

La question du jour

Statut des potentiels en électromagnétisme classique

L'effet Aharonov-Bohm montre qu'on a un effet physique lié au potentiel vecteur (plus précisément à sa circulation le long d'une courbe fermée), ce qui est souvent interprété par un changement de statut du potentiel vecteur en mécanique quantique.

Alain, se souvenant de ses cours de taupe, se demande si en mécanique classique, on peut se passer des potentiels et de tout exprimer en fonction des champs!

La question du jour

Statut des potentiels en électromagnétisme classique

L'effet Aharonov-Bohm montre qu'on a un effet physique lié au potentiel vecteur (plus précisément à sa circulation le long d'une courbe fermée), ce qui est souvent interprété par un changement de statut du potentiel vecteur en mécanique quantique.

Alain, se souvenant de ses cours de taupe, se demande si en mécanique classique, on peut se passer des potentiels et de tout exprimer en fonction des champs!

Question naïve symétrique : En géométrie différentielle, peut-on ignorer la connexion et tout exprimer en fonction de la courbure?

Interprétation physique des potentiels

Historique :

- Maxwell interprète physiquement les potentiels et notamment le potentiel vecteur comme le moment électromagnétique par unité de charge ('électro-cinétique')
- Heaviside (1886) et de nombreuses générations après lui considère que $\vec{A}$ est un intermédiaire de calcul sans signification physique. C'est la fonction dont le rotationnel donne le champ!

$\vec{E}$, $\vec{B}$ dans équations de Maxwell et force de Lorentz (champs physiques!)

dérivent des potentiels :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

« Redondance » de jauge

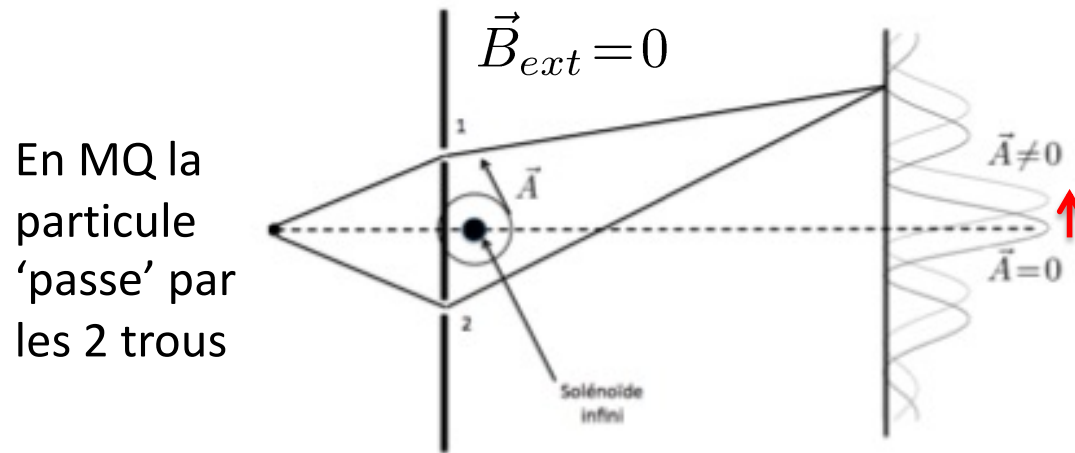
$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda$$

Et pourtant, seuls $\vec{A}$ et φ apparaissent dans le formalisme lagrangien et hamiltonien :

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - q(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A}), \quad H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\varphi \quad \text{avec} \quad \boxed{\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A}}$$

 $\frac{1}{2} m v^2$

- l'effet [Aharonov-Bohm](#) (1959) impose un retour à une interprétation physique de $\vec{A}$



Déplacement des franges d'interférences

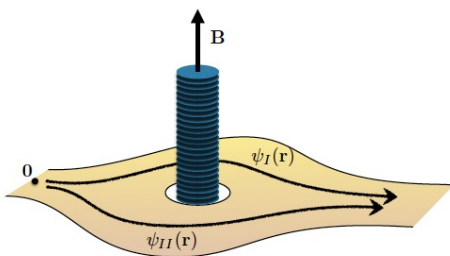
$$\Psi'_i(\vec{r}, t) = e^{i \frac{q}{\hbar} \int_0^{\vec{r}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}} \Psi_i(\vec{r}, t)$$

$i = 1, 2$ La phase dépend de $\vec{A}$

Bien que $\vec{B}_{ext}$ soit nul, la phase est modifiée, le déphasage dépend de la valeur de $\vec{B}$ à l'intérieur du solénoïde.

On a un effet physique lié à $\vec{A}$ mais de façon non locale! (aspect topologique)

Le potentiel apparaît 'plus' **fondamental** que le champ magnétique!



topologie non triviale : il existe un «trou » traversant l'espace!
(l'espace n'est pas simplement connexe)

$\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A}(\vec{r}_q)$ suggère d'interpréter $\vec{A}$ comme une impulsion (moment linéaire) d'origine électromagnétique par unité de charge

Pourquoi toutes ces réticences à interpréter physiquement $q\vec{A}$ alors qu'on accepte si facilement que $q\varphi$ soit une énergie potentielle?

