

Problème : Séries de Fourier

Dans tout ce problème, on note

$$C_{2\pi}^0(\mathbb{R}) := \{f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid f \text{ est } 2\pi\text{-périodique}\}$$

$$L_{2\pi}^p(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable t.q. } f(x+2\pi) = f(x) \text{ pp } x \in \mathbb{R} \text{ et } \|f\|_p < +\infty\},$$

où

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Attention : ce n'est pas la norme usuelle sur $L^p(\mathbb{R})$. On définit enfin

$$\mathcal{T} := \{\text{Polynômes trigonométriques}\} = \text{Vect}\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

où pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit $e_n \in C_{2\pi}^0(\mathbb{R})$ par $e_n(t) := e^{int}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On admettra les théorèmes suivants :

Théorème 1. $\mathcal{T}$ est dense dans $C_{2\pi}^0(\mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

Théorème 2. Pour Ω ouvert non-vide de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ (via les assimilations usuelles).

Lisez la note sur ce résultat en fin de devoir.

1. THÉORIE HILBERTIENNE, DITE " L^2 "

1. En utilisant le Théorème 2, montrez que $C_{2\pi}^0(\mathbb{R})$ est dense dans $L_{2\pi}^2(\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$.

2. Montrez que $\mathcal{T}$ est dense dans $L_{2\pi}^2(\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$.

3. On munit $L_{2\pi}^2(\mathbb{R})$ du produit Hilbertien $(f, g) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$. Montrez que $(L_{2\pi}^2(\mathbb{R}), (\cdot, \cdot))$ est un espace de Hilbert et que $\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ en est une famille totale. Montrez que $(L_{2\pi}^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ est séparable.

4. Pour $N \in \mathbb{N}$, on note $E_N := \text{Vect}\{e_n \mid |n| \leq N\}$. Quelle est la dimension de E_N ? Pour $f \in L_{2\pi}^2(\mathbb{R})$, on note $S_N(f)$ le projeté de f sur E_N . Montrez que le projeté est bien défini et que

$$S_N(f) := \sum_{|n| \leq N} c_n(f) e_n \text{ où } c_n(f) := (f, e_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

La suite $(S_N(f))_N$ est appelée la série de Fourier de f .

5. Soit $f \in L_{2\pi}^2(\mathbb{R})$. En utilisant la densité de $\mathcal{T}$ dans $L_{2\pi}^2(\mathbb{R})$, montrez que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f) = f \text{ dans } (L_{2\pi}^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2).$$

On a donc montré le théorème suivant :

Théorème 3. Soit $f \in L_{2\pi}^2(\mathbb{R})$. Alors la série de Fourier $(S_N(f))_N$ converge vers f dans $L_{2\pi}^2(\mathbb{R})$.

On ne peut pas espérer mieux car $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$.

6. Soit $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$. Montrez l'identité de Parseval :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt.$$

En particulier la somme est convergente.

7. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -périodique définie presque partout par $f(t) = 1$ si $0 < t < \pi$ et $f(t) = 0$ si $\pi < t < 2\pi$. Appliquez l'identité de Parseval à f . Déduisez-en la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

2. THÉORÈME DE CONVERGENCE DE DIRICHLET

Pour $k \in \mathbb{N}$, on dit qu'une fonction 2π -périodique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est C^k par morceaux s'il existe $N \in \mathbb{N}^*$, $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_N = 2\pi$ tels que pour tout $i = 0, \dots, N-1$, $f|_{[a_i, a_{i+1}[}$ se prolonge de façon C^k à $[a_i, a_{i+1}]$.

1. Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrez que pour tout $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$, on a $S_N(f) = D_N \star f$ avec

$$D_N(x) := \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z} \text{ et } D_N(x) := 2N + 1 \text{ sinon.}$$

2. Montrez que $\int_0^{2\pi} D_N(x) dx = 2\pi$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

3. On suppose que f est continue. Pourquoi ne peut-on pas conclure que $(D_N \star f)$ converge uniformément vers f ?

Dans toute la suite de cette partie, on se donne $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique C^1 par morceaux

4. On suppose que f est continue. Montrez qu'il existe une fonction $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $G(x, \cdot) \in L^1(]0, 2\pi[)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et

$$S_N(f)(x) - f(x) = \int_0^{2\pi} G(x, t) \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)t\right) dt \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et tout } N \in \mathbb{N}.$$

5. On suppose toujours que f est continue. En utilisant le lemme d'intégration de Lebesgue, montrez que $(S_N(f)(x))$ converge vers $f(x)$ lorsque $N \rightarrow +\infty$.

