

Mécanique des Milieux Continus (MMC)

Examen de janvier 2018 - 2h – aucun document autorisé

Vous pouvez utiliser au choix les notations **indicielles**, **matricielles** ou **tensorielles**.

Questions de cours

(/4)

1. Expliquer brièvement le principe des puissances virtuelles .

(/1)

Le PPV consiste à écrire l'équilibre d'un système lorsqu'il est perturbé par un champ de vitesses quelconque, en écrivant que les puissances de tous les efforts en jeu s'équilibrent.

2. Quelle est la démarche (et les hypothèses) faite pour écrire l'équation de Navier-Stokes. (/1)

L'équation de Navier-Stokes part de l'équation d'équilibre, dans laquelle on écrit l'accélération sous la forme de la dérivée particulaire d'un champ de vitesses, et dans laquelle on considère la loi de comportement d'un fluide newtonien. L'hypothèse de fluide incompressible ($\text{div} \underline{v} = 0$) intervient dans cette démonstration.

3. Expliquer la différence entre le tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ et le second tenseur de Piola-

Kirchhoff (PK2) $\underline{\underline{S}}$

(/1)

Le tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ est eulérien, exprimé dans la configuration actuelle (déformée). Le tenseur $\underline{\underline{S}}$ est lagrangien , et tient compte du fait que (1) la section de la facette sur laquelle on écrit le vecteur-contrainte change durant la transformation (2) la normale à la facette a également changé.

4. Qu'est-ce qu'un fluide newtonien ?

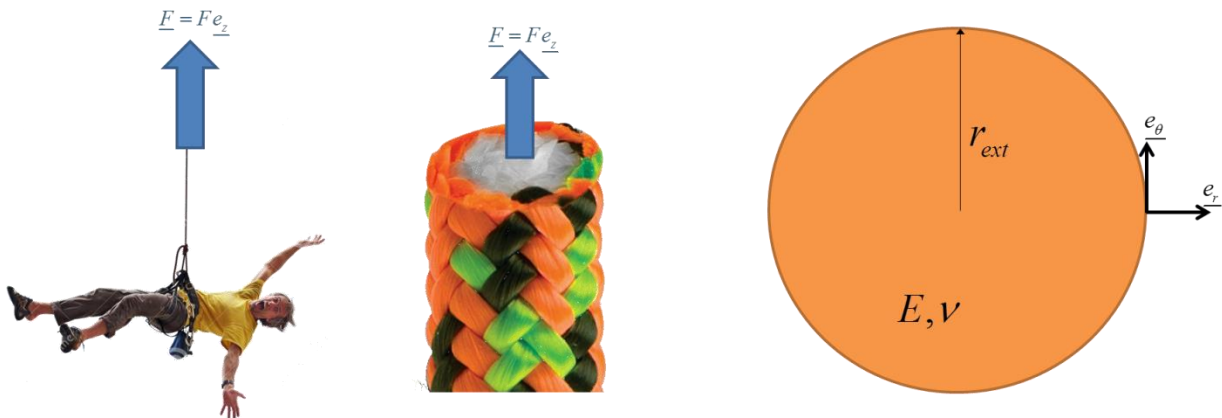
(/1)

Un fluide est dit newtonien si le tenseur des contraintes est relié de façon linéaire à la vitesse de déformation (ou taux de déformation) du milieu. La loi de comportement s'écrit alors :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + 2\mu\underline{\underline{d}} \quad \text{avec } \mu \text{ la viscosité du fluide.}$$

Problème #1 : déformation transverse d'une corde d'escalade (/16)

On considère une corde d'escalade de longueur L , que l'on modélise par un matériau homogène, élastique et isotrope (grosses approximations !!). On note r_{ext} le rayon extérieur de cette corde après déformation, et R_{ext} son rayon extérieur initial. On note E et ν les modules d'Young et coefficients de Poisson du matériau équivalent, respectivement. On cherche à savoir si on peut prédire, en mesurant le diamètre r_{ext} , la masse M du grimpeur attaché à l'autre extrémité de la corde.



