

# CHAPITRE V

## Les conditions aux limites

**EFFORT**



**TECHNICITE**



**RISQUE**



**OBJECTIF**

*Aborder tous les  
exercices possibles et  
imaginables*

## CHAP V: Les conditions aux limites

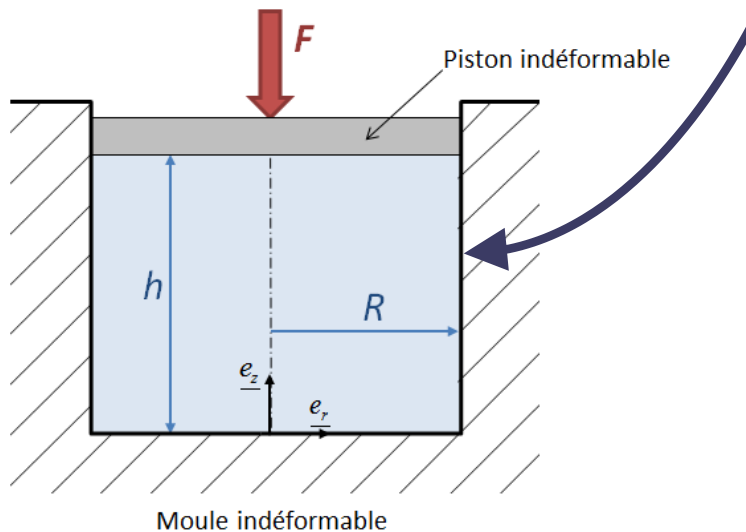
# Les conditions aux limites

- Efforts ou déplacements ?
- Conditions locales ou globales ?
- Surface libre
- Tableau récapitulatif

## A retenir :

On n'impose **jamais** (dans les exercices classiques) des conditions aux limites qui portent **à la fois** sur le **déplacement** et l'**effort** :

déplacement connu  $\rightarrow$  effort à déterminer  
effort connu  $\rightarrow$  déplacement à déterminer



Exemple :

- déplacement connu ( $=0$ ) selon  $\underline{e}_r$

$$\underline{u} \cdot \underline{e}_r = u_r = 0$$

- déplacement inconnu selon  $\underline{e}_z$  et  $\underline{e}_\theta$

- vecteur-contrainte connu selon  $\underline{e}_z$  et  $\underline{e}_\theta$

$$\underline{t}(\underline{n} = \underline{e}_r) \cdot \underline{e}_z = \underline{t}(\underline{n} = \underline{e}_r) \cdot \underline{e}_\theta = 0$$

- vecteur-contrainte inconnu selon  $\underline{e}_r$

## CHAP V: Les conditions aux limites

# Les conditions aux limites

- Efforts ou déplacements ?
- Conditions locales ou globales ?
- Surface libre
- Tableau récapitulatif

A retenir :

## effort

= grandeur **globale**  
(intégrée sur une surface)

