

TD6 : corrigé

1) Montrer que, en raison des hypothèses formulées, on peut postuler un champ de déplacement de la forme : $\underline{u}(r, z) = u_\theta(r, z)\underline{e}_\theta$.

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = u_\theta(r, z)\underline{e}_\theta$$

2) Calculer le champ de déformations correspondant à ce déplacement.

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u} + (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{u})^T)$$

$$[\underline{\underline{\varepsilon}}] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right) & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right) & 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial u_\theta}{\partial z} & 0 \end{pmatrix}$$

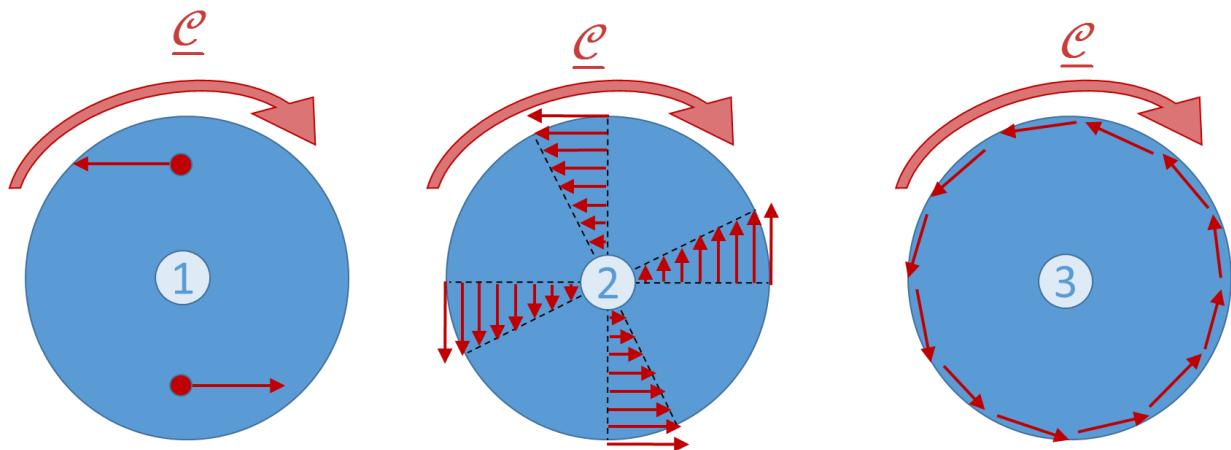
3) Calculer le champ de contraintes correspondant à ce champ de déformations.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{I}} + 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = 2\mu[\underline{\underline{\varepsilon}}] = \begin{pmatrix} 0 & \mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right) & 0 \\ \mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right) & 0 & \mu\frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ 0 & \mu\frac{\partial u_\theta}{\partial z} & 0 \end{pmatrix}$$

4) On se propose de postuler que le couple est appliqué en $z = L$ de façon linéaire en r , de telle sorte que $\sigma_{\theta z}(z = L) = C_{ste} \times r$. Justifier cette hypothèse et déterminer cette constante.

En vertu du théorème de Saint-Venant, l'état de contraintes suffisamment loin de la surface d'application du couple ne sera pas dépendant de la façon précise avec laquelle ce couple est transmis, mais uniquement du torseur résultant. Ainsi, par exemple, ces trois répartitions des efforts donneraient le même état de contrainte suffisamment loin de la surface d'application :



Dans notre cas on se propose de faire la seconde hypothèse.

$$\int_S \underline{HM} \wedge \underline{t}(r, \theta, z=L, \underline{e}_z) dS = \int_S (r \underline{e}_r) \wedge \underline{t}(r, \theta, z=L, \underline{e}_z) dS = \underline{\mathcal{C}}$$

$$\underline{t}(r, \theta, z=L, \underline{e}_z) = \underline{\underline{\sigma}}(r, \theta, z=L) \cdot \underline{e}_z = \sigma_{rz}(r, \theta, z=L) \underline{e}_r + \sigma_{\theta z}(r, \theta, z=L) \underline{e}_\theta + \sigma_{zz}(r, \theta, z=L) \underline{e}_z$$

Lorsque l'on réécrit le produit vectoriel on a alors :

