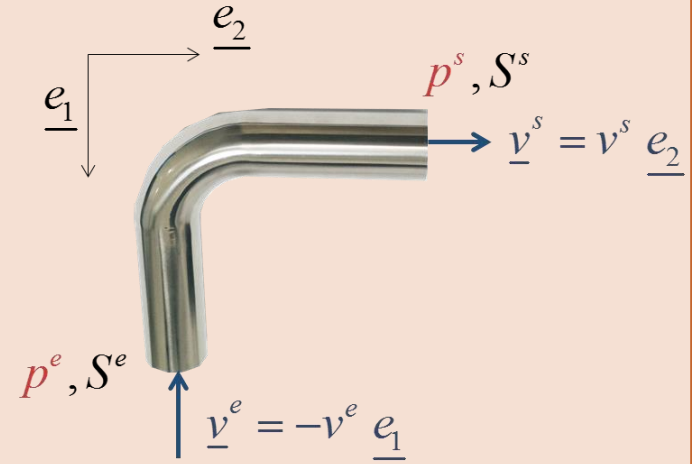
Exemple

Canalisation coudée de section constante

- Vitesses d'entrée et de sortie

$$\underline{v}^e = -v^e \underline{e}_1$$

$$\underline{v}^s = -v^s \underline{e}_1$$



- Hypothèse : fluide incompressible → conservation du débit massique

$$-\int_{S^e} \rho \underline{v}^e \cdot \underline{n}^e da = \int_{S^s} \rho \underline{v}^s \cdot \underline{n}^s da \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{n}^e = \underline{e}_1 \\ \underline{n}^s = \underline{e}_2 \end{cases}$$

- Masse volumique constante + vitesse uniformément répartie

$$-\int_{S^e} \rho (-v^e \underline{e}_1) \cdot \underline{e}_1 da = \int_{S^s} \rho v^s \underline{e}_2 \cdot \underline{e}_2 da \Rightarrow \rho v^e S^e = \rho v^s S^s \Rightarrow \boxed{v^e = v^s}$$

CHAP VI: Application aux fluides

Lois de conservation

- Conservation de la masse
- Conservation de la quantité de mouvement

- On tente d'exprimer la variation de la **quantité de mouvement** :

$$\frac{d}{dt} \underline{p} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \underline{v} d\Omega_t$$

- On reprend la formule de dérivée particulière d'une intégrale de volume avec $b = \rho v_i$:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho v_i d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \rho v_i \underline{v} \cdot d\underline{a}$$

- Vraie pour toutes les composantes → **formule de transport d'Euler**

$$\frac{d}{dt} \underline{p} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \underline{v} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{v}) d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) da$$

Variation au sein du système

Transfert par la frontière

- Rappel :**

variation de quantité de mouvement = somme des efforts extérieurs

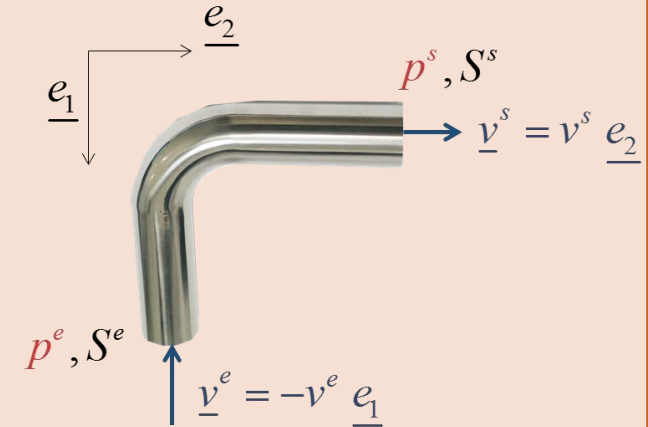
Exemple

Canalisation coudée de section constante

- Variation de la qdm entre t et $t + dt$

$$d\underline{p} = (\underline{p}(t + dt) + dm^s \underline{v}^s) - (\underline{p}(t) + dm^e \underline{v}^e)$$

$$d\underline{p} = \underline{p}(t + dt) + \rho v^2 S dt \underline{e}_2 - \underline{p}(t) + \rho v^2 S dt \underline{e}_1$$



- conservation de la qdm : $\underline{p}(t + dt) = \underline{p}(t) \Rightarrow \frac{d\underline{p}}{dt} = \rho v^2 S (\underline{e}_1 + \underline{e}_2) = \sum \underline{F}^{ext}$

- fluide soumis aux seules forces de pression : $\underline{F}^{ext} = -p^e S^e \underline{e}_1 - p^s S^s \underline{e}_2 + \underline{F}$

- on en déduit l'effort : $\underline{F} = S(p^e + \rho v^2) \underline{e}_1 + S(p^s + \rho v^2) \underline{e}_2$
effort de la paroi sur le fluide

- et enfin l'effort : $\underline{F}^{fluide/paroi} = -S(\rho v^2 + p^e) \underline{e}_1 - S(\rho v^2 + p^s) \underline{e}_2$

CHAP VI: Application aux fluides

Le fluide newtonien

Observations expérimentales :

Pour un fluide en **hydrostatique** , la contrainte normale est identique quelque soit la normale considérée : $\forall \underline{n}, \quad \underline{t}(\underline{x}, \underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n} = -p \underline{n}$

p : pression hydrostatique

- Tenseur des contraintes en **hydrostatique** : $\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}}$
- Aucune contrainte **tangentielle** → **définition d'un fluide** :

« un fluide est un matériau qui au repos ne peut supporter aucune contrainte tangentielle »

Mise en **mouvement** de ce fluide → apparition de **contraintes visqueuses**

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}$$

Tenseur des contraintes
hydrostatique

Tenseur des
contraintes visqueuses

- Fluide **newtonien** : relation **linéaire** entre le taux de déformation $\underline{\underline{d}}$ et le tenseur des contraintes visqueuses $\underline{\underline{\tau}}$
- Fluide **newtonien incompressible isotrope** :
la relation **linéaire** se réduit à un coefficient = **viscosité dynamique** μ

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\mu\underline{\underline{d}} = \mu \left(\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}} + \left(\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}} \right)^T \right)$$