6. Généralisation lorsque f est C^1 par morceaux. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrez que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)(x) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}.$$

7. Retour au cas continue. On suppose de nouveau que f est continue. Montrez alors que $(S_N(f))_N$ converge uniformément vers f lorsque $N \rightarrow +\infty$.

On a donc démontré le

Théorème 4 (dit de convergence de Dirichlet). *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique C^1 par morceaux. Alors*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)(x) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Si de plus f est continue, alors $(S_N(f))_N$ converge uniformément vers f . En d'autres termes, on a

$$f \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R}) \text{ et } C^1 \text{ par morceaux} \Rightarrow \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f) = f \text{ dans } C^0_{2\pi}(\mathbb{R}),$$

muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$.

8. Application. On fixe $a \in]0, 2\pi[$ et on définit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique telle que $f(x) = 0$ si $0 \leq x < a$ et $f(x) = 1$ si $a \leq x < 2\pi$. Déterminez sa série de Fourier et sa limite lorsque $N \rightarrow +\infty$

3. THÉORÈME DE CONVERGENCE DE FÉJER

Pour $f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R})$, notons que la série de Fourier est définie. Pour $N \in \mathbb{N}$, on note la moyenne de Césaro

$$C_N(f) = \frac{\sum_{n=0}^N S_n(f)}{N+1}.$$

1. Montrez que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $K_N \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R})$ telle que

$$C_N(f) = K_N \star f \text{ pour tout } f \in L^1_{2\pi}(\mathbb{R}).$$

2. On fixe $p \geq 1$. On se donne $f \in L^p_{2\pi}(\mathbb{R})$. Montrez que $(C_N(f))_N$ converge vers f pour $\|\cdot\|_p$ lorsque $N \rightarrow +\infty$. Si $f \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R})$, montrez que la convergence est uniforme.

On a donc montré le

Théorème 5 (dit de convergence de Féjer). *Soit $f \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R})$. Alors une fonction 2π -périodique C^1 par morceaux. Alors*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{n=0}^N S_n(f)}{N+1} = f \text{ dans } C^0_{2\pi}(\mathbb{R}),$$

muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

3. Application. On suppose que, à sous-suite près, $(S_N(f))_N$ admet une limite simple. Montrez que cette limite simple est f .

4. DIVERSES REMARQUES

La théorie des séries de Fourier est naturellement Hilbertienne. Elle marche bien et est optimale dans L^2 , c'est le Théorème de convergence L^2 qui dit en gros que si une fonction est dans L^2 , alors sa série de Fourier converge dans L^2 . En revanche, elle n'est pas bien adaptée pour des fonctions continues : pour avoir une convergence dans $C^0_{2\pi}(\mathbb{R})$, avoir une fonction dans $C^0_{2\pi}(\mathbb{R})$ ne suffit pas, il faut en plus demander des propriétés des dérivées (c'est le théorème de Dirichlet). On arrive quand même à avoir quelque chose d'optimal, à savoir convergence dans $C^0_{2\pi}(\mathbb{R})$ pour une fonction dans $C^0_{2\pi}(\mathbb{R})$, mais il faut alors prendre la moyenne de Césaro, pas la Série de Fourier seule.

On peut même montrer qu'il existe une famille dense de fonctions C^0 dont la série de Fourier ne converge pas simplement pour une famille dense de points de $\mathbb{R}$. Ce résultat est dans Rudin "Analyse réelle et complexe" et à fait l'objet d'un problème de ce cours d'Analyse il y a quelques années.

Note sur le Théorème 2 : Ce résultat est difficile. Le prouver revient à démontrer que pour tout ensemble mesurable $E \subset \Omega$ de mesure finie, la fonction indicatrice $\mathbf{1}_E$ peut être approximée au sens L^2 par une fonction de C^0_c . On utilise la *régularité* de la mesure de Lebesgue qui donne K compact et U ouvert tels que $K \subset E \subset U \subset\subset \Omega$ et $U \setminus K$ est de mesure arbitrairement petite. Le lemme d'Urysohn donne alors une fonction continue qui approxime $\mathbf{1}_K$ au sens L^2 . On en déduit alors l'approximation désirée de $\mathbf{1}_E$.

Ce qu'il faut retenir : Le résultat est à connaître. Il n'est pas trivial et ça utilise des propriétés très fines de théorie de la mesure.