

CHAPITRE VII

Application aux fluides

EFFORT



TECHNICITE



RISQUE



OBJECTIF

*Comment un fluide
« simple » se comporte-
t-il ?*

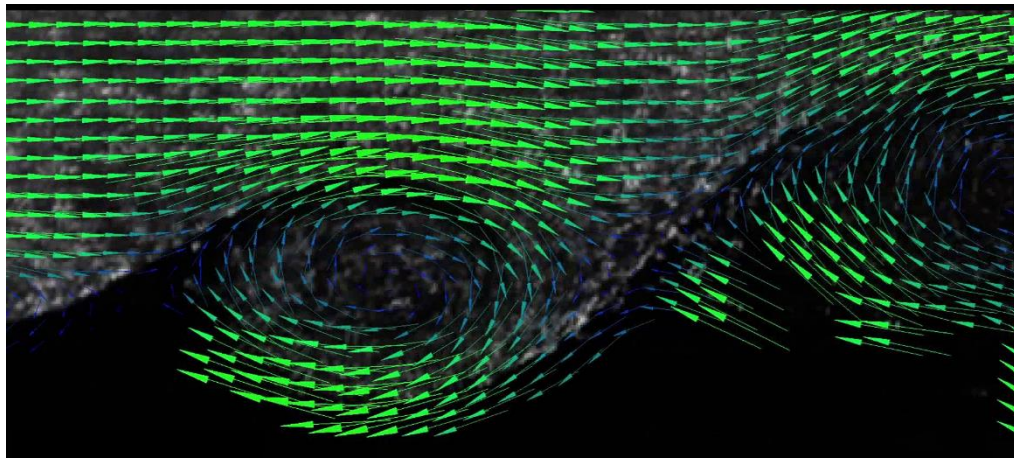
CHAP VII: Application aux fluides

Cinématique du mouvement fluide

- Description de la transformation
- Vitesse de déformation
- Vorticité et tourbillon

Pour un fluide en mouvement : notion de « configuration de référence » ?

→ utilisation de la description eulérienne $\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, t)$



■ **Rappel** : définition de la trajectoire $d\underline{x} = \underline{v}(\underline{x}, t)dt$ avec $\underline{x}(t = 0) = \underline{X}$

■ **Rappel** : définition de la ligne de courant

$$\frac{dx_1}{v_1(\underline{x}, t)} = \frac{dx_2}{v_2(\underline{x}, t)} = \frac{dx_3}{v_3(\underline{x}, t)}$$

CHAP VII: Application aux fluides

Cinématique du mouvement fluide

- Description de la transformation
- Vitesse de déformation
- Vorticité et tourbillon

- résultats obtenus précédemment :

✓ tenseur de **description eulérienne** : $\underline{\underline{k}} = \dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} = \underline{\underline{\text{grad } \underline{v}(\underline{x}, t)}}$

- ✓ la partie **symétrique** de ce tenseur est **la vitesse de déformation** :

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}(\underline{x}, t)}} + \left(\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}(\underline{x}, t)}} \right)^T \right)$$

- ✓ la partie **antisymétrique** de ce tenseur est **la vitesse de rotation**:

$$\underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}(\underline{x}, t)}} - \left(\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}(\underline{x}, t)}} \right)^T \right)$$

CHAP VII: Application aux fluides

Cinématique du mouvement fluide

- Description de la transformation
- Vitesse de déformation
- Vorticité et tourbillon

- rappel : définition du **rotationnel** d'un champ de vecteurs vitesse

$$\underline{rot} \underline{v} = \underline{\nabla} \wedge \underline{v} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \underline{e}_i$$

→ transforme un champ de vecteurs en champ de vecteurs

- on peut définir alors le champ de **vorticité** du fluide $\underline{\omega}$ tel que :

$$\underline{\omega}(\underline{x}, t) = \underline{rot} \underline{v}(\underline{x}, t)$$

→ la direction de $\underline{\omega}$ est l'axe de rotation locale du fluide



- On considère le tenseur **vitesse de rotation** ci-dessus

$$\underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) - \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v}(\underline{x}, t) \right)^T \right)$$

