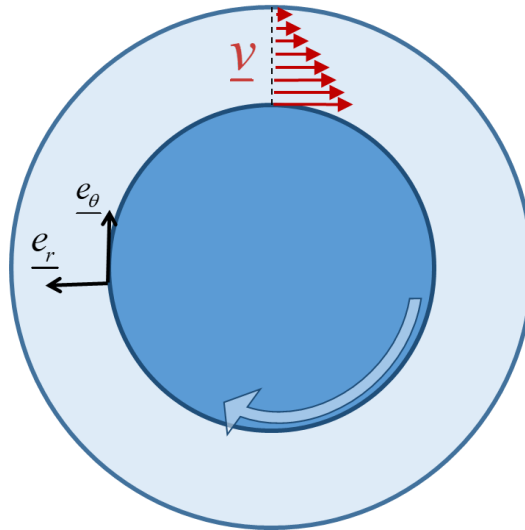


TD7 : corrigé

Première partie : champ de vitesses autour de la surface latérale

- 1) Pour cette surface, justifier que l'on puisse postuler un champ de vitesses et de pression sous la forme $\underline{v} = v_\theta(r) \underline{e}_\theta$ et $p(r, z)$ respectivement.



$$\text{div } \underline{v} = 0 \Rightarrow \frac{v_r}{r} + \frac{\partial(v_r)}{\partial r} = 0$$

$$\Rightarrow v_r = \frac{C}{r}$$

$$v_r(r = R_{\text{ext}}) = \frac{C}{R_{\text{ext}}} = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \underline{v}(r) = v_\theta(r) \underline{e}_\theta$$

- 2) Trouver la forme du champ de vitesses en utilisant l'équation de Navier-Stokes.

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{\text{grad}}(\underline{v}) \cdot \underline{v} \right) = -\underline{\text{grad}}(p) + \mu \Delta \underline{v} + \rho \underline{g}$$

$$\underline{g} = -g \underline{e}_z$$

$$\underline{\text{grad}} p = \frac{\partial p}{\partial r} \underline{e}_r + \frac{\partial p}{\partial z} \underline{e}_z$$

$$\Delta \underline{v} = \underline{\text{div}}(\underline{\text{grad}}(\underline{v}))$$

$$[\underline{\text{grad}} \underline{v}] = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{v_\theta}{r} & 0 \\ \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\underline{\text{div}}(\underline{\text{grad}}(\underline{v}))] = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho \frac{d\underline{v}}{dt} = \rho \left(\cancel{\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}} + \underline{\text{grad}}(\underline{v}) \cdot \underline{v} \right) = \begin{pmatrix} -\rho \frac{v_\theta^2}{r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho \frac{v_\theta^2}{r} \\ \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} = 0$$

On montre que cette équation a pour solution (voir aide à la fin de l'énoncé de TD) :

$$v_\theta = \frac{A}{r} + Br$$

$$\begin{cases} v_\theta(r = R_{\text{int}}) = \frac{A}{R_{\text{int}}} + BR_{\text{int}} = \Omega R_{\text{int}} \\ v_\theta(r = R_{\text{ext}}) = \frac{A}{R_{\text{ext}}} + BR_{\text{ext}} = 0 \end{cases} \quad \text{avec } \Omega \text{ la vitesse de rotation du moteur}$$

$$v_\theta = \frac{A(\Omega)}{r} + B(\Omega)r$$

3) En déduire le champ de contraintes sur la surface latérale.

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\mu \underline{\underline{d}} = \mu \left(\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}} + \left(\underline{\underline{\text{grad } \underline{v}}} \right)^T \right)$$

$$\left[\underline{\underline{\tau}} \right] = -\mu \frac{2A}{r^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(r = R_{\text{int}}) = -p \underline{\underline{I}} - \mu \frac{2A}{R_{\text{int}}^2} (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r)$$

4) Surface latérale : déterminer le couple résistant au niveau du volant en raison du frottement fluide.

$$\underline{\underline{\sigma}}(r = R_{\text{int}}) = -p \underline{\underline{I}} - \mu \frac{2A}{R_{\text{int}}^2} (\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r)$$

$$d\underline{\underline{\mathcal{C}}}_{S_{\text{lat}}/\text{fluide}} = R_{\text{int}} \underline{e}_r \wedge \underline{t}(r = R_{\text{int}}, -\underline{e}_r) = -\sigma_{\theta r}(r = R_{\text{int}}) R_{\text{int}} \underline{e}_z$$

$$\underline{\underline{\mathcal{C}}}_{S_{\text{lat}}/\text{fluide}} = \int_{S_{\text{lat}}} -\sigma_{\theta r}(r = R_{\text{int}}) R_{\text{int}} dS = 4\mu A \pi H$$

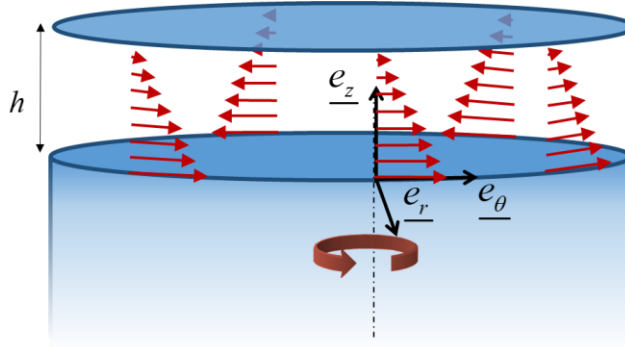
$$\underline{\underline{\mathcal{C}}}_{\text{fluide}/\text{paroi latérale}} = -\underline{\underline{\mathcal{C}}}_{S_{\text{lat}}/\text{fluide}} = -4\mu A \pi H$$