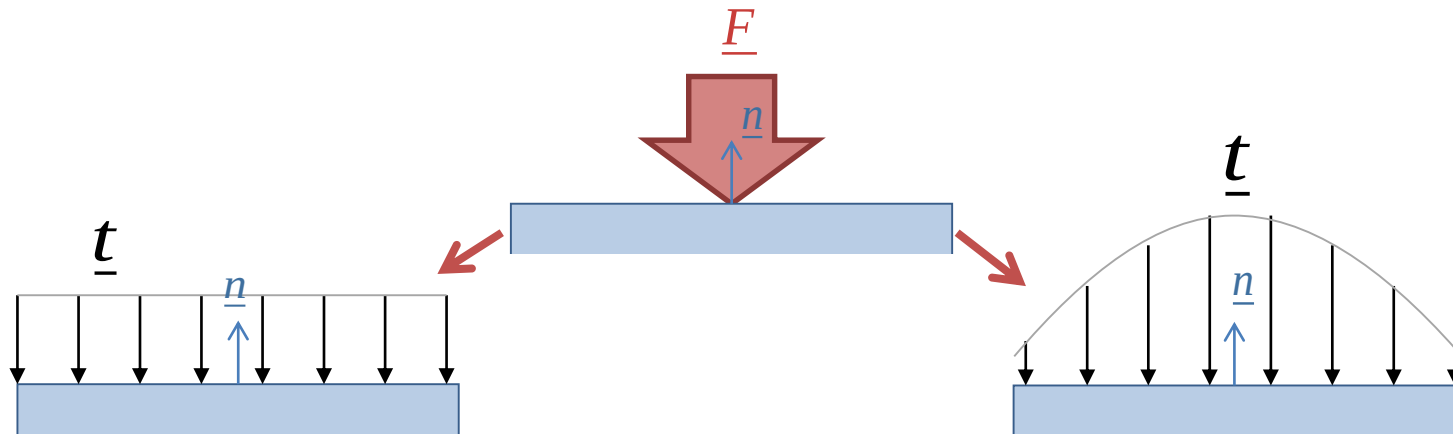
= **intégrale surfacique**  
d'une densité d'efforts  
(vecteur-contrainte).

$\neq$

## pression

= grandeur **locale**  
(vraie **en tout point** de la  
surface)

= **composante normale**  
**du vecteur-contrainte**



## CHAP V: Les conditions aux limites

# Les conditions aux limites

- Efforts ou déplacements ?
- Conditions locales ou globales ?
- Surface libre
- Tableau récapitulatif

## A retenir :

## SURFACE LIBRE

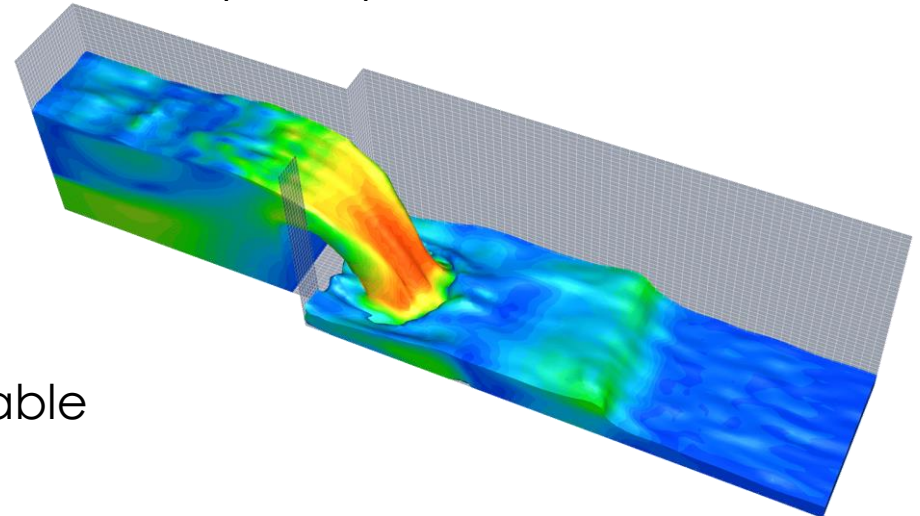
Surface libre : conditions aux limites fortes !!

= vecteur-contrainte connu dans les trois directions !

= déplacement inconnu

## En mécanique des fluides

= application de la pression atmosphérique



## En mécanique du solide

= pression atmosphérique négligeable

= vecteur-contrainte **nul**

## CHAP V: Les conditions aux limites

# Les conditions aux limites

- Efforts ou déplacements ?
- Conditions locales ou globales ?
- Surface libre
- Tableau récapitulatif





