

TD5 : corrigé

Première partie : cas 1D

Dans un premier temps on ne s'intéresse qu'à la direction de l'essai de traction uniaxiale (problème 1D), sans se soucier de l'état de déformations ou de contraintes dans les directions transverses.

1) Ecrire le champ de déplacement au sein de la partie utile de l'éprouvette, en considérant qu'il évolue linéairement le long de l'éprouvette.

Problème 1D $\rightarrow$ on pourra noter $\underline{u}(\underline{X}) = u_1(X_1)\underline{e}_1$ ou même $\underline{u}(\underline{X}) = u(X)\underline{e}_1$ pour alléger les notations.

déplacement linéaire : $u(X) = AX + B$

$$u(X=0) = 0 \Rightarrow A \times 0 + B = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$u(X=L_0) = \Delta L \Rightarrow A \times L_0 = \Delta L \Rightarrow A = \frac{\Delta L}{L_0}$$

On obtient la forme bien connue : $u(X) = \Delta L \left(\frac{X}{L_0} \right)$

2) Comparer alors le champ de déformations de Green-Lagrange, et sa version linéarisée en HPP.

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T \cdot \underline{\underline{Grad}} \underline{u} \right)$$

$$\text{en 1D} \rightarrow E = \frac{1}{2} \left(Grad u + (Grad u)^T + (Grad u)^T \cdot Grad u \right)$$

$$Grad u = \frac{\Delta L}{L_0}$$

$$E = \frac{\Delta L}{L_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta L}{L_0} \right)^2$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta L}{L_0} \right)^2 = \frac{\Delta L}{L_0} \quad \text{que l'on obtient aussi à partir de } \varepsilon = \frac{1}{2} \left(Grad u + (Grad u)^T \right)$$

3) Comparer la déformation en HPP avec la dilatation dans la direction de l'éprouvette.

$$\lambda = |\underline{a}| / |\underline{A}| = |\underline{F}(\underline{X}, t) \cdot \underline{A}| / |\underline{A}|$$

$$F = 1 + \frac{\Delta L}{L_0}$$

$$\underline{a} = \underline{F}(\underline{X}, t) \cdot \underline{A} = \left(1 + \frac{\Delta L}{L_0}\right) \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \cdot A \underline{e}_1 = \left(1 + \frac{\Delta L}{L_0}\right) A \underline{e}_1 \text{ après déformation.}$$

$$\lambda = |\underline{a}| / |\underline{A}| = 1 + \frac{\Delta L}{L_0} = 1 + \varepsilon$$

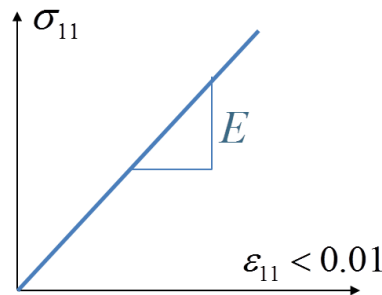
4) Calculer la contrainte dans l'éprouvette, si l'on considère qu'elle est constituée d'un matériau linéaire élastique isotrope. En déduire une relation entre le module d'Young et les coefficients de Lamé.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$\rightarrow \sigma = \lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon = \varepsilon (\lambda + 2\mu)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}}$$

$$\rightarrow \varepsilon = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \sigma = \frac{\sigma}{E}$$



5) Pour construire la courbe contrainte-déformation à partir de la machine d'essai de traction, on doit donc pouvoir calculer la déformation à partir d'une mesure du déplacement, mais aussi la contrainte à partir d'une mesure d'un effort. Comment calcule-t-on la contrainte ?

$$\int_S \underline{\underline{t}}(X, \underline{e}_1) dS = \underline{\underline{t}}(X, \underline{e}_1) \int_S dS = \underline{\underline{t}}(X, \underline{e}_1) S = F \underline{e}_1$$

$$\underline{\underline{t}}(X, \underline{e}_1) = \underline{\underline{\sigma}}(X) \cdot \underline{e}_1$$

$$\sigma S = F \Rightarrow \sigma = \frac{F}{S} \text{ dans toute l'éprouvette.}$$

On calcule donc simplement la contrainte de traction dans l'éprouvette en divisant l'effort mesuré par la section de l'éprouvette. En toute rigueur, on s'intéresse ici à la section **actuelle** de l'éprouvette, qui varie en cours de déformation ! En HPP, cette variation est faible et l'on se permet souvent de faire l'hypothèse :

$$\sigma = \frac{F}{S} \approx \frac{F}{S_0}$$

De façon alternative, on pourra chercher à mesurer en temps réel la section transverse au cours de l'essai par des moyens optiques, notamment par corrélation d'images numérique (DIC pour *digital image correlation*) comme illustré sur le sujet.