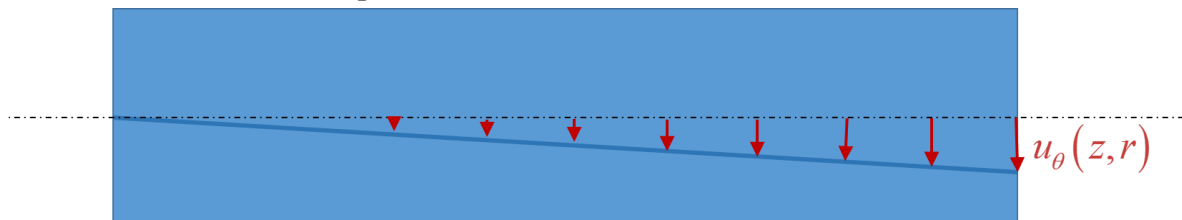
En faisant l'hypothèse que $\sigma_{\theta z}(z=L) = Cste \times r$ on arrive par conséquent à déterminer cette constante :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R \sigma_{\theta z}(r, \theta, z=L) r^2 dr d\theta = \mathcal{C} \Rightarrow Cste = \frac{2\mathcal{C}}{\pi R^4}$$

$$I_G = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$\sigma_{\theta z}(z=L) = \frac{\mathcal{C}r}{I_G}$$

5) En raison des hypothèses précédentes, on peut postuler que u_θ est linéaire en z . En déduire le champ de contraintes dans tout l'arbre de transmission.



En $z=0$ l'arbre est encasté et on a par conséquent : $u_\theta(r, z=0) = B(r) = 0 \quad \forall r$

On en déduit : $u_\theta(r, z) = A(r)z$

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} 0 & \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & 0 \\ \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) & 0 & \mu \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ 0 & \mu \frac{\partial u_\theta}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{\theta z} = \mu \frac{\partial u_\theta}{\partial z} = \mu A(r) \quad \forall z$$

$$\sigma_{\theta z}(z=L) = \sigma_{\theta z}(r, \forall z) = \frac{\mathcal{C}r}{I_G} \Rightarrow A(r) = \frac{\mathcal{C}r}{\mu I_G}$$

$$u_\theta(r, z) = \frac{\mathcal{C}rz}{\mu I_G}$$

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} 0 & \cancel{\mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)} & 0 \\ \cancel{\mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)} & 0 & \frac{\mathcal{C}r}{I_G} \\ 0 & \frac{\mathcal{C}r}{I_G} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mathcal{C}r}{I_G} \\ 0 & \frac{\mathcal{C}r}{I_G} & 0 \end{pmatrix}$$

6) Vérifier que la condition de surface libre est satisfaite en $r = R$.

$$\underline{t}(r=R, \theta, z, \underline{n} = \underline{e}_r) = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{rr}(r=R) = 0 \\ \sigma_{\theta r}(r=R) = 0 \\ \sigma_{zr}(r=R) = 0 \end{cases}$$

7) Déterminer les contraintes principales et la base principale correspondante.

$$[\underline{\underline{\sigma}}]_{(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{on prend bien soin de préciser le repère})$$

$$\det(\underline{\underline{\sigma}} - \lambda \underline{\underline{1}}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & \tau \\ 0 & \tau & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (-\lambda)^3 + \lambda \tau^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda(\tau^2 - \lambda^2) = 0$$

$$\sigma_I = \tau$$

$$\sigma_{II} = 0$$

$$\sigma_{III} = -\tau$$

$$[\underline{\sigma}]_{(\underline{e}_I, \underline{e}_{II}, \underline{e}_{III})} = \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau \end{pmatrix} \quad \text{ou encore } \underline{\sigma} = \tau(\underline{e}_I \otimes \underline{e}_I - \underline{e}_{III} \otimes \underline{e}_{III})$$

$$\begin{cases} (\underline{\sigma} - \sigma_i \underline{I}) \cdot \underline{e}_i = \underline{0} \\ \underline{e}_i \cdot \underline{e}_i = 1 \end{cases} \quad \text{avec } i \in \{I, II, III\}$$