Seconde partie : champ de vitesses autour de la surface supérieure

- 5) Pour cette seconde surface, on postule un champ de vitesses et de pression sous la forme $\underline{v} = v_\theta(r, z) \underline{e}_\theta$ et $p(r, z)$ respectivement, et on admet que la vitesse dépend linéairement de z . En reprenant la démarche précédente, calculer le champ de contraintes sur la surface supérieure..

$$\underline{v}(\underline{x}) = v_\theta(r, z) \underline{e}_\theta$$

$$p(\underline{x}) = p(r, z)$$



$$v_\theta(r, z=0) = \Omega r \quad \forall r \Rightarrow B(r) = \Omega r$$

$$v_\theta(r, z=h) = 0 \quad \forall r \Rightarrow A(r) = \frac{-B(r)}{h} = \frac{-\Omega r}{h} \Rightarrow v_\theta(r, z) = r\Omega \left(1 - \frac{z}{h}\right)$$

NB : la réécriture de l'équation de Navier-Stokes conduirait à l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} = 0$$

dont la forme $v_\theta(r, z) = r\Omega \left(1 - \frac{z}{h}\right)$ est une solution.

$$[\underline{\underline{\tau}}] = \frac{-\mu r \Omega}{h} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(z=0) = \underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}} = -p \underline{\underline{I}} - \frac{\mu r \Omega}{h} (\underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z)$$

- 6) Surface supérieure : déterminer le couple résistant au niveau du volant en raison du frottement fluide.

$$\underline{\underline{\sigma}}(z=0) = -p \underline{\underline{I}} - \frac{\mu r \Omega}{h} (\underline{e}_z \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_z)$$

$$d\underline{\underline{\mathcal{C}}}_{\text{sup}/\text{fluide}} = r \underline{e}_r \wedge \underline{t}(z=0, -\underline{e}_z) = -\sigma_{\theta z}(z=0) r \underline{e}_z + \sigma_{zz}(z=0) r \underline{e}_\theta$$

$$\mathcal{C}_{S_{\text{sup}}/\text{fluide}} = \int_{S_{\text{sup}}} -\sigma_{\theta z}(z=0) r dS = \int_{S_{\text{sup}}} \frac{\mu r \Omega}{h} r dS = \frac{\mu \Omega}{h} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_{\text{int}}} r^3 d\theta dr = \frac{\pi \mu \Omega R_{\text{int}}^4}{2h}$$

$$\mathcal{C}_{\text{fluide}/\text{paroi supérieure}} = -\mathcal{C}_{S_{\text{sup}}/\text{fluide}} = -\frac{\pi \mu \Omega R_{\text{int}}^4}{2h}$$

7) En considérant le volant indéformable , déduire l'accélération angulaire du volant d'inertie lors de l'application du couple moteur $\mathcal{C}$.

$$\ddot{\theta} I_{0z} = \sum_i \mathfrak{M}_{Oz}(\underline{F}^{(i)})$$

Ici, $\ddot{\theta} = \dot{\Omega}$ correspond à l'accélération angulaire, $I_{0z} = \int r^2 dm$ correspond au moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation, et le terme $\sum_i \mathfrak{M}_{Oz}(\underline{F}^{(i)})$ correspond à la somme des couples appliqués au système.

Dans le cas d'un cylindre plein, le moment d'inertie s'écrit $I_{0z} = \frac{1}{2} \rho \pi R_{\text{int}}^4 H$

Les différents couples appliqués au volant d'inertie sont :

- le couple moteur appliqué au volant d'inertie $\underline{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \underline{e}_z$
- le couple résistant dû à la surface latérale $\mathcal{C}_{\text{fluide}/\text{paroi latérale}} = -4\mu A \pi H$
- les couples résistants dus aux surface supérieures et inférieures :

$$2 \times \mathcal{C}_{\text{fluide}/\text{paroi supérieure}} = -\frac{\pi \mu \Omega R_{\text{int}}^4}{h}$$

Par conséquent on a :

$$\dot{\Omega} = \frac{\sum_i \mathfrak{M}_{Oz}}{I_{0z}} = \frac{2 \left(\mathcal{C} + \mathcal{C}_{\text{fluide}/\text{paroi latérale}} + 2 \times \mathcal{C}_{\text{fluide}/\text{paroi supérieure}} \right)}{\rho \pi R_{\text{int}}^4 H} = \frac{2 \left(\mathcal{C} - 4\mu A \pi H - \frac{\pi \mu \Omega R_{\text{int}}^4}{h} \right)}{\rho \pi R_{\text{int}}^4 H}$$

On peut donc prédire l'accélération angulaire du volant d'inertie.

Quelques remarques de fin :

- on a considéré le fluide incompressible ici : en général, le fluide en question est de l'air, qui est loin d'être incompressible !!
- on a considéré également le solide comme indéformable. C'est loin d'être le cas (annale de janvier 2019) : le volant se déforme évidemment, et peut vite atteindre sa limite d'élasticité s'il tourne trop vite !!