On peut donc facilement construire la courbe contrainte-déformation correspondant au matériau testé en construisant le tableau :

déplacement imposée ΔL (mm)	déformation $\varepsilon = \Delta L/L_0$	force mesurée F (N)	contrainte $\sigma \approx F/S_0$ (Pa)
0	0	0	0
...	...	...	...

(toutes ces valeurs sont nulles en début d'essai)

6) On ne fait plus l'hypothèse que le champ de déplacement évolue linéairement dans la direction de traction, mais de façon quadratique. Montrer que cette hypothèse n'est pas compatible avec l'équilibre du milieu.

$$u(X) = AX^2 + BX + C$$

$$u(X=0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$u(X=L_0) = \Delta L \Rightarrow AL_0^2 + BL_0 = \Delta L \Rightarrow B = \frac{\Delta L}{L_0} - AL_0$$

$$u(X) = AX^2 + \left(\frac{\Delta L}{L_0} - AL_0 \right) X$$

$$\text{Grad } u = \frac{du}{dX} = 2AX + \left(\frac{\Delta L}{L_0} - AL_0 \right)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\text{Grad } u + \text{Grad } u) = \text{Grad } u = 2AX + \left(\frac{\Delta L}{L_0} - AL_0 \right)$$

$$\varepsilon = 2Ax + \left(\frac{\Delta L}{L_0} - AL_0 \right)$$

$$\sigma = E\varepsilon = E \left[2Ax + \left(\frac{\Delta L}{L_0} - AL_0 \right) \right]$$

$$\underline{\text{div}} \underline{\sigma} = \underline{0} \rightarrow \text{div} \sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial X} = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial \sigma}{\partial X} = 2AE = 0 \Rightarrow A = 0$$

Deuxième partie : étude de l'éprouvette plate

On s'intéresse maintenant au cas 3D, pour lequel une traction dans la direction $\underline{e}_1$ sera associée à des variations de dimensions dans les directions transverses $\underline{e}_2$ et $\underline{e}_3$.

7) Proposer une forme simple pour le champ de déplacements à partir des hypothèses sur la forme de l'éprouvette après transformation.

$$\underline{u}(\underline{X}) = u_1(X_1)\underline{e}_1 + u_2(X_2)\underline{e}_2 + u_3(X_3)\underline{e}_3$$

8) En déduire une expression pour le champ de déformations et de contraintes dans l'éprouvette.

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\underline{\text{Grad}} \underline{u} + (\underline{\text{Grad}} \underline{u})^T)$$

$$[\underline{\varepsilon}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{pmatrix}$$

$$[\underline{\sigma}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1}(\lambda + 2\mu) + \lambda \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_2}{\partial X_2}(\lambda + 2\mu) + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial X_3}(\lambda + 2\mu) + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right) \end{pmatrix}$$

9) A partir de l'équilibre du milieu, montrer que toutes les composantes du tenseur des contraintes sont constantes dans la partie utile de l'éprouvette.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial X_1} + \cancel{\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial X_2}} + \cancel{\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial X_3}} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial X_1} = 0 \\ \cancel{\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial X_1}} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial X_2} + \cancel{\frac{\partial \sigma_{23}}{\partial X_3}} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial X_2} = 0 \\ \cancel{\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial X_1}} + \cancel{\frac{\partial \sigma_{32}}{\partial X_2}} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial X_3} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial X_3} = 0\end{aligned}$$

En reprenant la forme précédente $\underline{u}(\underline{X}) = u_1(X_1)\underline{e}_1 + u_2(X_2)\underline{e}_2 + u_3(X_3)\underline{e}_3$ on en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial X_1} \left[\frac{\partial u_1}{\partial X_1} (\lambda + 2\mu) + \lambda \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right) \right] &= 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u_1}{\partial X_1^2} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_2} \left[\frac{\partial u_2}{\partial X_2} (\lambda + 2\mu) + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right) \right] &= 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u_2}{\partial X_2^2} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_3} \left[\frac{\partial u_3}{\partial X_3} (\lambda + 2\mu) + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right) \right] &= 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u_3}{\partial X_3^2} = 0\end{aligned}$$

$$[\underline{\sigma}] = \begin{pmatrix} A(\lambda + 2\mu) + \lambda(B + C) & 0 & 0 \\ 0 & B(\lambda + 2\mu) + \lambda(A + C) & 0 \\ 0 & 0 & C(\lambda + 2\mu) + \lambda(A + B) \end{pmatrix}$$

avec A, B et C trois constantes

10) A partir des conditions de la surface libre et de l'hypothèse de distribution uniforme de l'effort de traction, déterminer complètement le champ de contraintes.