|                     |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|---------------------|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Paroi indéformable  |  | $\underline{u}(\underline{x} \in S) \cdot \underline{e}_1 = u_1(\underline{x} \in S) = 0$ $\underline{t}(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) \cdot \underline{e}_1 = ?$                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| Frontière encastree |  | $\underline{u}(\underline{x} \in S) = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} u_1(\underline{x} \in S) = 0 \\ u_2(\underline{x} \in S) = 0 \\ u_3(\underline{x} \in S) = 0 \end{cases} \quad \underline{t}(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) = ? \Rightarrow \begin{cases} t_1(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) = ? \\ t_2(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) = ? \\ t_3(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) = ? \end{cases}$       |
| Déplacement imposé  |  | $\underline{u}(\underline{x} \in S) = \underline{U} \Rightarrow \begin{cases} u_1(\underline{x} \in S) = U_1 \\ u_2(\underline{x} \in S) = U_2 \\ u_3(\underline{x} \in S) = U_3 \end{cases} \quad \underline{t}(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) = ? \Rightarrow \begin{cases} t_1(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) = ? \\ t_2(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) = ? \\ t_3(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) = ? \end{cases}$ |
| Pression imposée    |  | $\underline{t}(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) = p \underline{e}_1$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |



|                                                        |  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|--------------------------------------------------------|--|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Effort homogène imposé</p> <p>Pas de frottement</p> |  | $\int_S \underline{t}(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) dS = F \underline{e}_1 \Rightarrow \begin{cases} S \times t_1(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) = F \\ S \times t_2(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) = 0 \\ S \times t_3(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) = 0 \end{cases}$ $\underline{u}(\underline{x} \in S) = ? \Rightarrow \begin{cases} u_1(\underline{x} \in S) = ? \\ u_2(\underline{x} \in S) = ? \\ u_3(\underline{x} \in S) = ? \end{cases}$ |
| <p>Frottement: loi de Coulomb</p>                      |  | $\underline{t}(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) \cdot \underline{e}_2 = \underline{t}(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) \cdot \underline{e}_3 = \mu \times \underline{t}(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) \cdot \underline{e}_1$ $\underline{u}(\underline{x} \in S) = ? \Rightarrow \begin{cases} u_1(\underline{x} \in S) = ? \\ u_2(\underline{x} \in S) = ? \\ u_3(\underline{x} \in S) = ? \end{cases}$                                                        |
| <p>Couple imposé</p>                                   |  | $\underline{C} = \int_S \underline{HM} \wedge \underline{t}(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) dS = \int_S (y \underline{e}_2 + z \underline{e}_3) \wedge \underline{t}(\underline{x} \in S, -\underline{e}_1) dS$                                                                                                                                                                                                                                                               |

## Exemple : Tube sous pressions interne et externes

- Surface **externe** : normale sortante  $\underline{e}_r$
- pression = densité surfacique d'effort  
→ condition sur le vecteur-contrainte  $\underline{t}(r = r_e, \underline{n} = \underline{e}_r)$

- condition : pression exercée selon  $-\underline{e}_r$

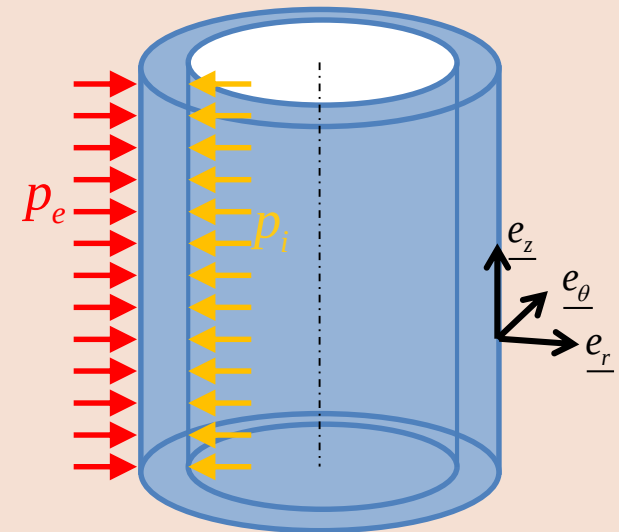
$$\underline{t}(r = r_e, \underline{e}_r) = -p_e \underline{e}_r$$