→ tenseur d'ordre 2 : application linéaire qui « transforme un vecteur en un autre vecteur »

- On applique ce tenseur à un vecteur quelconque $\underline{a}$:

$$\underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{a} = \Omega_{ij} a_j \underline{e}_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) a_j \underline{e}_i = \frac{1}{2} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} a_j \underline{e}_i - \frac{1}{2} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} a_j \underline{e}_i$$

→ on peut définir un **vecteur tourbillon** $\underline{\underline{\Omega}}$ tel que : $\underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{a} = \underline{\underline{\Omega}} \wedge \underline{a}$

→ on constate rapidement que l'on a la relation :

$$\underline{\underline{\Omega}}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \underline{\underline{rot}} \underline{v}(\underline{x}, t) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\omega}}(\underline{x}, t)$$

CHAP VII: Application aux fluides

Lois de conservation

- Conservation de la masse
- Conservation de la quantité de mouvement

- rappel : expression **eulérienne** de la **conservation de la masse**

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{v}) = 0} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\underline{v}) = 0}$$

- On peut également proposer la formulation **faible** suivante :

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \rho \underline{v} \cdot \underline{da} = 0$$

Variation dans le
temps de la masse
volumique

Flux de matière
sortante

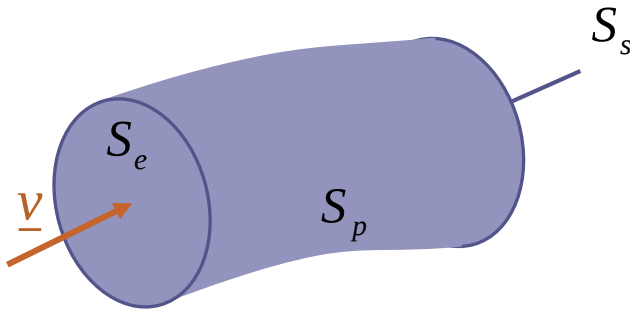
- Ecoulement **stationnaire**

= description eulérienne indépendante du temps $\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

la conservation de la masse devient : $\int_{\partial\Omega_t} \rho \underline{v} \cdot \underline{da} = 0$

- Cas d'une **canalisation** en mouvement **stationnaire**

frontière = surface d'entrée S_e + surface de sortie S_s + paroi S_p



→ Conservation de la masse :

$$\int_{\partial\Omega_t} \rho \underline{v}(\underline{x}, t) \underline{da} = \int_{S_e} \rho \underline{v} \cdot \underline{da} + \int_{S_s} \rho \underline{v} \cdot \underline{da} + \int_{S_p} \rho \underline{v} \cdot \underline{da} = 0$$

- Paroi étanche → $\int_{S_p} \rho \underline{v} \cdot \underline{da} = 0$ → $-\int_{S_e} \rho \underline{v} \cdot \underline{da} = \int_{S_s} \rho \underline{v} \cdot \underline{da} = Q_m$
= **conservation du débit massique** (en kg.s^{-1})

- Equation de conservation de la masse : $\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div}(\underline{v}) = 0$

- Si le fluide est **incompressible** : $\rho(\underline{x}, t) = \rho_0$

→ on retrouve la condition d'incompressibilité $\text{div}(\underline{v}) = 0$

Exemple

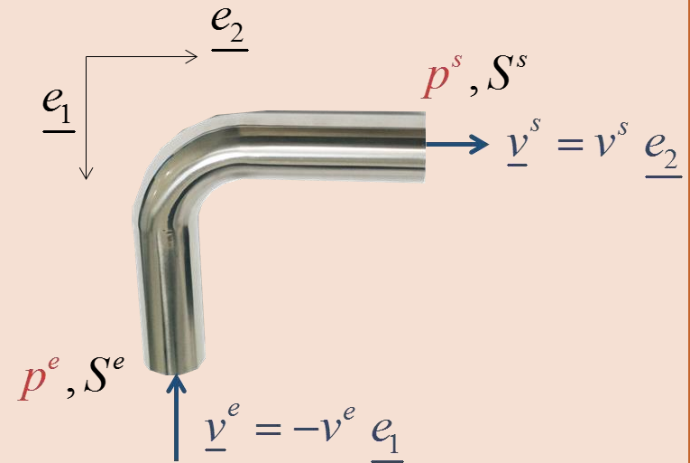
Canalisation coudée de section constante