Loi de comportement pour un fluide newtonien :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + 2\mu\underline{\underline{d}} \quad \underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}} + \left(\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}} \right)^T \right)$$

viscosité dynamique μ : **contrainte de cisaillement** accompagnant un **gradient de vitesse** dans un **fluide**

- Pour les fluides **newtoniens** : viscosité **indépendante** du gradient
- En revanche : dépendant de la **température** du fluide

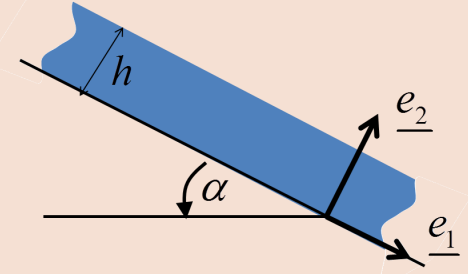
exemple : viscosité dynamique de l'eau

- 20°C : 10^{-3} Pa.s
- 0°C : $1,75 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$

Exemple

- On a calculé la vitesse de déformation :

$$[\underline{d}] = \frac{1}{2} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



- La contrainte partout dans le fluide se calcule :

$$[\underline{\sigma}] = -p[\underline{I}] + 2\mu[\underline{d}] = -p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & \mu \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 \\ \mu \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

CHAP VI: Application aux fluides

Equation de Navier-Stokes

- Démonstration et énoncé
- Utilisation

Démonstration et énoncé

- Equation d'équilibre (valables pour les fluides et les solides)

$$\underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\sigma}} + \rho (\underline{\underline{f}}^m - \underline{\underline{a}}) = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{a}} = \frac{d\underline{\underline{v}}}{dt} = \frac{\partial \underline{\underline{v}}}{\partial t} + \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\underline{v}}) \cdot \underline{\underline{v}}$$

$$\underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{\underline{f}}^m = \rho \left(\frac{\partial \underline{\underline{v}}}{\partial t} + \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\underline{v}}) \cdot \underline{\underline{v}} \right)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{d}}$$

$$\underline{\underline{\text{div}}}(-p \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{d}}) + \rho \underline{\underline{f}}^m = \rho \left(\frac{\partial \underline{\underline{v}}}{\partial t} + \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\underline{v}}) \cdot \underline{\underline{v}} \right)$$

$$\underline{\underline{\text{div}}}(-p \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{d}}) = -\underline{\underline{\text{div}}}(p \underline{\underline{I}}) + \underline{\underline{\text{div}}}(2\mu \underline{\underline{d}})$$

$$-\underline{\underline{\text{div}}}(p \underline{\underline{I}}) + \underline{\underline{\text{div}}}(2\mu \underline{\underline{d}}) + \rho \underline{\underline{f}}^m = \rho \left(\frac{\partial \underline{\underline{v}}}{\partial t} + \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\underline{v}}) \cdot \underline{\underline{v}} \right)$$

$$\underline{\underline{\text{div}}}(p \underline{\underline{I}}) = \frac{\partial (p I_{ij})}{\partial x_j} \underline{\underline{e}}_i = \frac{\partial p}{\partial x_i} \underline{\underline{e}}_i = \underline{\underline{\text{grad}}}(p)$$

$$\underline{\underline{\text{div}}}(2\mu \underline{\underline{d}}) = \frac{\partial (2\mu d_{ij})}{\partial x_j} \underline{\underline{e}}_i = 2\mu \frac{\partial d_{ij}}{\partial x_j} \underline{\underline{e}}_i = 2\mu \underline{\underline{\text{div}}}(\underline{\underline{d}})$$

Démonstration et énoncé

$$-\underline{\underline{grad}}(p) + 2\mu \underline{\underline{div}}(\underline{\underline{d}}) + \rho \underline{\underline{f}}^m = \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{grad}}(\underline{v}) \cdot \underline{v} \right)$$

$$\underline{\underline{div}}(\underline{\underline{d}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{div}} \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v} + \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v} \right)^T \right) = \frac{1}{2} \underline{\underline{div}}(\underline{\underline{grad}} \underline{v}) + \frac{1}{2} \underline{\underline{div}}(\underline{\underline{grad}} \underline{v})^T$$

$$\underline{\underline{div}}(\underline{\underline{grad}} \underline{v}) = \Delta \underline{v}$$

$$\left(\underline{\underline{grad}}(\underline{v}) \right)^T = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \Rightarrow \underline{\underline{div}}(\underline{\underline{grad}}(\underline{v}))^T = \frac{\partial \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v} \right)_{ij}}{\partial x_j} \underline{e}_i = \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \underline{e}_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \cancel{\underline{\underline{div}} \underline{v}} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow -\underline{\underline{grad}}(p) + \mu \Delta \underline{v} + \rho \underline{\underline{f}}^m = \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{grad}}(\underline{v}) \cdot \underline{v} \right)$$

$$\underline{\underline{f}}^m = \underline{g}$$

$$\rho \frac{d \underline{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{grad}}(\underline{v}) \cdot \underline{v} \right) = -\underline{\underline{grad}}(p) + \mu \Delta \underline{v} + \rho \underline{g}$$

= équation de Navier-Stokes

- équation de **Navier-Stokes** =
 - ✓ **équation d'équilibre** du milieu continu
 - ✓ loi de comportement du fluide **newtonien**
 - ✓ **incompressibilité** du fluide
- **Inconnues** : champ de vitesse (3 composantes) et champ de pression

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = -\underline{\text{grad}}(p) + \mu \underline{\Delta v} + \rho \underline{g}$$

→ Accélération x masse = somme des forces avec :

$\rho d\underline{v}/dt$: l'accélération du fluide

$-\underline{\text{grad}}(p)$: les « forces de pression »

$\mu \underline{\Delta v}$: les « forces visqueuses »

$\rho \underline{g}$: les « forces de pesanteur »

CHAP VI: Application aux fluides

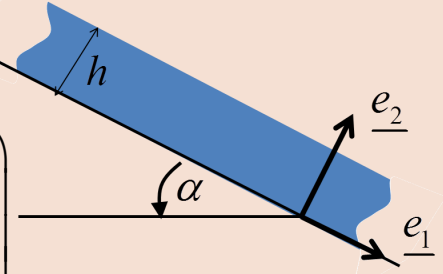
Equation de Navier-Stokes

- Démonstration et énoncé
- Utilisation

Exemple

- Ecrivons le 1^{er} terme de l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \left[\frac{d\underline{v}}{dt} \right] = \rho \left(\cancel{\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}} + [\underline{\underline{grad}}(\underline{v})] \cdot [\underline{v}] \right) = \rho \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(x_2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



