

Examen du 19 janvier

Durée : 2h. Tous documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques interdits.

Avertissement : Ce sujet est intentionnellement trop long, l'idée est de faire un barème sur 25 (susceptible d'être modifié). Ainsi, il n'y a pas besoin de tout faire pour avoir 20. Regardez bien tous les exercices ! Il y a des questions de cours et des questions faciles dans les trois.

Remarques générales

Il y a toujours quelques petites erreurs de rédaction très récurrentes. Quand vous passez à la limite $R \rightarrow \infty$ dans un calcul d'intégrale comme dans l'exo 2, il ne faut plus écrire $\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2 \int_0^{+\infty} f(x)dx$, mais $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_0^{+\infty} f(x)dx$. De même, vous ne pouvez pas écrire $\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2 \int_0^R f(x)dx$ puisque l'intégrale $\int_0^\pi Rie^{i\theta} f(Re^{i\theta})d\theta$ n'est pas nulle même si elle tend vers 0 !

Un certain nombre d'entre vous n'ont pas eu tous les points sur les questions de cours entre autre pour la raison suivante : il ne suffit pas de citer le résultat en une ligne ! Il faut introduire les objets, dire de quoi on parle, donner toutes les hypothèses... Par exemple "Soit f une fonction méromorphe sur un ouvert U , γ un lacet dans U ne contenant aucun pôle de f , $a_1, \dots, a_n$ les pôles de f à l'intérieur de γ ..."

Exercice 1. Soit $0 < a < 1$. Le but de l'exercice est de calculer, grâce au théorème des résidus, l'intégrale

$$I_a = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx.$$

(a) Question de cours : rappeler le théorème des résidus.

(b) Pour $r \in \mathbb{R}$, on définit

$$J_r = \int_{[r, r+2i\pi]} \frac{e^{az}}{1 + e^z} dz.$$

Montrer que pour $r \neq 0$,

$$|J_r| \leq 2\pi \frac{e^{ar}}{|1 - e^r|}.$$

Si $z \in [r, r + 2i\pi]$, l'inégalité triangulaire renversée donne

$$|1 + e^z| \geq |1 - |e^z|| = |1 - e^{\Re(z)}| = |1 - e^r|.$$

Ainsi, on trouve

$$|J_r| \leq \int_{[r, r+2i\pi]} \frac{|e^{az}|}{|1 + e^z|} \leq 2\pi \frac{e^{ar}}{|1 - e^r|}.$$

(c) Si $R > 0$, on note γ_R le bord du rectangle de sommets $-R, R, R + 2i\pi, -R + 2i\pi$ (orienté positivement). Calculer

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{az}}{1 + e^z} dz.$$

Soit f la fonction définie par $f(z) = \frac{e^{az}}{1 + e^z}$. f est méromorphe comme quotient de deux fonctions holomorphes. Elle a des pôles simples aux points $(2k+1)i\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$ (les points où $e^z = -1$). Ainsi, le seul pôle à l'intérieur de γ_R est $i\pi$. On calcule

$$\text{Res}(f, i\pi) = \lim_{z \rightarrow i\pi} e^{az} \frac{z - i\pi}{e^z - e^{i\pi}} = -e^{ia\pi}$$

car

$$\lim_{z \rightarrow i\pi} \frac{e^z - e^{i\pi}}{z - i\pi} = \frac{d(e^z)}{dz}(i\pi) = -1.$$

(d) Montrer que

$$I_a = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

On applique alors le théorème des résidus :

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{az}}{1+e^z} dz = 2i\pi \operatorname{Res}(f, i\pi) = J_R - J_{-R} + (1 - e^{2i\pi a}) \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx$$

. D'après la question précédente, $|J_R| \leq 2\pi \frac{e^{(a-1)R}}{|1 - e^{-R}|} \rightarrow_{R \rightarrow \infty} 0$ car $a - 1 < 0$. De même,

$|J_{-R}| \leq 2\pi \frac{e^{-aR}}{|1 - e^{-R}|} \rightarrow_{R \rightarrow \infty} 0$ car $a > 0$. En passant à la limite, on obtient

$$(1 - e^{2i\pi a})I_a = -2i\pi e^{ia\pi}$$

d'où

$$I_a = \frac{2i\pi}{e^{i\pi a} - e^{-i\pi a}} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

(e) Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t} dt.$$

On fait simplement le changement de variables $t = e^x$ avec $dt = x dx$.