1. Ecrire la condition de surface libre à l'extérieur de la corde.

(/1)

La surface extérieure s'écrit : $r = r_{ext}$, $\underline{n} = \underline{e}_r$. On néglige la pression atmosphérique et donc :

$$\underline{t}(r_{ext}, \underline{n} = \underline{e}_r) = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_{rr}(r_{ext}) = 0 \\ \sigma_{r\theta}(r_{ext}) = 0 \\ \sigma_{rz}(r_{ext}) = 0 \end{cases}$$

2. On fait l'hypothèse que le champ de déplacement dans la corde sera de la forme

$\underline{u}(r, \theta, z) = u_r(r)\underline{e}_r + u_z(z)\underline{e}_z$. Calculer le tenseur gradient de la transformation.

(/1)

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{Grad}} \underline{u}$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{Grad}} \underline{u} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial u_r}{\partial z} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + \\ &\quad \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \\ &\quad \frac{\partial u_z}{\partial r} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial z} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{Grad}} \underline{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{u_r}{r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial z} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$$

$$[\underline{\underline{F}}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} + 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u_r}{r} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial z} + 1 \end{pmatrix}$$

3. Calculer le champ de déformations associé à ce champ de déplacement, en faisant l'hypothèse des petites perturbations. (/1)

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T \right)$$

$$\underline{\underline{Grad}} \underline{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{u_r}{r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial z} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$$

$$[\underline{\underline{\varepsilon}}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

4. Exprimer le tenseur des contraintes dans la corde en fonction de u_r et u_z pour cette déformation, en faisant l'hypothèse qu'il existe un matériau équivalent à la corde élastique, linéaire et isotrope. On note λ et μ les coefficients de Lamé de ce matériau. (/1)

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}$$

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{u_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} \lambda \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{u_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

5. Ecrire l'équation d'équilibre pour cet état de contraintes. Montrer que cette équation conduit aux deux équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} r^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + r \frac{\partial u_r}{\partial r} - u_r = 0 \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = 0 \end{cases} \quad (/1)$$

Equation d'équilibre :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{div}} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \left(\underline{\underline{f}} - \underline{\underline{a}} \right) &= \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{div}} \underline{\underline{\sigma}} &= \left(\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} \right) \underline{\underline{e}}_r + \\ &\quad \left(\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} \right) \underline{\underline{e}}_\theta + \\ &\quad \left(\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \sigma_{zr} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \underline{\underline{e}}_z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r} \right) \right) + \frac{1}{r} \left(2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} - 2\mu \frac{u_r}{r} \right) = 0 \\ 2\mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + r \frac{\partial u_r}{\partial r} - u_r = 0 \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = 0 \end{cases}$$

6. Le champ de déplacement $\underline{u}(r, z) = (Ar + B/r)\underline{e}_r + Cze_z$ est solution des équations précédente (A, B, C sont trois constantes à déterminer). On considère que le déplacement u_r est nul au centre de la corde : en déduire l'une de ces constantes. (/1)

$$u_r(r=0, z) = 0 \Rightarrow B = 0$$

7. Réécrire le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ dans la corde obtenu en question 4 pour le champ de déplacement issu de la question précédente. (/1)

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} \lambda \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{u_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\underline{u}(r, z) = A r \underline{e}_r + C z \underline{e}_z$$

$$[\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} (2\lambda + 2\mu)A + \lambda C & 0 & 0 \\ 0 & (2\lambda + 2\mu)A + \lambda C & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda A + (\lambda + 2\mu)C \end{pmatrix}$$

8. Ecrire la condition obtenue en question 1 . Que peut-on dire sur les composantes σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$?

Comment appelle-t-on cet état de contrainte ? (/1)

On a précédemment écrit $\sigma_{rr}(r_{ext}) = 0$. Or, σ_{rr} n'est pas dépendant de r et donc : $\sigma_{rr} = 0 \quad \forall r$.

