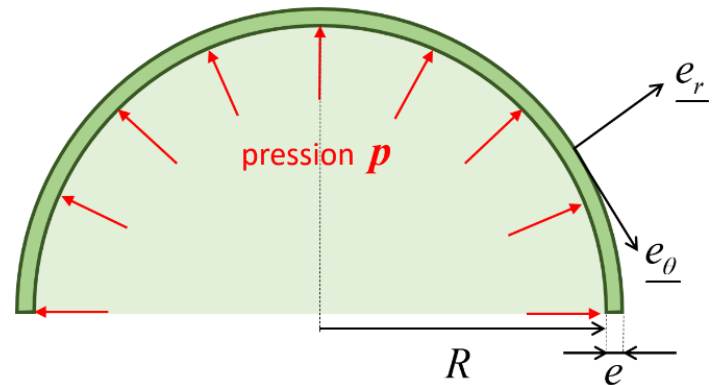


Mécanique des Milieux Continus

18 janvier 2022

2h Aucun document autorisé

La méthanisation permet de générer un biogaz à partir de la dégradation de déchets organiques, notamment les déchets agricoles. On se propose dans ce problème de mécanique d'étudier la pression maximale admissible à l'intérieur d'un méthaniseur avant rupture de la paroi déformable du toit, constitué d'une bâche d'épaisseur très fine.



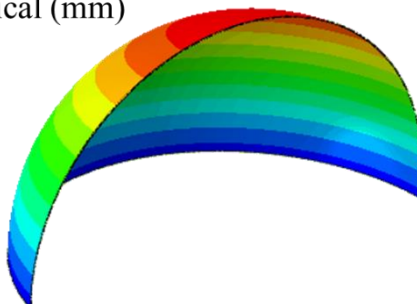
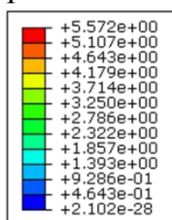
La paroi qui constitue le toit est considérée hémisphérique, d'épaisseur e négligeable devant le rayon R du méthaniseur. Elle est constituée d'une bâche considérée élastique, linéaire et isotrope. Elle est soumise à une pression p à l'intérieur du méthaniseur, et à la pression atmosphérique à l'extérieur qui est **négligée** dans toute l'étude devant p .

Remarques :

- On ne s'intéresse pas au gonflement de la bâche, qui ferait appel à des notions qui dépassent la MMC de première année. On s'intéresse donc à un état **déjà gonflé, juste avant la rupture de la bâche**
- Dans la 1^{ère} partie du problème, le problème sera formulé en **coordonnées sphériques**, mais **PAS DE PANIQUE** : aucune équation compliquée ne devra être résolue dans ce système de coordonnées !
- La bâche est constituée d'un caoutchouc considéré **incompressible**.

R et e	Rayon du méthaniseur et épaisseur de la paroi
E, ν	Paramètres élastiques de la paroi
$\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_\varphi$	Vecteurs de base dans le système de coordonnées sphériques
p	Pression à l'intérieur du méthaniseur
λ	Dilatation dans la paroi

Déplacement vertical (mm)



Ci-contre : exemple de simulation du champ de déplacement dans la bâche sous pression

(résultats dans un repère cartésien ici)

Partie 1 : forme générale du tenseur des contraintes (/10)

En raison des symétries du problème selon les deux angles θ et φ , on considère que le problème dépend uniquement du rayon, et notamment la contrainte : $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}(r)$.

En coordonnées sphériques, la forme générale du tenseur des contraintes est :

$$\underline{\underline{\sigma}}(r) = \begin{pmatrix} \sigma_{rr}(r) & \sigma_{r\theta}(r) & \sigma_{r\varphi}(r) \\ & \sigma_{\theta\theta}(r) & \sigma_{\theta\varphi}(r) \\ \text{sym} & & \sigma_{\varphi\varphi}(r) \end{pmatrix}$$

1. Ecrire la condition à la limite sur la face interne de la paroi, en $r=R$ (/1)

$$\underline{t}(r=R, -\underline{e}_r) = p\underline{e}_r \Rightarrow \begin{cases} -\sigma_{rr}(R) = p \\ -\sigma_{r\theta}(R) = 0 \\ -\sigma_{r\varphi}(R) = 0 \end{cases}$$

2. Ecrire la condition à la limite sur la face externe de la paroi, en $r=R+e$ (/1)

$$\underline{t}(r=R+e, \underline{e}_r) = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{rr}(R+e) = 0 \\ \sigma_{r\theta}(R+e) = 0 \\ \sigma_{r\varphi}(R+e) = 0 \end{cases}$$