- Vitesses d'entrée et de sortie

$$\underline{v}^e = -v^e \underline{e}_1 \quad \underline{v}^s = v^s \underline{e}_2$$

$$\cancel{\int_{\Omega_t} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega_t} + \int_{\partial\Omega_t} \rho \underline{v} \cdot \underline{da} = 0$$

Variation dans le temps de la masse volumique / Flux de matière sortante



- Hypothèse : fluide incompressible

$$\int_{S^s} \rho \underline{v}^s \cdot \underline{n}^s da + \int_{S^e} \rho \underline{v}^e \cdot \underline{n}^e da = 0 \quad \text{avec} \quad \underline{n}^e = \underline{e}_1 \quad \text{et} \quad \underline{n}^s = \underline{e}_2$$

- Masse volumique constante + vitesse uniformément répartie

$$-\int_{S^e} \rho (-v^e \underline{e}_1) \cdot \underline{e}_1 da = \int_{S^s} \rho v^s \underline{e}_2 \cdot \underline{e}_2 da \Rightarrow \rho v^e S^e = \rho v^s S^s \Rightarrow \boxed{v^e = v^s}$$

CHAP VII: Application aux fluides

Lois de conservation

- Conservation de la masse
- Conservation de la quantité de mouvement

- On tente d'exprimer la variation de la **quantité de mouvement** :

$$\frac{d}{dt} \underline{p} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \underline{v} d\Omega_t$$

- On reprend la formule de dérivée particulière d'une intégrale de volume avec $b = \rho v_i$:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho v_i d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \rho v_i \underline{v} \cdot d\underline{a}$$

- Vraie pour toutes les composantes → **formule de transport d'Euler**

$$\frac{d}{dt} \underline{p} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \underline{v} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{v}) d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) da$$

Variation au sein du système

Transfert par la frontière

- Rappel :**

variation de quantité de mouvement = somme des efforts extérieurs

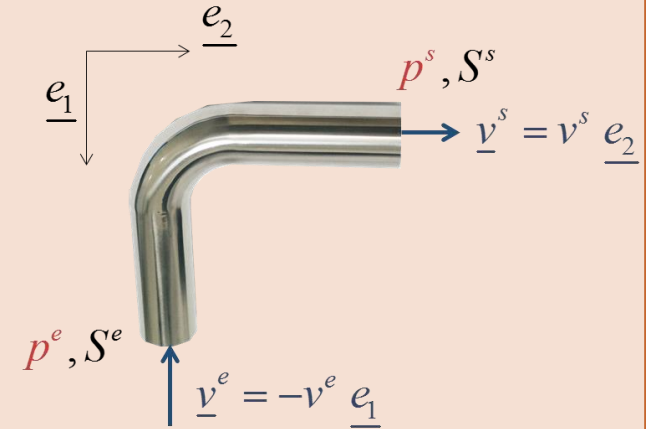
Exemple

Canalisation coudée de section constante

- Variation de la qdm entre t et $t + dt$

$$d\underline{p} = \underline{p}(t + dt) - \underline{p}(t) + dm^s \underline{v}^s + dm^e \underline{v}^e$$

$$d\underline{p} = \underline{p}(t + dt) + \rho v^2 S dt \underline{e}_2 - \underline{p}(t) + \rho v^2 S dt \underline{e}_1$$



- conservation de la qdm : $\underline{p}(t + dt) = \underline{p}(t) \Rightarrow \frac{d\underline{p}}{dt} = \rho v^2 S (\underline{e}_1 + \underline{e}_2) = \sum \underline{F}^{ext}$

- fluide soumis aux seules forces de pression : $\underline{F}^{ext} = -p^e S^e \underline{e}_1 - p^s S^s \underline{e}_2 + \underline{F}$

- on en déduit l'effort : $\underline{F} = S(p^e + \rho v^2) \underline{e}_1 + S(p^s + \rho v^2) \underline{e}_2$
effort de la paroi sur le fluide