De plus, on observe que $\sigma_{\theta\theta} = 0$. Au final, la corde est dans un état de traction uniaxiale

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{zz} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z.$$

9. On suppose que l'effort $F = Mg$ est réparti uniformément sur la section de la corde S . Ecrire une condition supplémentaire sur les composantes du tenseur des contraintes. En s'appuyant également sur la question précédente, écrire le système (sans le résoudre) qui permet de déterminer complètement le champ de déplacement (c-à-d de trouver toutes les constantes A, B et C). (/1)

$$F \underline{e}_z = \int_S \underline{t}(z, \underline{e}_z) dS = \int_S \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_z dS$$

Comme la force est uniformément répartie on a :

$$\begin{aligned} F \underline{e}_z &= \int_S \underline{t}(z, \underline{e}_z) dS = \int_S \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_z dS \\ F &= \sigma_{zz} \int_S dS = (2\lambda A + (\lambda + 2\mu)C)S \end{aligned}$$

Au final :

$$\begin{cases} \frac{F}{S} = 2\lambda A + (\lambda + 2\mu)C \\ 0 = (2\lambda + 2\mu)A + \lambda C \end{cases} = \text{système de deux équations à deux inconnues}$$

10. On considère les constantes A, B et C connues, avec $B=0$, et on considère que le tenseur des contraintes vaut $\underline{\underline{\sigma}} = (Mg/S) \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z$. Ecrire le champ de déformation déterminé en question 3. A partir de l'interprétation physique du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν , écrire les constantes A et C en fonction de E et ν . (/1).

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \underline{u}(r, z) = A r \underline{e}_r + C z \underline{e}_z$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

On sait que dans le sens de la traction : $\sigma_{zz} = \frac{F}{S} = E \varepsilon_{zz} \Rightarrow C = \frac{F}{SE}$

De plus, on sait que le coefficient de Poisson est tel que : $\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{rr} = -\nu \varepsilon_{zz}$

Par conséquent on a : $A = -\nu C = -\frac{\nu}{E} \frac{F}{S}$

11. En conclusion : on suppose qu'on connaît les propriétés et la section de la corde, et on mesure le rayon extérieur avant et après que le grimpeur se pend à la corde ($u_r = r_{\text{ext}} - R_{\text{ext}}$) Comment détermine-t-on la masse du grimpeur? (/1)

$$u_r = r_{\text{ext}} - R_{\text{ext}} = -\frac{\nu}{E} \frac{F}{S} r_{\text{ext}} - R_{\text{ext}} = -\frac{\nu}{E} \frac{Mg}{S} r_{\text{ext}} - R_{\text{ext}}$$

D'après la question précédente, au niveau du rayon extérieur on a $u_r = A r_{\text{ext}} = -\frac{\nu}{E} \frac{F}{S} r_{\text{ext}} = -\frac{\nu}{E} \frac{Mg}{S} r_{\text{ext}}$

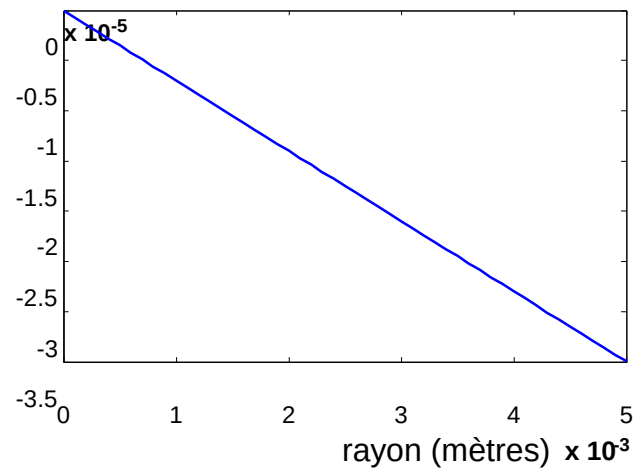
Toutes les données sont ici connues à part la masse du grimpeur, qu'on peut donc déterminer à partir de

la mesure de la variation de rayon $u_r = r_{\text{ext}}(t) - r_{\text{ext}}(0)$

12. On effectue la simulation de cet essai avec les valeurs : $r_{\text{ext}} = 5\text{mm}$, $E = 0.5\text{GPa}$, $\nu = 0.4$, $M = 70\text{kg}$. On obtient les courbes suivantes, dans lesquelles la légende a été oubliée... compléter les courbes suivantes, en précisant les grandeurs représentées et leurs unités. (/2)