- définition :  $\underline{t}(\underline{x}, \underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}$

- donc :

$$\sigma_{rr}(r = r_e) \underline{e}_r + \sigma_{r\theta}(r = r_e) \underline{e}_\theta + \sigma_{rz}(r = r_e) \underline{e}_z = -p_e \underline{e}_r$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{rr}(r = r_e) = -p_e \\ \sigma_{r\theta}(r = r_e) = 0 \\ \sigma_{rz}(r = r_e) = 0 \end{cases}$$



## Exemple : Tube sous pressions interne et externes

- Surface **interne** : normale sortante  $-\underline{e}_r$
- pression = densité surfacique d'effort  
→ condition sur le vecteur-contrainte  $\underline{t}(r = r_i, \underline{n} = -\underline{e}_r)$

- condition : pression exercée selon  $\underline{e}_r$

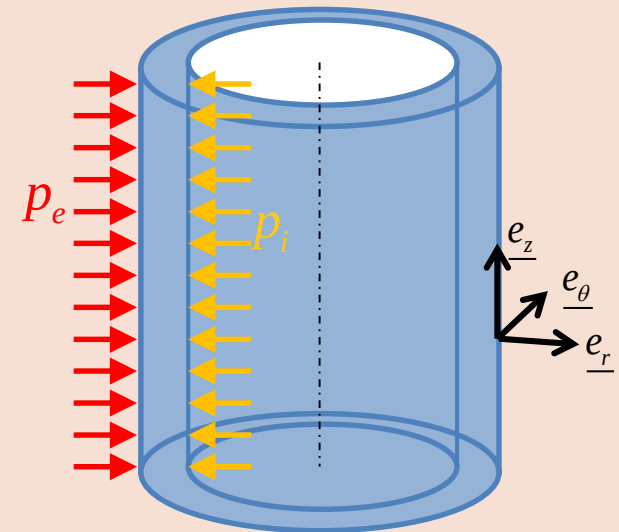
$$\underline{t}(r = r_i, -\underline{e}_r) = p_i \underline{e}_r$$

- définition :  $\underline{t}(\underline{x}, \underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n}$

- donc :

$$-\sigma_{rr}(r = r_i) \underline{e}_r - \sigma_{r\theta}(r = r_i) \underline{e}_\theta - \sigma_{rz}(r = r_i) \underline{e}_z = p_i \underline{e}_r$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{rr}(r = r_i) = -p_i \\ \sigma_{r\theta}(r = r_i) = 0 \\ \sigma_{rz}(r = r_i) = 0 \end{cases}$$



## Exemple : **compression d'un parallélépipède**

- surface **inférieure** : points en contact avec un plateau immobile

$$\underline{u}(x_2 = 0) = u_1 \underline{e}_1$$

- contact sans frottement  $\rightarrow$  vecteur-contrainte normal à la surface !

$$\underline{t}(x_2 = 0, -\underline{e}_2) = t_2 \underline{e}_2$$

- surface **supérieure** : effort  $\underline{F} = -F \underline{e}_2 =$  condition **globale**

$$\int_s \underline{t}(x_2 = H, \underline{e}_2) dS = -F \underline{e}_2$$

- effort **homogène** + sans frottement:

$$\underline{t}(x_2 = H, \underline{e}_2) \cdot \underline{e}_2 = -\frac{F}{S}$$

$$\underline{t}(x_2 = H, \underline{e}_2) \cdot \underline{e}_1 = \underline{t}(x_2 = H, \underline{e}_2) \cdot \underline{e}_3 = 0$$

- surface **extérieure = surface libre !!**

$$\underline{t}(x_1 = \pm L, \pm \underline{e}_1) = \underline{0}$$