- Hypothèse : un champ de pression sous la forme $p(x_1, x_2)$

$$-\underline{\underline{grad}}(p) = -\frac{\partial p}{\partial x_1} \underline{e}_1 - \frac{\partial p}{\partial x_2} \underline{e}_2 - \cancel{\frac{\partial p}{\partial x_3} \underline{e}_3}$$

- Laplacien du champ de vitesses : $\Delta \underline{v} = \underline{\underline{div}}(\underline{\underline{grad}} \underline{v}) = \underline{\underline{div}} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 \right) = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \underline{e}_1$

- Equation finale :
- $$\begin{cases} 0 = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \rho g \sin \alpha \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial x_2} - \rho g \cos \alpha \end{cases}$$

- équation de **Navier-Stokes = non-linéaire**

→ Résolution : nécessite des **conditions aux limites**

Vitesse donnée au bord

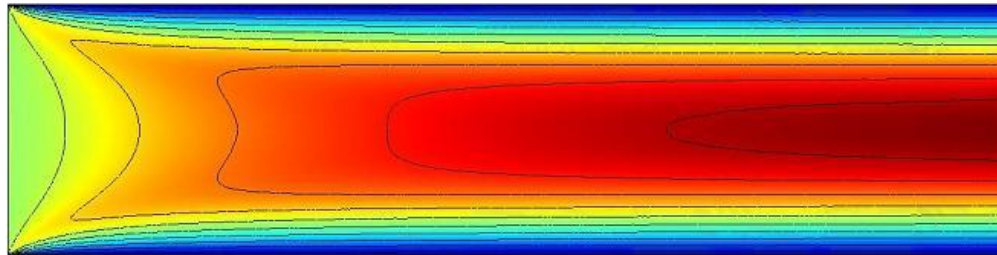
$$\forall \underline{x} \in \partial\Omega, \underline{v}(\underline{x}) = \underline{v}^0(\underline{x})$$

Pression donnée en un point du bord

$$p(\underline{x}^0 \in \partial\Omega) = p^0$$

- Condition aux limites courante : condition **d'adhérence à la paroi**

$$\forall \underline{x} \in \partial\Omega, \underline{v}(\underline{x}) = \underline{0}$$



Exemple

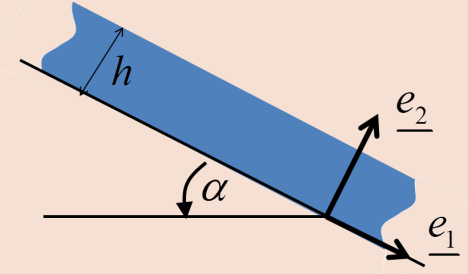
- Seconde équation de Navier-Stokes :

$$\Rightarrow p(x_1, x_2) = -\rho g \cos \alpha x_2 + f(x_1)$$

- Condition à la limite : surface libre

$$p(x_1, h) = -\rho g \cos \alpha h + f(x_1) = P_0 \Rightarrow f(x_1) = P_0 + \rho g \cos \alpha h$$

$$\rightarrow \text{Pression : } p(x_2) = \rho g \cos \alpha (h - x_2) + P_0$$



- Première équation de Navier-Stokes :

$$0 = -\cancel{\frac{\partial p}{\partial x_1}} + \mu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \rho g \sin \alpha \Rightarrow \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} = -\frac{\rho g}{\mu} \sin \alpha \Rightarrow v_1 = -\frac{\rho g}{2\mu} \sin \alpha x_2^2 + A x_2 + B$$

- Condition d'adhérence à la paroi : $v_1(x_2 = 0) = 0 \Rightarrow B = 0$

Exemple

- La contrainte a été calculée :

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} -p & \mu \partial v_1 / \partial x_2 & 0 \\ \mu \partial v_1 / \partial x_2 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

- Condition de surface libre :

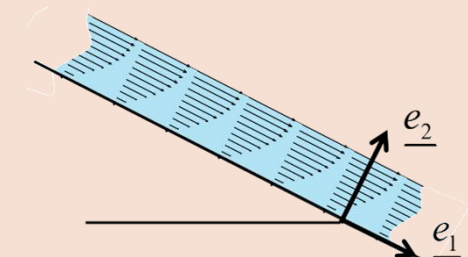
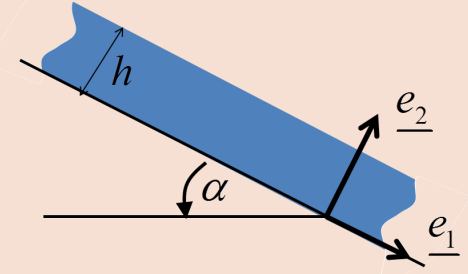
$$\underline{t}(x_2 = h, \underline{e}_2) = \underline{\underline{\sigma}}(x_2 = h) \cdot \underline{e}_2 = \sigma_{12}(x_2 = h) \underline{e}_1 + \sigma_{22}(x_2 = h) \underline{e}_2 + \sigma_{32}(x_2 = h) \underline{e}_3 = -P_0 \underline{e}_2$$

- La dernière constante se déduit :

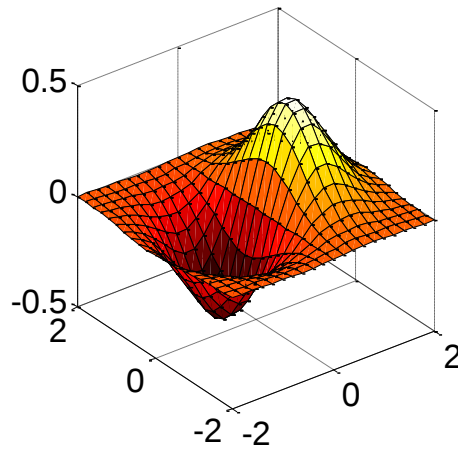
$$\sigma_{12}(x_2 = h) = \mu \left. \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right|_{x_2=h} = -\rho g \sin \alpha h + A\mu = 0 \Rightarrow A = \frac{\rho g}{\mu} \sin \alpha h$$