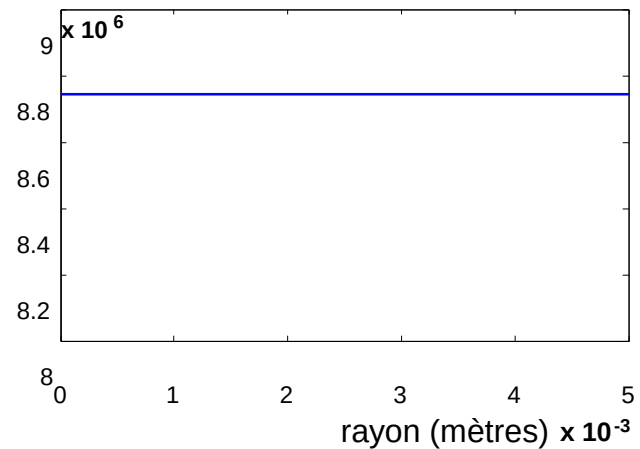
Quantité représentée : u_r

Unité : mètres

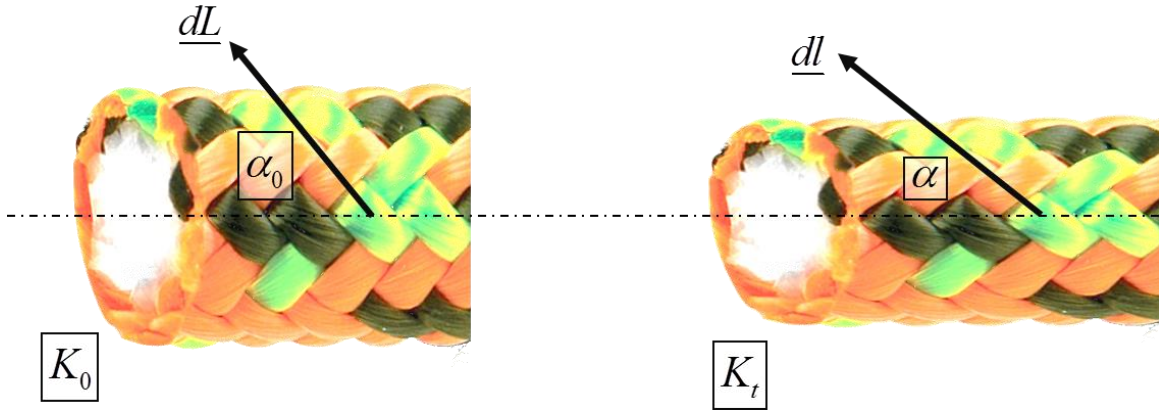


Quantité représentée : σ_{zz}

Unité : Pascals



13. On considère un vecteur unitaire aligné dans la direction d'une des fibres qui constitue la gaine de la corde. On note α_0 l'angle initial entre ce vecteur et l'axe de la corde. D'après les questions précédentes, calculer l'angle α entre cette fibre et l'axe de la corde après que la corde soit soumise au poids du grimpeur. Peut-on déterminer la masse du grimpeur en mesurant cet angle ? (/2)



Le vecteur unitaire s'écrit naturellement dans la configuration initiale : $\underline{dL} = \sin \alpha_0 \underline{e_\theta} + \cos \alpha_0 \underline{e_z}$

Après transformation, dans la configuration K_t , ce vecteur devient : $\underline{dl} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{dL}$