3. D'après ce qui précède, justifier qu'on puisse écrire : $\sigma_{r\theta} = 0$, $\sigma_{r\varphi} = 0$, $-p \leq \sigma_{rr} \leq 0$ (/1)

Si paroi mince, composante nulle de chaque côté de la paroi $\rightarrow$ nulle partout
 $\sigma_{rr} = 0$ d'un côté et $-p$ de l'autre $\rightarrow$ on considère qu'il est borné par ces deux valeurs

4. Justifier que l'équation d'équilibre puisse se réduire à $\text{div } \underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}$ pour ce problème (/1)

Dans le cas général : $\text{div } \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{f}^m = \rho \underline{a}$

Si on fait une étude statique du problème $\rightarrow \underline{a} = \underline{0}$

Si on néglige le poids propre de la bache $\rightarrow \underline{f}^m = \underline{0}$

L'écriture de l'équation d'équilibre en coordonnées sphériques vous est (gracieusement) épargnée. En l'écrivant, on arriverait notamment aux résultats suivants :

$$\begin{cases} \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{\varphi\theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow [\underline{\underline{\sigma}}] = \begin{pmatrix} -p \leq \sigma_{rr} \leq 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta\theta} \end{pmatrix}$$

De plus, en écrivant l'équilibre entre efforts intérieurs et efforts extérieurs pour la paroi (comme dans le TD3), on montrerait rapidement que l'on a : $\sigma_{\theta\theta} = \frac{pR}{2e}$.

5. A partir de ces considérations et en vertu du fait que $R \gg e$, montrer qu'il est possible de considérer que la paroi se trouve dans un état de traction biaxiale. (/1)

Comme la paroi est considérée mince, on a $R/e \gg 1$

Par conséquent, $\frac{pR}{2e} \gg p$

Comme on a $-p \leq \sigma_{rr} \leq 0$, la composante σ_{rr} peut être négligée devant $\sigma_{\theta\theta}$ et donc :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{pR}{2e} (\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\varphi \otimes \underline{e}_\varphi)$$

6. Montrer que l'état de contraintes dans la bache s'écrit dans la base principale :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{pR}{2e} (\underline{e}_I \otimes \underline{e}_I + \underline{e}_{II} \otimes \underline{e}_{II}) \quad (/1)$$

D'après la question précédente, la matrice représentative du tenseur des contraintes est déjà diagonale donc les contraintes sont déjà exprimées dans la base principale.

Par convention, on note $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$ et donc ici on a $\sigma_I = \sigma_{II} = \frac{pR}{2e}$

7. Dans cette base principale, à quoi correspond alors la direction principale $\underline{e}_{III}$? (/1)

La base principale est orthonormée, et on a d'après ce qui précède $\underline{e}_I = \pm \underline{e}_\theta$ et $\underline{e}_{II} = \pm \underline{e}_\varphi$

On a par conséquent naturellement $\underline{e}_{III} = \pm \underline{e}_r$: cette direction est normale à la bache, et la

contrainte est donc nulle en vertu du fait que l'on a fait l'hypothèse $\frac{pR}{2e} \gg p$

8. En se servant de la loi de comportement élastique linéaire isotrope, exprimer l'état de déformations dans la bache en fonction des paramètres du matériau (/2)

Dans notre cas on connaît l'état de contraintes et on cherche l'état de déformations. On se sert donc de la loi de comportement inverse :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{pR}{2e} (\underline{e}_I \otimes \underline{e}_I + \underline{e}_{II} \otimes \underline{e}_{II})$$

$$\text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{pR}{e}$$

$$[\underline{\underline{\varepsilon}}] = \frac{1+\nu}{E} \frac{pR}{2e} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\nu}{E} \frac{pR}{e} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[\underline{\underline{\varepsilon}}] = \begin{pmatrix} \frac{1+\nu}{E} \frac{pR}{2e} - \frac{\nu}{E} \frac{pR}{e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+\nu}{E} \frac{pR}{2e} - \frac{\nu}{E} \frac{pR}{e} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E} \frac{pR}{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1-\nu}{E}\right) \frac{pR}{2e} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\nu}{E}\right) \frac{pR}{2e} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E} \frac{pR}{e} \end{pmatrix}$$

9. Montrer que le tenseur des déformations linéarisé s'écrit sous la forme :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \sigma_I \left[\left(\frac{1-\nu}{E} \right) (\underline{e}_I \otimes \underline{e}_I + \underline{e}_{II} \otimes \underline{e}_{II}) - 2 \frac{\nu}{E} \underline{e}_{III} \otimes \underline{e}_{III} \right]$$

Rappeler la signification physique des paramètres matériau bien connus E et ν (/1)