- Profil de vitesses final :

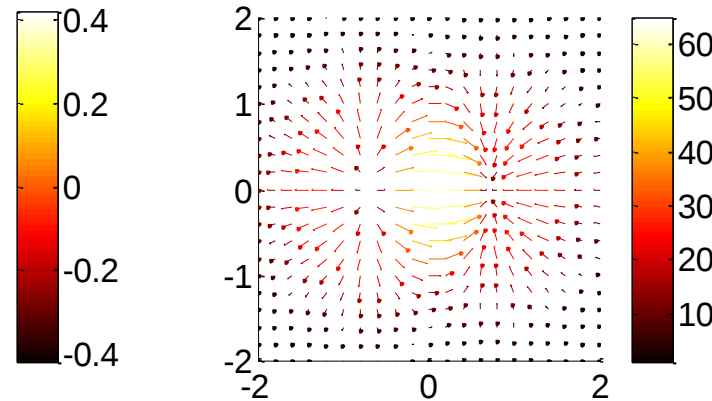
$$v_1(x_2) = -\frac{\rho g}{2\mu} \sin \alpha x_2^2 + \frac{\rho g}{\mu} \sin \alpha h x_2 = \frac{\rho g}{\mu} \sin \alpha \left(h - \frac{x_2}{2} \right) x_2$$



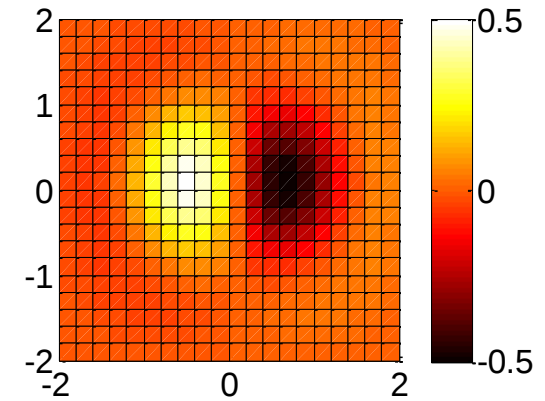
**Synthèse: ce qu'il faut
VRAIMENT retenir**



Fonction scalaire

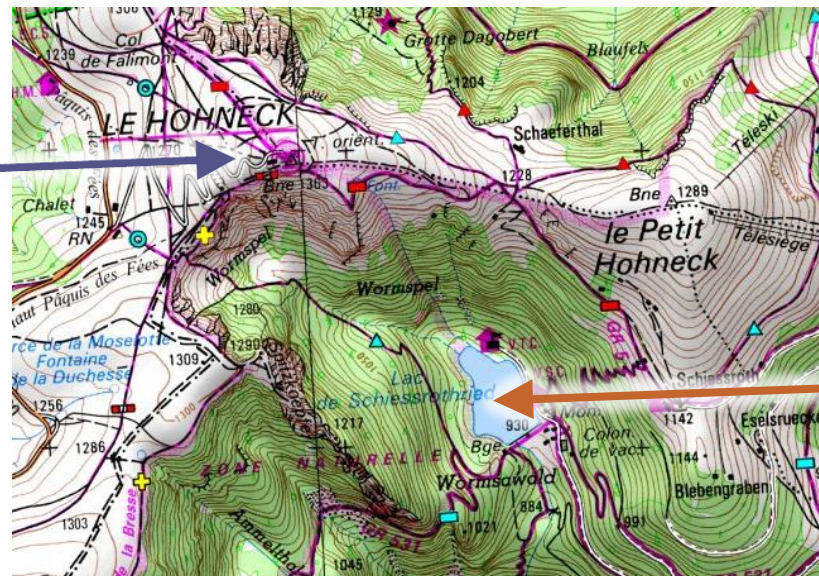


Gradient



Laplacien

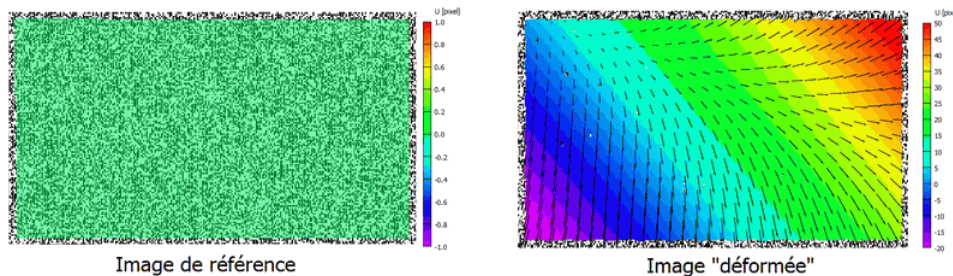
Laplacien de
l'altitude
négatif



Laplacien de
l'altitude
positif

- ✓ deux **configurations** : **initiale**, **actuelle**
- ✓ deux descriptions du problème:

lagrangienne



DIC : Digital image correlation

= description **par trajectoire**

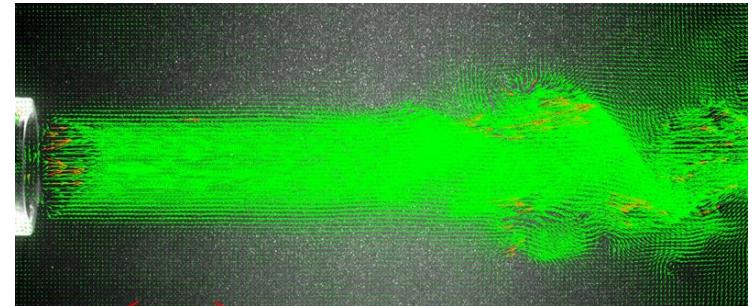
→ on suit le mouvement

→ adapté aux **solides**

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$$

VS

eulérienne



PIV : Particle Image Velocimetry

= description par le **champ de vitesses** en des points précis de la configuration **actuelle**