Exercice 2. Soit $a > 0$. L'objectif de l'exercice est de calculer les deux intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} dx \text{ et } J = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx.$$

(a) Justifier l'existence de I .

On a $\frac{1}{x^2 + a^2} \leq \frac{1}{x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable au voisinage en $+\infty$.

(b) On introduit la fonction $f : z \mapsto \frac{1}{z^2 + a^2}$. Justifier que f est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ et calculer $\operatorname{Res}(f, ia)$.

f est un quotient de deux polynômes (fonctions holomorphes), donc c'est une fonction méromorphe par définition. Elle a deux pôles simples en ia et $-ia$, ce sont les racines de $z^2 + a^2$.

On a $\operatorname{Res}(f, ia) = (z - ia)f(z)|_{z=ia} = \frac{1}{2ia}$.

(c) Soit $R > 0$. Dessiner le contour fermé γ_R consistant en le segment $[-R, R]$ suivi du demi-cercle de centre 0 et de rayon R situé dans le demi-plan supérieur (au-dessus de l'axe réel) et orienté positivement.

(d) Calculer pour $R > 0$, la valeur de $\int_{\gamma_R} f(z) dz$. Attention à bien différencier les cas $R < a$ et $R > a$.

Si $R < a$, f n'a de pôle ni sur γ_R , ni à l'intérieur. Le théorème de Cauchy dit donc que l'intégrale est nulle. Si $R > a$, le seul pôle de f à l'intérieur de γ_R est ia . D'après le théorème des résidus,

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2i\pi \operatorname{Res}(f, ia) = \frac{\pi}{a}.$$

- (e) Montrer avec le théorème des résidus que $I = \frac{\pi}{2a}$.

On développe

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{1}{x^2 + a^2} dx + \int_0^\pi \frac{Rie^{i\theta}}{a^2 + (Re^{i\theta})^2} d\theta.$$

Classiquement, on montre avec le théorème de convergence dominée que la deuxième intégrale tend vers 0 quand R tend vers l'infini. De plus, $\int_{-R}^R \frac{1}{x^2 + a^2} dx = 2 \int_0^R \frac{1}{x^2 + a^2} dx$ car f est paire. En passant à la limite $R \rightarrow \infty$, on obtient $2I = \frac{\pi}{a}$.

- (f) On choisit la détermination Log de la fonction logarithme complexe sur $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_-$ donnée par $\text{Log}(re^{i\theta}) = \ln(r) + i\theta$ pour $r > 0$ et $\theta \in]-\pi/2, 3\pi/2[$. On considère la fonction méromorphe sur $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_-$

$$g : z \mapsto \frac{\text{Log}(z)}{z^2 + a^2}.$$

Pour $0 < \epsilon < a$ et $R > a$, dessiner le contour fermé $\delta_{\epsilon, R}$ orienté positivement et défini par le segment $[-R, -\epsilon]$ suivi du demi-cercle de centre 0 et de rayon ϵ au-dessus de l'axe réel (reliant $-\epsilon$ à ϵ , puis du segment $[\epsilon, R]$ suivi du demi-cercle de centre 0 et de rayon R situé au-dessus de l'axe réel (reliant R à $-R$).

- (g) Calculer $\text{Log}(i)$ pour cette détermination du logarithme puis déterminer $\text{Res}(g, ia)$.

J'ai fait une erreur dans l'énoncé, l'intervalle pour la définition du logarithme était $]-\pi/2, 3\pi/2[$. Ça n'a pénalisé presque personne heureusement, et le cas échéant, je n'ai pas enlevé de points.