D'après la forme qui précède, on voit apparaître le terme $\frac{pR}{2e} = \sigma_I$ dans la matrice des composantes du tenseur $\underline{\underline{\varepsilon}}$, et on peut mettre $\frac{1}{E}$ en facteur de telle sorte que :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \sigma_I \left[\left(\frac{1-\nu}{E} \right) (\underline{e}_I \otimes \underline{e}_I + \underline{e}_{II} \otimes \underline{e}_{II}) - 2 \frac{\nu}{E} \underline{e}_{III} \otimes \underline{e}_{III} \right]$$

On s'aperçoit donc que dans les deux directions principales $\sigma_I = E\varepsilon_I$ et $\sigma_{II} = E\varepsilon_{II}$: le module d'Young est la pente de la relation $\sigma = f(\varepsilon)$ lors d'une sollicitation en traction

On s'aperçoit également que $\varepsilon_{III} = -\nu\varepsilon_I = -\nu\varepsilon_{II}$ ce qui donne la définition du coefficient de Poisson : c'est le rapport entre la déformation transverse (dans l'épaisseur de la bache) et la déformation longitudinale (dans le plan tangent à la bache).

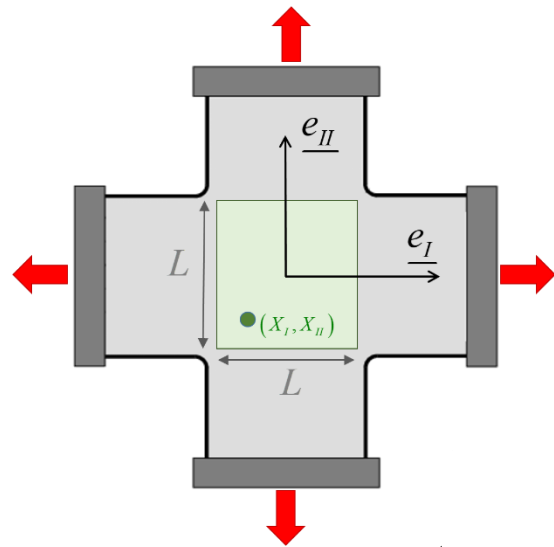
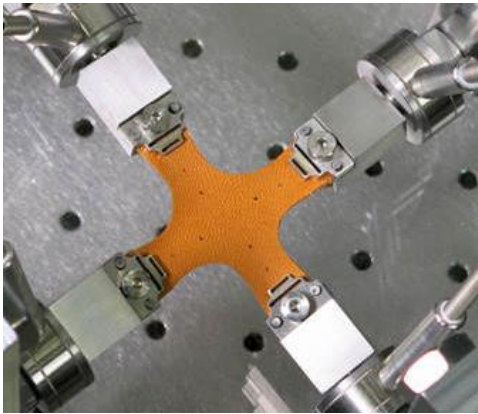
Partie 2 : étude de la paroi en traction biaxiale (/10)

Dans la suite, on se place dans la base principale $(\underline{e}_I, \underline{e}_{II}, \underline{e}_{III})$ liée à la paroi du méthaniseur.

Afin de tester les propriétés de la bêche, on s'intéresse donc à tester un échantillon en traction biaxiale. L'essai réalisé (figure ci-dessous) est tel qu'on ait la transformation :

$$x_I = \lambda X_I \quad x_{II} = \lambda X_{II} \quad x_{III} = \alpha X_{III} \quad \text{dans la partie utile de largeur } L \text{ (en vert)}$$

$\lambda \geq 1$ est la dilatation dans les directions $\underline{e}_I$ et $\underline{e}_{II}$ (égales dans le cas de la traction **équi**biaxiale), tandis que la dilatation dans la direction normale $\underline{e}_{III}$ reste à déterminer.



Remarque : on se place désormais en coordonnées cartésiennes dans $(\underline{e}_I, \underline{e}_{II}, \underline{e}_{III})$!

10. Calculer le tenseur gradient de la transformation pour une telle transformation (/1)

Le tenseur gradient de la transformation s'écrit : $\underline{\underline{F}} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} = \underline{\underline{Grad}} \underline{x}$

Dans ce cas le calcul du gradient est évident :
$$[\underline{\underline{F}}] = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

11. Le matériau constitutif de la bêche est incompressible. Que vaut α ? (/1)

Pour un matériau incompressible, on a évidemment $\det[\underline{\underline{F}}] = 1 \Rightarrow \lambda^2 \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\lambda^2}$

12. Déterminer le champ de déplacements au sein de la partie utile de l'échantillon (/1)

Le champ de déplacements s'écrit évidemment :

$$\underline{u} = \underline{x} - \underline{X} = (\lambda - 1) X_I \underline{e}_I + (\lambda - 1) X_{II} \underline{e}_{II} + \left(\frac{1}{\lambda^2} - 1 \right) X_{III} \underline{e}_{III}$$