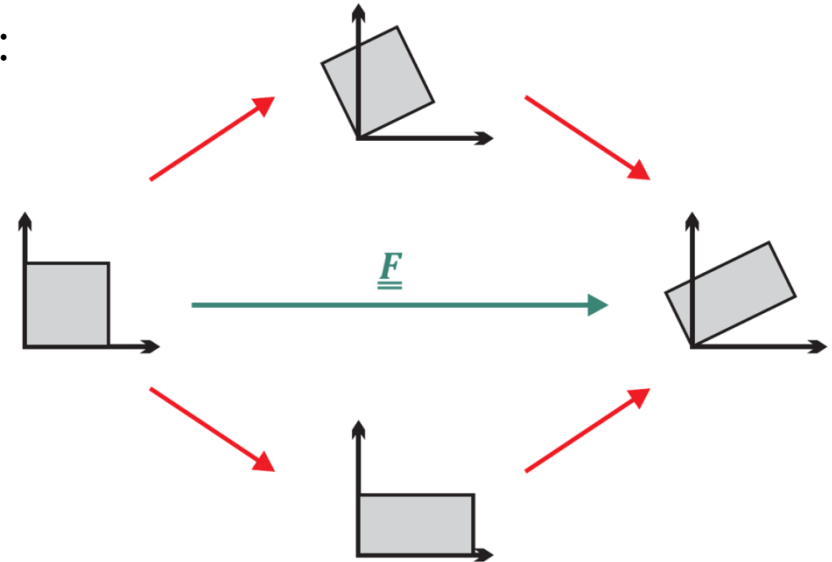
→ adapté aux **fluides**

$$\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, t)$$

✓ Tenseur gradient de la transformation :

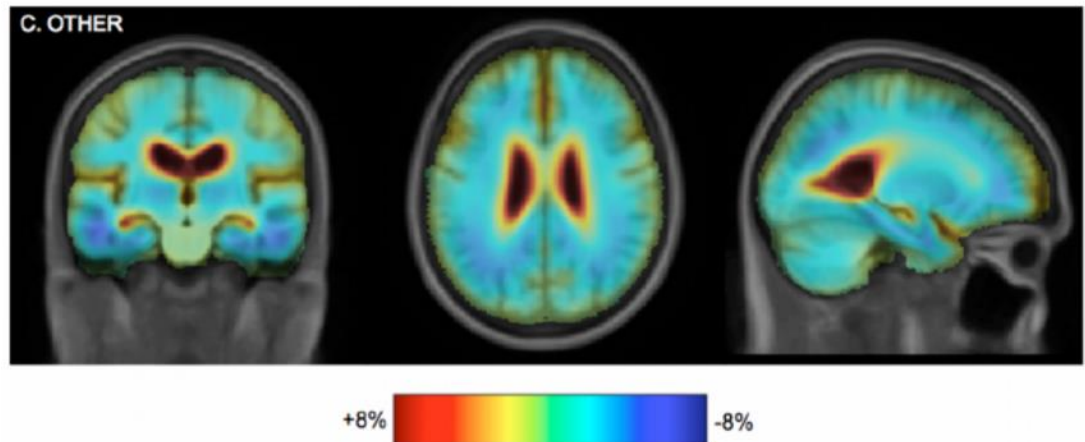
contient toute l'information

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{Grad}}(\underline{u}(\underline{X}, t)) + \underline{\underline{I}}$$



✓ Variation locale de volume : Jacobien de la transformation

$$\frac{d\Omega}{d\Omega_0} = \det \underline{\underline{F}} = J$$



- ✓ Tenseur des **déformations de Green-Lagrange** :

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}} \right)$$

= cas général en grandes déformations

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u} + (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u})^T + (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u})^T \cdot \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u} \right)$$

- ✓ Tenseur des **déformations linéarisé (en HPP)** :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u}(\underline{X}, t) + (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u}(\underline{X}, t))^T \right)$$

= Cas particulier en HPP

Les composantes des tenseurs de déformation sont sans dimension

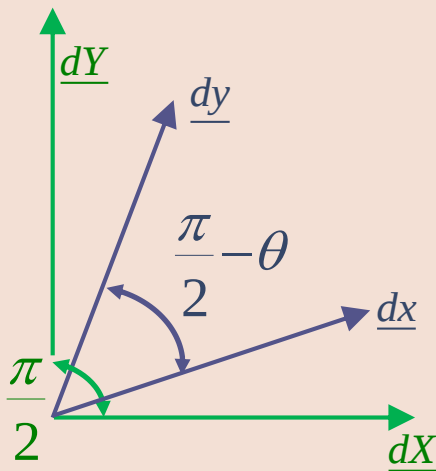
- ✓ Tenseur des **déformations linéarisé (en HPP)** :

$$\frac{dx_i}{dX_i} \approx 1 + \varepsilon_{ii}$$

Variations de longueur

$$[\underline{\underline{\varepsilon}}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right) \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}$$

sym



Variations d'angle

✓ **Taux de déformation** (eulérien) :