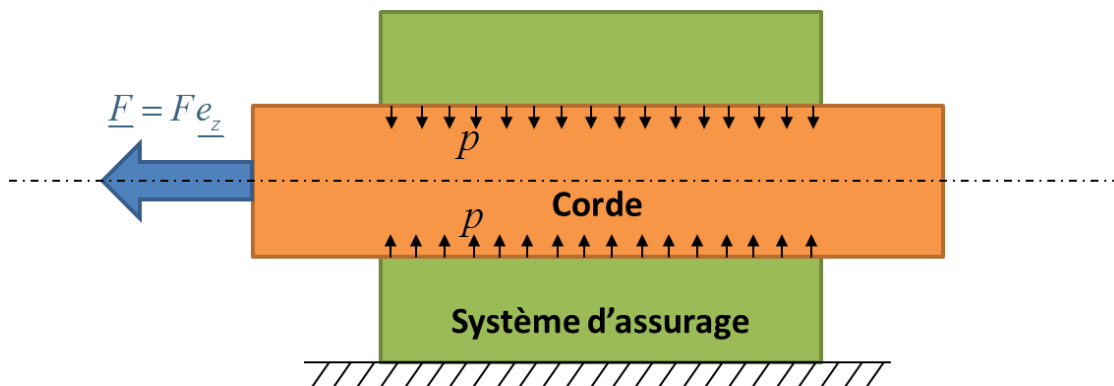
$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} + 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u_r}{r} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u_z}{\partial z} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A+1 & 0 \\ 0 & 0 & C+1 \end{pmatrix} \\ \underline{dl} &= \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A+1 & 0 \\ 0 & 0 & C+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \alpha_0 \\ \cos \alpha_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (A+1) \sin \alpha_0 \\ (C+1) \cos \alpha_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'angle α peut s'obtenir en effectuant le produit scalaire de $\underline{dl}$ avec $\underline{e_z}$:

$$\underline{dl} \cdot \underline{e_z} = (C+1) \cos \alpha_0 = \|\underline{dl}\| \cos \alpha$$

Par conséquent on peut facilement exprimer α en fonction des constantes A et C, dans lesquelles la seule inconnue est la masse du grimpeur : on peut donc la déterminer en mesurant α .

14. On fait l'hypothèse (fausse !) qu'un système d'assurage de longueur L maintient la corde en imposant une pression p homogène autour de la corde, soumise au poids du grimpeur. Le coefficient de frottement entre ce système d'assurage et la corde est noté μ . Ecrire la condition sur la pression p pour que le système soit à l'équilibre en fonction de L, F, r_{ext} et μ . (/1)



L'équilibre exige que la force tangentielle soit égale au coefficient de frottement multiplié par la force normale :

$$\| \underline{F}_N \| = \mu \| \underline{F}_T \|$$

Dans ce cas, la force tangente est égale à la force appliquée sur la corde, et la force normale est l'intégrale des forces de pression :

$$\int_S p dS = \mu F$$

Comme la pression est supposée uniformément répartie, on a la relation : $p 2\pi r_{\text{ext}} L = \mu F$

Formulaire

Equation de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{grad}}(\underline{v}) \cdot \underline{v} \right) = -\underline{\underline{grad}}(p) + \mu \Delta \underline{v} + \rho \underline{g}$$

Divergence d'un champ de tenseurs d'ordre 2 en coordonnées cylindriques:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{div}} \underline{\underline{T}} = & \left(\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (T_{rr} - T_{\theta\theta}) + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} \right) \underline{e}_r + \\ & \left(\frac{\partial T_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (T_{\theta r} + T_{r\theta}) + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} \right) \underline{e}_\theta + \\ & \left(\frac{\partial T_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} T_{zr} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right) \underline{e}_z \end{aligned}$$

Divergence d'un champ de vecteurs en coordonnées cylindriques:

$$\underline{\underline{div}} \underline{T} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rT_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial T_z}{\partial z}$$

Gradient d'un champ de vecteurs en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{grad}}} \underline{T} = & \frac{\partial T_r}{\partial r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_r}{\partial \theta} - T_\theta \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_r}{\partial z} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_z + \\ & \frac{\partial T_\theta}{\partial r} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + T_r \right) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_\theta}{\partial z} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z + \\ & \frac{\partial T_z}{\partial r} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T_z}{\partial \theta} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \frac{\partial T_z}{\partial z} \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \end{aligned}$$

Loi de Hooke en élasticité linéaire isotrope :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \lambda \text{Tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{I} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{I} \end{cases}$$