13. En déduire le champ de déformations au sein de la partie utile de l'échantillon en faisant l'hypothèse des petites perturbations (/2)

Par définition le champ de déformations s'écrit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T)$$

$$\underline{\underline{Grad}} \underline{u} = \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}} = (\lambda - 1) \underline{e}_I \otimes \underline{e}_I + (\lambda - 1) \underline{e}_{II} \otimes \underline{e}_{II} + \left(\frac{1}{\lambda^2} - 1 \right) \underline{e}_{III} \otimes \underline{e}_{III}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^{sym} = (\lambda - 1) \underline{e}_I \otimes \underline{e}_I + (\lambda - 1) \underline{e}_{II} \otimes \underline{e}_{II} + \left(\frac{1}{\lambda^2} - 1 \right) \underline{e}_{III} \otimes \underline{e}_{III}$$

$$[\underline{\underline{\varepsilon}}] = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2} - 1 \end{pmatrix}$$

14. Discuter de la cohérence physique des composantes du tenseur des déformations (/1)

$$[\underline{\underline{\varepsilon}}] = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2} - 1 \end{pmatrix}$$

Pas de changement d'angle en traction biaxiale = matrice diagonale

Les composantes ε_I et ε_{II} sont égales et positives ($\lambda \geq 1$) car l'échantillon est sollicité en traction dans ces 2 directions $\rightarrow$ il y a un allongement

La composante ε_{III} est négative en raison de l'effet Poisson (diminution de l'épaisseur)

15. A partir de la partie précédente, établir une relation entre la pression p , les paramètres géométriques e et R , la dilatation λ et les propriétés du matériau. (/1)

On vient d'écrire la déformation :
$$\begin{bmatrix} \underline{\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2} - 1 \end{pmatrix}$$

Précédemment on a écrit que :
$$\frac{1}{E} \frac{pR}{2e} = \lambda - 1 \Rightarrow \boxed{p = 2E(\lambda - 1) \frac{e}{R}}$$

On a donc la relation demandée !

16. Vérifier la cohérence entre les unités dans la relation obtenue précédemment (/1)

pression p en Pascals (N/m²)

module d'Young E en Pascals (N/m²)

dilatation λ sans unité car rapport de longueur

rapport de longueur e/R sans unité

→ CQFD

17. En effectuant l'essai de traction biaxiale, on constate une rupture de la bêche pour $\lambda = 1.1$. Application numérique (sans calculatrice !) : pour une bêche d'une épaisseur 1cm constituée d'un matériau dont le module d'Young est 5GPa, et pour un méthaniseur d'un rayon de 1m, quelle sera la pression autorisée (en bars) au sein du méthaniseur ? (/1)

$$p = 2E(\lambda - 1) \frac{e}{R}$$

$$= 2 \times 5 \times 10^9 \times (1.1 - 1) \frac{0.01}{1} = 10 \times 10^9 \times 0.1 \times 0.001 = 10^6 \text{ Pa} = 10 \text{ bars}$$

18. Peut-on utiliser l'équation de Navier-Stokes pour modéliser le flux du biogaz à l'intérieur du méthaniseur ? Pourquoi ? (/1)

L'équation de Navier-Stokes est valide pour un fluide incompressible (on fait intervenir $\text{div} \underline{v} = 0$ dans la démonstration), ce qui n'est pas le cas du biogaz qui est compressible

→ non, on ne peut pas utiliser l'équation !

Formulaire

Tenseur des déformations linéarisé : $\frac{1}{2}(\underline{\underline{Grad}} \underline{u} + (\underline{\underline{Grad}} \underline{u})^T)$

Tenseur taux de déformation : $\frac{1}{2}(\underline{\underline{grad}} \underline{v} + (\underline{\underline{grad}} \underline{v})^T)$

Tenseur gradient de la transformation : $\underline{\underline{Grad}} \underline{x} = \underline{\underline{Grad}} \underline{u} + \underline{I}$

Gradient d'un champ de vecteurs : $\underline{\underline{Grad}} \underline{T} = \frac{\partial T_i}{\partial X_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$

Loi de Hooke :
$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = (\lambda \text{Tr} \underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{I} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{I} \end{cases}$$

Comportement du fluide newtonien : $\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{I} + 2\eta \underline{\underline{d}}$

Equation de Navier-Stokes : $\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{grad}}(\underline{v}) \cdot \underline{v} \right) = -\underline{\underline{grad}}(p) + \eta \Delta \underline{v} + \rho \underline{g}$