$$\sigma_I = \tau \Rightarrow \begin{pmatrix} -\tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & \tau \\ 0 & \tau & -\tau \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_I \\ \beta_I \\ \gamma_I \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\tau \alpha_I = 0 \\ -\tau \beta_I + \tau \gamma_I = 0 \\ \tau \beta_I - \tau \gamma_I = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{e}_I = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_I \\ \beta_I \end{pmatrix}$$

$$\underline{e}_I \cdot \underline{e}_I = 1 \Rightarrow \beta_{III} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sigma_{II} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{II} \\ \beta_{II} \\ \gamma_{II} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tau \beta_{II} = 0 \\ \tau \gamma_{II} = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{e}_{II} = \begin{pmatrix} \alpha_{II} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{e}_{II} \cdot \underline{e}_{II} = 1 \Rightarrow \alpha_{II} = \pm 1$$

$$\sigma_{III} = -\tau \Rightarrow \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & \tau & \tau \\ 0 & \tau & \tau \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{III} \\ \beta_{III} \\ \gamma_{III} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tau \alpha_{III} = 0 \\ \tau \beta_{III} + \tau \gamma_{III} = 0 \\ \tau \beta_{III} + \tau \gamma_{III} = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{e}_{III} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_{III} \\ -\beta_{III} \end{pmatrix}$$

$$\underline{e}_{III} \cdot \underline{e}_{III} = 1 \Rightarrow \beta_{III} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

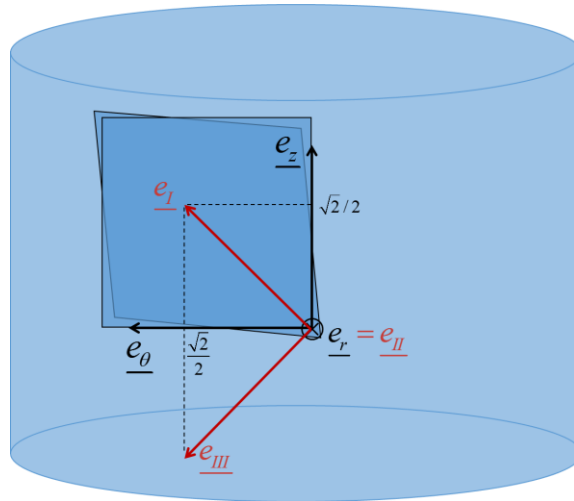
On vient donc de déterminer les trois directions principales suivantes :

$$\underline{e}_I = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (\underline{e}_\theta + \underline{e}_z)$$

$$\underline{e}_{II} = \pm \underline{e}_r$$

$$\underline{e}_{III} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (\underline{e}_\theta - \underline{e}_z)$$

Dans cette nouvelle base $\underline{e}_I, \underline{e}_{II}, \underline{e}_{III}$, les contraintes sont normales. On peut facilement réaliser l'interprétation physique en dessinant se nouveau repère :



On comprend alors que le matériau subit un état de traction suivant $\underline{e_I}$ et de compression suivant $\underline{e_{III}}$.

8) Calculer la contrainte équivalente de Von-Mises, en en déduire le couple maximal admissible pour un matériau et des dimensions données.

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2}$$

$$\sigma_{VM} = \sqrt{3}\tau$$

$$\tau_{\max} = \frac{\mathcal{C}R}{I_G} = \frac{\mathcal{C}D}{2I_G} = \frac{32\mathcal{C}D}{2\pi D^4} = \frac{16\mathcal{C}}{\pi D^3}$$

$$\sqrt{3} \tau_{\max} = R_e \Rightarrow \mathcal{C}^{\max} = \frac{R_e \pi D^3}{16\sqrt{3}}$$

Application numérique :

On considère un arbre de 10 cm de diamètre en acier ($R_e = 240\text{MPa}$), quel est le couple maximal transmissible ?

$$\mathcal{C}^{\max} = \frac{R_e \pi D^3}{16\sqrt{3}} = \frac{240 \cdot 10^6 \times \pi \times 0.1^3}{16\sqrt{3}} = 28341 \text{ N.m}$$

Ce couple équivaut au moment créé par une masse de 2,8 tonnes au bout d'un bras de levier d'un mètre.