- et enfin l'effort : $\underline{F}^{fluide/paroi} = -S(\rho v^2 + p^e) \underline{e}_1 - S(\rho v^2 + p^s) \underline{e}_2$

CHAP VII : Application aux fluides

Loi de comportement du fluide newtonien

Observations expérimentales :

Pour un fluide en **hydrostatique** , la contrainte normale est identique quelque soit la normale considérée : $\forall \underline{n}, \quad \underline{t}(\underline{x}, \underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n} = -p \underline{n}$

p : pression hydrostatique

- Tenseur des contraintes en **hydrostatique** : $\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}}$
- Aucune contrainte **tangentielle** → **définition d'un fluide** :

« un fluide est un matériau qui au repos ne peut supporter aucune contrainte tangentielle »

Mise en **mouvement** de ce fluide → apparition de **contraintes visqueuses**

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}$$

Tenseur des contraintes
hydrostatique

Tenseur des
contraintes visqueuses

- Fluide **newtonien** : relation **linéaire** entre le taux de déformation $\underline{\underline{d}}$ et le tenseur des contraintes visqueuses $\underline{\underline{\tau}}$
- Fluide **newtonien incompressible isotrope** :
la relation **linéaire** se réduit à un coefficient = **viscosité dynamique** μ

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\mu\underline{\underline{d}} = \mu \left(\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}} + \left(\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}} \right)^T \right)$$

Loi de comportement pour un fluide newtonien :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + 2\mu\underline{\underline{d}}$$

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}} + \left(\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}} \right)^T \right)$$

viscosité dynamique μ : **contrainte de cisaillement** accompagnant un **gradient de vitesse** dans un **fluide**

- Pour les fluides **newtoniens** : viscosité **indépendante** du gradient
- En revanche : dépendant de la **température** du fluide

exemple : viscosité dynamique de l'eau

- 20°C : 10^{-3} Pa.s
- 0°C : $1,75 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$

CHAP VII : Application aux fluides

Equation de Navier-Stokes

Démonstration et énoncé

- Equation d'équilibre (valables pour les fluides et les solides)

$$\underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\sigma}} + \rho (\underline{\underline{f}}^m - \underline{\underline{a}}) = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{a}} = \frac{d\underline{\underline{v}}}{dt} = \frac{\partial \underline{\underline{v}}}{\partial t} + \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\underline{v}}) \cdot \underline{\underline{v}}$$

$$\underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{\underline{f}}^m = \rho \left(\frac{\partial \underline{\underline{v}}}{\partial t} + \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\underline{v}}) \cdot \underline{\underline{v}} \right)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{d}}$$

$$\underline{\underline{\text{div}}}(-p \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{d}}) + \rho \underline{\underline{f}}^m = \rho \left(\frac{\partial \underline{\underline{v}}}{\partial t} + \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\underline{v}}) \cdot \underline{\underline{v}} \right)$$

$$\underline{\underline{\text{div}}}(-p \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{d}}) = -\underline{\underline{\text{div}}}(p \underline{\underline{I}}) + \underline{\underline{\text{div}}}(2\mu \underline{\underline{d}})$$

$$-\underline{\underline{\text{div}}}(p \underline{\underline{I}}) + \underline{\underline{\text{div}}}(2\mu \underline{\underline{d}}) + \rho \underline{\underline{f}}^m = \rho \left(\frac{\partial \underline{\underline{v}}}{\partial t} + \underline{\underline{\text{grad}}}(\underline{\underline{v}}) \cdot \underline{\underline{v}} \right)$$

$$\underline{\underline{\text{div}}}(p \underline{\underline{I}}) = \frac{\partial (p I_{ij})}{\partial x_j} \underline{\underline{e}}_i = \frac{\partial p}{\partial x_i} \underline{\underline{e}}_i = \underline{\underline{\text{grad}}}(p)$$

$$\underline{\underline{\text{div}}}(2\mu \underline{\underline{d}}) = \frac{\partial (2\mu d_{ij})}{\partial x_j} \underline{\underline{e}}_i = 2\mu \frac{\partial d_{ij}}{\partial x_j} \underline{\underline{e}}_i = 2\mu \underline{\underline{\text{div}}}(\underline{\underline{d}})$$