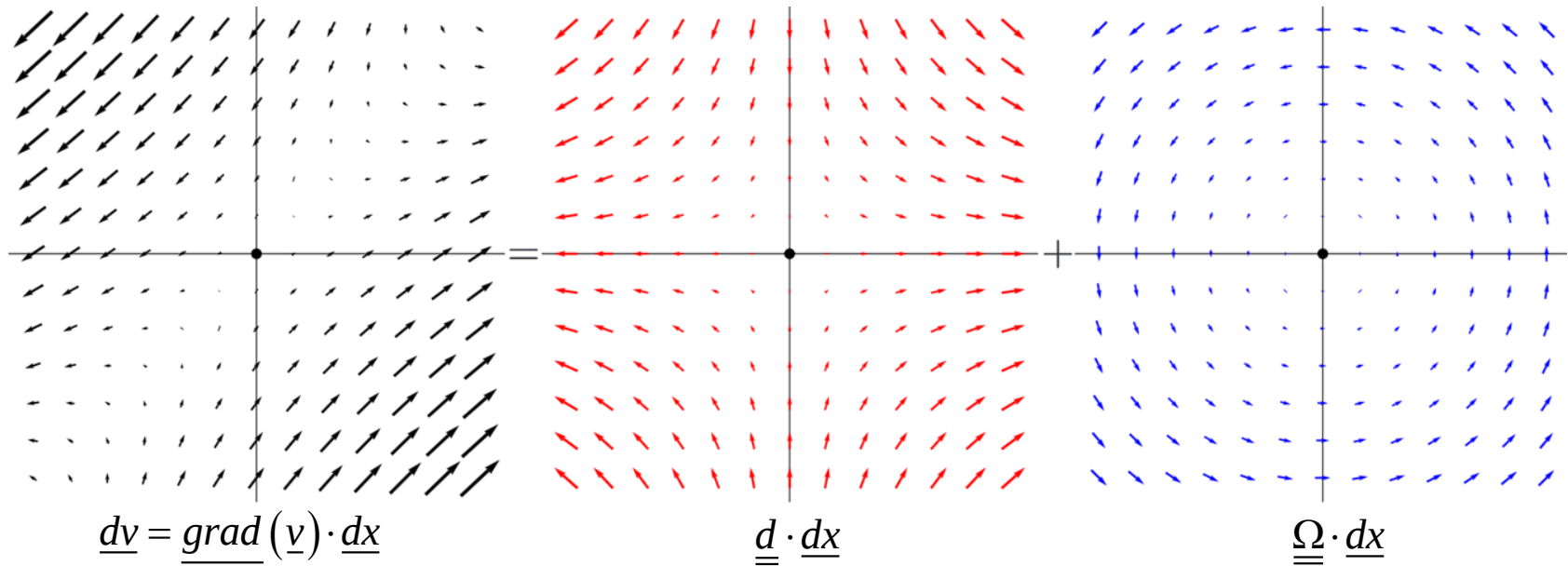
$$\underline{\underline{k}} = \underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) = \text{tenseur de description eulérienne}$$

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) + \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \right)^T \right)$$

Partie symétrique
= tenseur **taux de déformation**

$$\underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) - \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \right)^T \right)$$

Partie antisymétrique
= tenseur **vitesse de rotation**



✓ Conservation de la masse

Description lagrangienne

$$\begin{cases} \rho J = \rho_0 \\ \rho d\Omega = \rho_0 d\Omega_0 \end{cases}$$

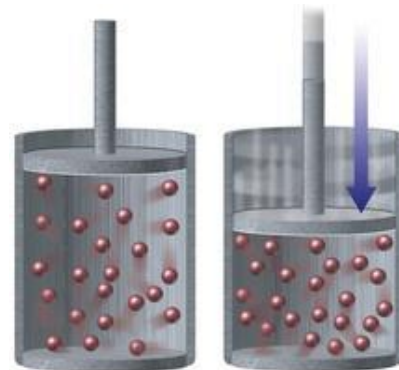
Description eulérienne

$$\frac{d\rho(\underline{x},t)}{dt} + \rho(\underline{x},t) \operatorname{div}(\underline{v}(\underline{x},t)) = 0$$

« Hypothèse: le milieu est incompressible »

$$\frac{d\Omega}{d\Omega_0} = J = 1$$

$$\operatorname{div}(\underline{v}(\underline{x},t)) = 0$$

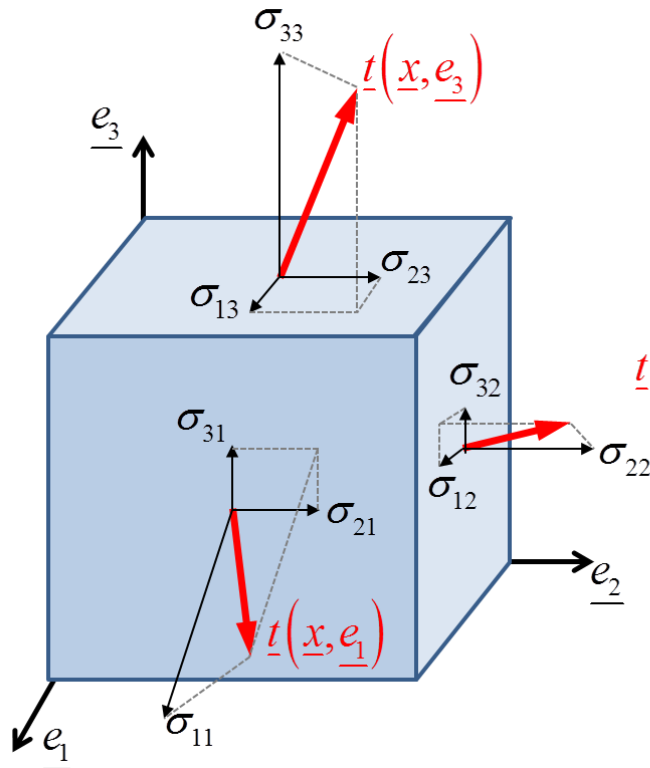


Gas



Liquid

- ✓ Approche physique → **vecteur-contrainte**
- ✓ **Tenseur des contraintes de Cauchy**



Eulérien et symétrique

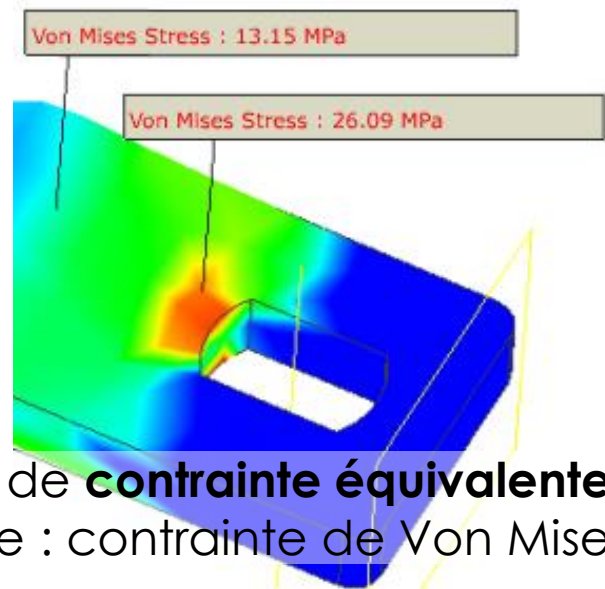
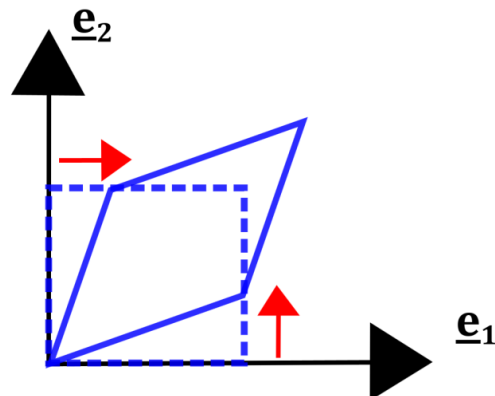
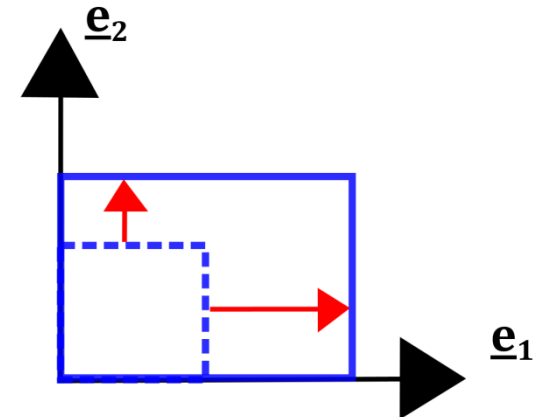
$$\underline{t} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \quad : \text{vecteur-contrainte}$$