$$\begin{aligned}\underline{t}\left(X_2 = \pm \frac{a_0}{2}, \pm \underline{e}_2\right) &= \underline{0} \Rightarrow \underline{\sigma}\left(X_2 = \pm \frac{a_0}{2}\right) \cdot \pm \underline{e}_2 = \underline{0} \\ \Rightarrow \pm \cancel{\sigma_{12}\left(X_2 = \pm \frac{a_0}{2}\right)\underline{e}_1} \pm \sigma_{22}\left(X_2 = \pm \frac{a_0}{2}\right)\underline{e}_2 \pm \cancel{\sigma_{32}\left(X_2 = \pm \frac{a_0}{2}\right)\underline{e}_3} &= \underline{0}\end{aligned}$$

On en déduit que la composante σ_{22} est nulle au bord de l'éprouvette : comme elle est constante, elle est nulle partout !

Le même raisonnement peut être fait évidemment sur le bord de l'éprouvette $X_3 = \pm \frac{b_0}{2} \rightarrow \sigma_{33}$ est nulle au bord de l'éprouvette : comme elle est constante, elle est nulle partout !

Le tenseur des contraintes est donc de la forme :

$$\underline{\sigma} = [A(\lambda + 2\mu) + \lambda(B + C)]\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 = Cste \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$$

$$\int_S \underline{t}(X_1 = L_0, \underline{e}_1) dS = \underline{t}(X_1 = L_0, \underline{e}_1) \int_S dS = \underline{t}(X_1 = L_0, \underline{e}_1) S = F \underline{e}_1$$

$$\Rightarrow \sigma_{11}(X_1 = L_0) S = F$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{11} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 = \frac{F}{S} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$$

11) A partir de la loi de Hooke, retrouver la signification physique du coefficient de Poisson .

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{I} = \frac{\sigma_{11}}{E} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \frac{\nu}{E} \sigma_{11} (\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3)$$

$$[\underline{\underline{\varepsilon}}] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} = -\nu \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} = -\nu \varepsilon_{11} \end{pmatrix}$$

A partir de la déformation dans la direction de traction $\underline{e}_1$ on retrouve la relation que l'on a identifié en première partie dans cette direction : $\sigma_{11} = E \varepsilon_{11}$. Puisque la contrainte est positive ($F/S \geq 0$), cette déformation est positive et correspond à un allongement.

On observe également que les déformations dans les directions transverses $\underline{e}_2$ et $\underline{e}_3$ s'écrivent $-\nu \varepsilon_{11}$: elles sont donc négatives et correspondent à un rétrécissement, et on en déduit la définition du coefficient de *compaction transverse* appelé aussi *coefficient de Poisson* :

Le coefficient de Poisson correspond à l'opposé du rapport entre la déformation transverse et la déformation longitudinale dans le cas d'un essai de traction.

12) On mesure la largeur a de l'éprouvette en cours de transformation : écrire le lien auquel on doit s'attendre entre a , la largeur initiale a_0 , et la variation de longueur ΔL .

On a identifié précédemment le tenseur des déformations :

$$[\underline{\underline{\varepsilon}}] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} = -\nu \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} = -\nu \varepsilon_{11} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T) = \underline{\underline{Grad}} \underline{u} \quad \text{dans ce cas}$$

$$[\underline{\underline{Grad}} \underline{u}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} = -\nu \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} = -\nu \varepsilon_{11} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial X_2} = -\nu \varepsilon_{11} = -\nu \frac{\Delta L}{L_0} \Rightarrow u_2 = -\nu \frac{\Delta L}{L_0} X_2 + D \quad \text{avec D une constante}$$

$$u_2(X_2 = 0) = 0 \Rightarrow D = 0.$$

$$a = a_0 + u\left(X_2 = \frac{a_0}{2}\right) - u\left(X_2 = -\frac{a_0}{2}\right) =$$

$$a = a_0 - \nu \frac{\Delta L}{L_0} \frac{a_0}{2} - \nu \frac{\Delta L}{L_0} \frac{a_0}{2} = a_0 \left(1 - \nu \frac{\Delta L}{L_0}\right)$$

On voit donc que la largeur a diminue et varie linéairement avec la variation de longueur ΔL : ceci est vrai en HPP uniquement, jusqu'à des phénomènes de « striction » arrive et mènent à la fin de l'essai de traction :