Comme $i = e^{i\pi/2}$ et $\pi/2 \in]-\pi/2, 3\pi/2[$, on trouve $\text{Log}(i) = i\pi/2$. Par suite, on trouve $\text{Res}(g, ia) = \frac{\ln(a) + \text{Log}(i)}{2ia} = \frac{\ln(a) + i\pi/2}{2ia}$.

- (h) Montrer que $J = \frac{\pi}{2a} \text{Log}(a)$.

Attention ! Contrairement à la question e, la fonction n'est pas paire ici ! On a

$$2i\pi \text{Res}(g, ia) = \int_{\delta_{R, \epsilon}} g(z) dz = \int_{\epsilon}^R (g(x) + g(-x)) dx + \int_0^\pi ie^{i\theta} Rg(Re^{i\theta}) d\theta - \int_0^\pi ie^{i\theta} \epsilon g(\epsilon e^{i\theta}) d\theta.$$

Les deux dernières intégrales valent $\int_0^\pi ie^{i\theta} R \frac{\ln(R) + i\theta}{a^2 + R^2 e^{2i\theta}} d\theta$ et $\int_0^\pi ie^{i\theta} \epsilon \frac{\ln(\epsilon) + i\theta}{a^2 + \epsilon^2 e^{2i\theta}} d\theta$. D'après le théorème de convergence dominée, on voit que les deux ont pour limite 0 quand $R \rightarrow \infty$ et $\epsilon \rightarrow 0$.

De plus, si $x \in [\epsilon, R]$, on a $g(-x) = \frac{\text{Log}(xe^{i\pi})}{x^2 + a^2} = g(x) + \frac{i\pi}{x^2 + a^2}$. Ainsi, en passant à la limite, on obtient

$$\frac{\pi \ln(a)}{a} + i \frac{\pi^2}{2a} = 2J + i\pi I.$$

En identifiant parties réelles et imaginaires, on trouve bien $J = \frac{\pi \ln(a)}{2a}$.

Exercice 3. Dans cet exercice, on veut montrer l'identité

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2\cos(\theta)} d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2}.$$

- (a) Question de cours : Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant 0 et f une fonction holomorphe sur $U \setminus \{0\}$. Rappeler les trois types de singularité possibles pour f en 0 et donner à chaque fois une caractérisation (par exemple la forme du développement en série de Laurent ou la limite de $|f(z)|$ en 0). Donner ensuite la définition du résidu de f en 0.

- (b) Soit f la fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ définie par $f(z) = \frac{e^{z+1/z}}{z}$. Quel est le type de la singularité de f en 0 ?

C'est une singularité essentielle. En effet, on peut voir que $|f|$ n'a pas de limite en 0, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(1/n) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(-1/n) = 0$.

- (c) Grâce au développement en série de Laurent de f en 0, calculer $\text{Res}(f, 0)$. *Note : comme on veut juste calculer le coefficient d'indice -1 (celui devant la puissance z^{-1}), on n'a pas besoin de tout développer. Il faut juste bien repérer quels facteurs vont donner une puissance z^{-1} .*

Il suffit de développer en série e^z et $e^{1/z}$. Le développement en série de Laurent de f en 0 s'écrit alors comme un produit de Cauchy

$$\frac{1}{z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!(k-n)!} z^n.$$

Comme on a un $\frac{1}{z}$ devant la somme, c'est le coefficient correspondant à $n = 0$ qui nous intéresse. On trouve

$$\text{Res}(f, 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k!)^2}.$$

- (d) En faisant un changement de variables $z = e^{i\theta}$, se ramener à une intégrale sur le cercle et appliquer le théorème des résidus pour montrer l'égalité de l'énoncé.

On a $\cos(\theta) = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$, donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2\cos(\theta)} d\theta &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} e^{e^{i\theta} + e^{-i\theta}} i e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) i e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(0,1)} f(z) dz \\ &= \text{Res}(f, 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k!)^2}. \end{aligned}$$