$$\rho \underline{a} = \underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{f}^m \quad : \text{équation d'équilibre}$$

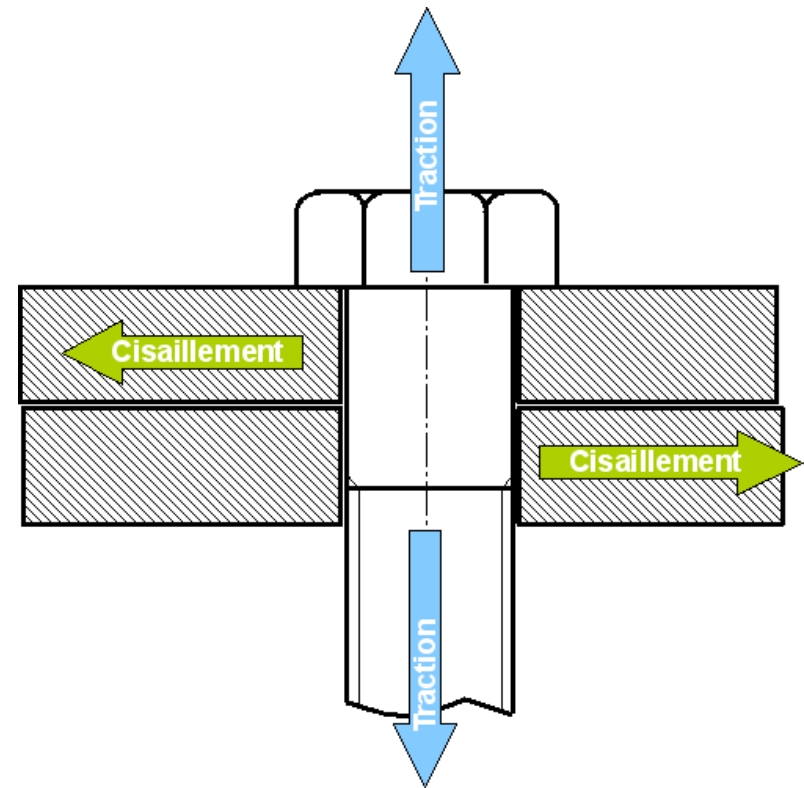
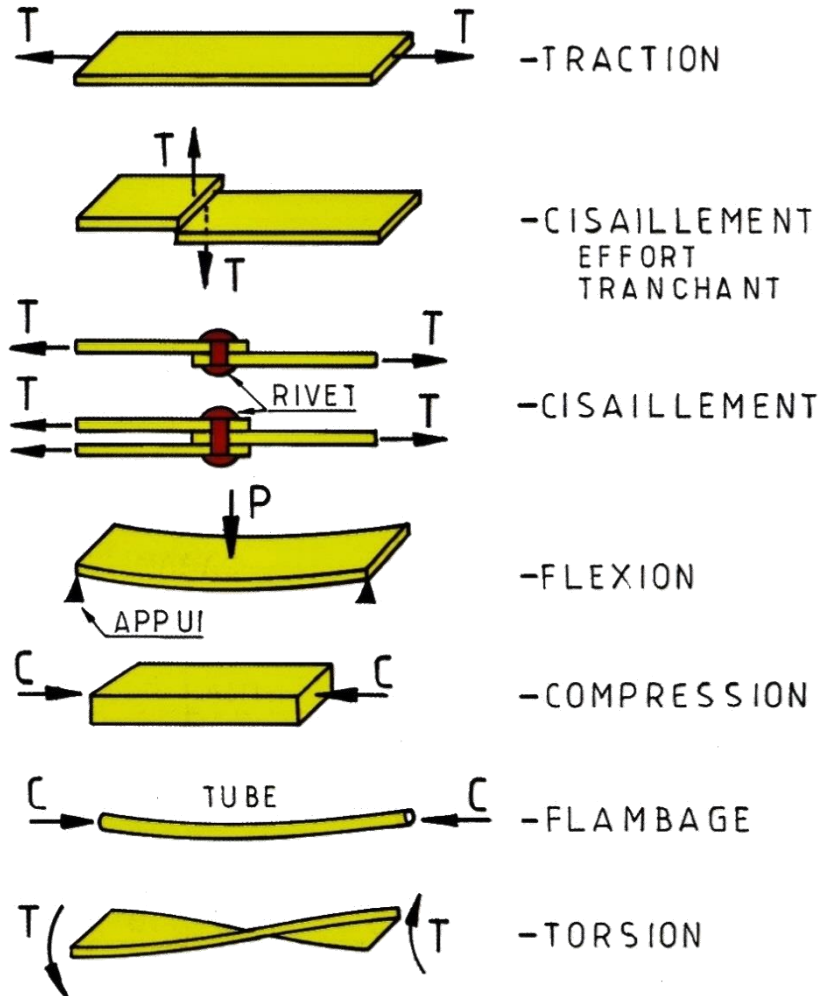
$\sigma_{ii} \rightarrow$ traction/compression selon $\underline{e}_i$