Démonstration et énoncé

$$-\underline{\underline{grad}}(p) + 2\mu \underline{\underline{div}}(\underline{\underline{d}}) + \rho \underline{\underline{f}}^m = \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{grad}}(\underline{v}) \cdot \underline{v} \right)$$

$$\underline{\underline{div}}(\underline{\underline{d}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{div}} \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v} + \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v} \right)^T \right) = \frac{1}{2} \underline{\underline{div}}(\underline{\underline{grad}} \underline{v}) + \frac{1}{2} \underline{\underline{div}}(\underline{\underline{grad}} \underline{v})^T$$

$$\underline{\underline{div}}(\underline{\underline{grad}} \underline{v}) = \underline{\Delta} \underline{v}$$

$$\left(\underline{\underline{grad}}(\underline{v}) \right)^T = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \Rightarrow \underline{\underline{div}}(\underline{\underline{grad}}(\underline{v}))^T = \frac{\partial \left(\underline{\underline{grad}} \underline{v} \right)_{ij}}{\partial x_j} \underline{e}_i = \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \underline{e}_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \cancel{\underline{\underline{div}} \underline{v}} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow -\underline{\underline{grad}}(p) + \mu \underline{\Delta} \underline{v} + \rho \underline{\underline{f}}^m = \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{grad}}(\underline{v}) \cdot \underline{v} \right)$$

$$\underline{\underline{f}}^m = \underline{g}$$

$$\rho \frac{d \underline{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\underline{grad}}(\underline{v}) \cdot \underline{v} \right) = -\underline{\underline{grad}}(p) + \mu \underline{\Delta} \underline{v} + \rho \underline{g}$$

= équation de Navier-Stokes

- équation de **Navier-Stokes** =
 - ✓ **équation d'équilibre** du milieu continu
 - ✓ loi de comportement du fluide **newtonien**
 - ✓ **incompressibilité** du fluide
- **Inconnues** : champ de vitesse (3 composantes) et champ de pression

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = -\underline{grad}(p) + \mu \underline{\Delta v} + \rho \underline{g}$$

→ Accélération x masse = somme des forces avec :

$\rho d\underline{v}/dt$: l'accélération du fluide

$-\underline{grad}(p)$: les « forces de pression »

$\mu \underline{\Delta v}$: les « forces visqueuses »

$\rho \underline{g}$: les « forces de pesanteur »

- équation de **Navier-Stokes = non-linéaire**

→ Résolution : nécessite des **conditions aux limites**

Vitesse donnée au bord

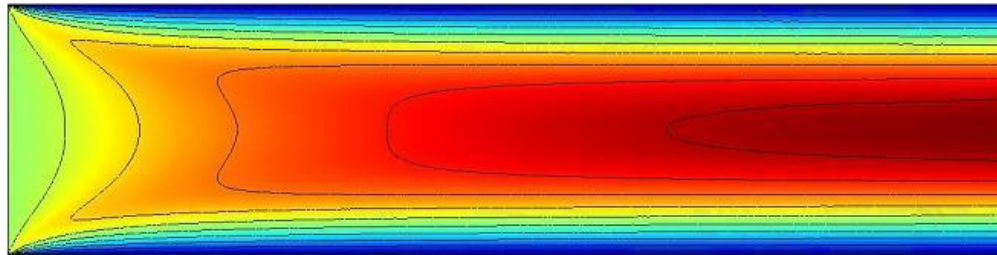
$$\forall \underline{x} \in \partial\Omega, \underline{v}(\underline{x}) = \underline{v}^0(\underline{x})$$

Pression donnée en un point du bord

$$p(\underline{x}^0 \in \partial\Omega) = p^0$$

- Condition aux limites courante : condition **d'adhérence à la paroi**

$$\forall \underline{x} \in \partial\Omega, \underline{v}(\underline{x}) = \underline{0}$$



Vitesse de déformation et de rotation du fluide

Vorticité, tourbillon

Conservation de la masse et du débit massique

Comportement du fluide newtonien

Equation de Navier-Stokes