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

$\sigma_{i \neq j} \rightarrow$ Cisaillement dans le plan $(\underline{e}_i, \underline{e}_j)$



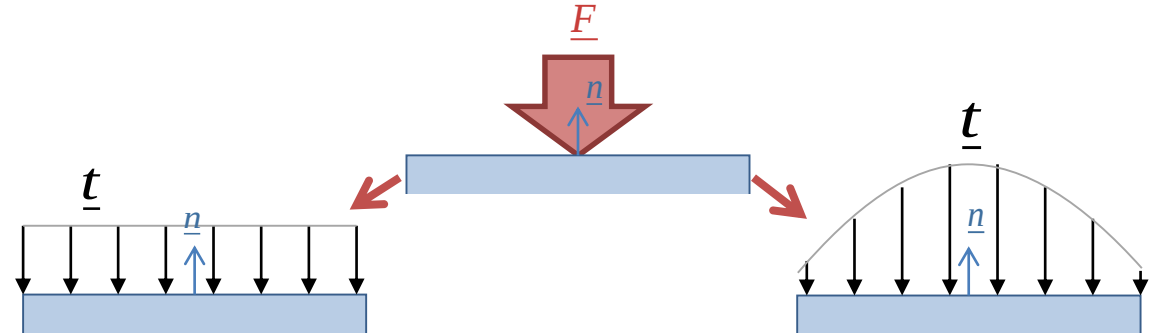
Notion de **contrainte équivalente**
(exemple : contrainte de Von Mises)



Les composantes des tenseurs de contraintes sont homogènes à une pression

✓ Conditions aux limites **en efforts** / conditions aux limites **en déplacements**

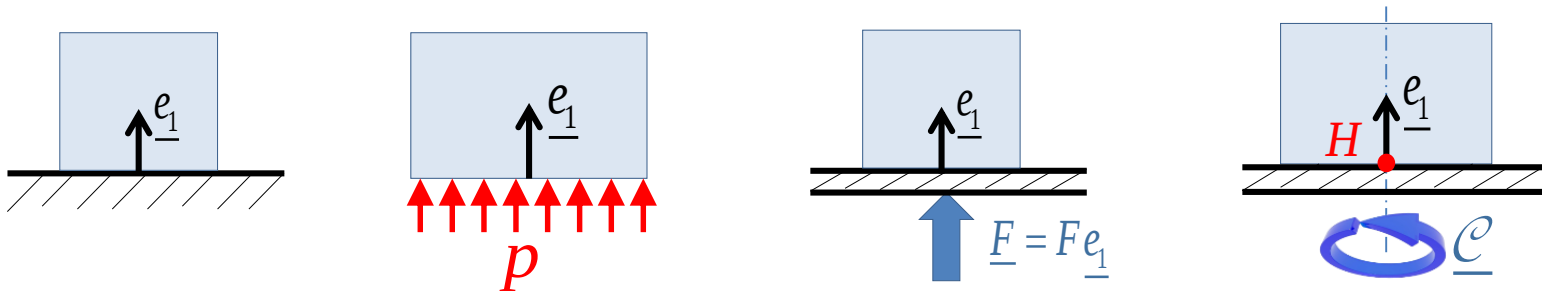
✓ Effort $\neq$ pression !



■ Surface libre

- En **fluides** : vecteur-contrainte = pression atmosphérique
- En **solides** : vecteur-contrainte = vecteur nul

■ Ensemble des conditions aux limites classiques



- ✓ Essai de **traction uniaxiale**

- ✓ Loi de comportement **élastique linéaire isotrope**

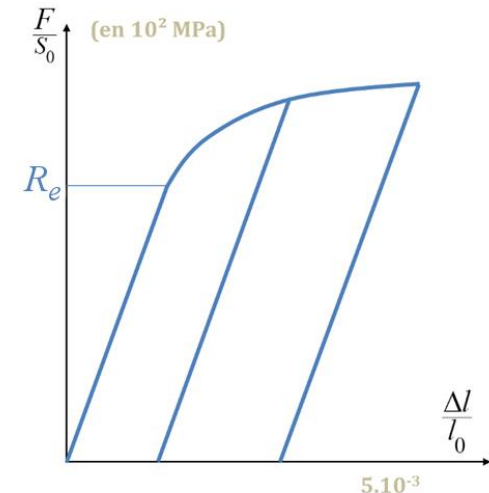
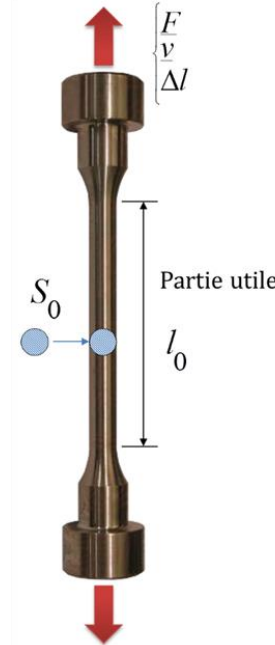
= loi de HOOKE

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}}$$

- ✓ 2 paramètres matériau :
coefficients de Lamé (λ, μ) ou
module de Young (E) ET **coefficient de Poisson (ν)**

- ✓ **Interprétations** du **module de Young (E)** et du **coefficient de Poisson (ν)**



$$\begin{cases} E = \mu \left(\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \right) \\ \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \end{cases}$$

- ✓ Définition : **fonctions de courant , vorticité , débit massique**
- ✓ Loi de comportement **du fluide newtonien**

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}} = -p\underline{\underline{I}} + 2\underline{\underline{\mu}}\underline{\underline{d}}$$

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{grad}} \underline{\underline{v}} + \left(\underline{\underline{grad}} \underline{\underline{v}} \right)^T \right)$$

- ✓ Equation de **Navier-Stokes**

= **équation d'équilibre** pour un fluide **newtonien** supposé **incompressible**



$$\rho \frac{d\underline{\underline{v}}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \underline{\underline{v}}}{\partial t} + \underline{\underline{grad}}(\underline{\underline{v}}) \cdot \underline{\underline{v}} \right) = -\underline{\underline{grad}}(p) + \underline{\underline{\mu}}\Delta \underline{\underline{v}} + \rho \underline{\underline{g}}$$



Merci!