Les 2 potentiels sont liés : relativité restreinte $p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p})$ $A^\mu = (\frac{\varphi}{c}, \vec{A})$

Précisons l'interprétation physique :

Quand on déplace une charge dans un champ depuis l'infini ($\varphi(\infty)=0$), $q\varphi(\vec{r})$ est l'énergie potentielle accumulée par la particule par son interaction avec le champ (travail de la force pour l'amener au point)

De même, $q\vec{A}(\vec{r})$ devrait être le moment accumulé par la particule!

$q\varphi$ et $q\vec{A}$ devraient être l'énergie et l'impulsion « échangeables » avec le champ

particule non-relativiste dans un champ lentement variable $\vec{E}_{app} = -\vec{\nabla}\varphi$

Jauge de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

L'énergie du champ électromagnétique

$$U_{em} = \int d^3r \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_{app} + \vec{E}_{part}, \quad \vec{B} \approx \vec{B}_{app}$$

$$U_{em}^{int} = \int d^3r (\varepsilon_0 \vec{E}_{app} \cdot \vec{E}_{part}) \quad \text{Énergie d'interaction entre la charge et le champ}$$

$$U_{em}^{int} = - \int d^3r \varepsilon_0 \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{E}_{part} = - \int d^3r \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot (\vec{E}_{part} \varphi) + \int d^3r \varepsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{part}) \varphi$$

Int. de surf. = 0

$$\vec{E}_{part}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^2} \quad \text{et}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{part} = \frac{q\delta(\vec{r} - \vec{r}_q)}{\varepsilon_0}$$

L'énergie d'interaction de la particule avec le champ dépend du potentiel

$$U_{em}^{int} = q\varphi(\vec{r}_q)$$

$$\vec{p}_{em} = \int \varepsilon_0 (\vec{E} \wedge \vec{B}) d^3r \quad \text{Contribution due à l'interaction charge/champ} \quad \vec{p}_{em}^{int} = \int \varepsilon_0 (\vec{E}_{part} \wedge \vec{B}_{appl}) d^3r$$

$$\vec{p}_{em}^{int} = \int \varepsilon_0 (\vec{B}_{appl} \wedge \vec{\nabla} \varphi_{part}) d^3r \quad \text{identité} \quad \vec{\nabla} \wedge (\varphi \vec{B}) = \varphi \vec{\nabla} \wedge \vec{B} + \vec{\nabla} \varphi \wedge \vec{B}$$

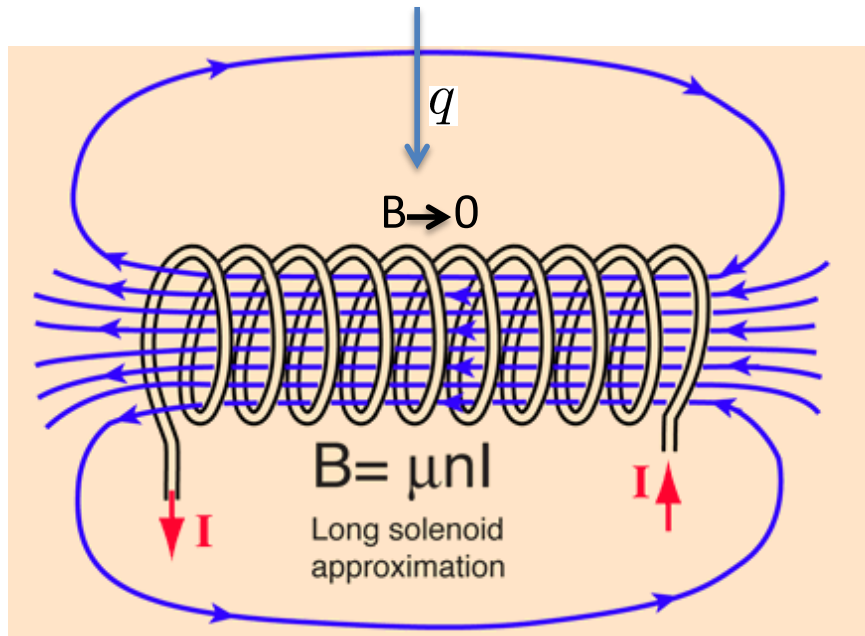
$$\vec{p}_{em}^{int} = \varepsilon_0 \int d^3r \varphi_{part} \vec{\nabla} \wedge \vec{B}_{appl} = \int d^3r \frac{q}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_q|} \mu_0 \vec{j}(\vec{r})$$

$$\vec{p}_{em}^{int} = q \int d^3r \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}_q|} = q \vec{A}(\vec{r}_q)$$

Remarque : l'énergie et le moment accumulés par l'interaction de la particule avec le champ dépendent des valeurs des potentiels au point où est la particule

mais on va voir que la relation est non locale avec les champs (intégration depuis l'infini!)

Interprétation physique de A : (même démarche que pour $q\varphi$ travail de la force en amenant une charge depuis l'infini)



On compense la force de Lorentz

$$\vec{F}_{ex} = -q\vec{v} \wedge \vec{B} \quad (\vec{v}dt = d\vec{\rho})$$

$$\vec{p}_{em} = \int_{+\infty}^R \vec{F}_{ex} dt = \int_{+\infty}^R \frac{q\mathcal{M}}{\rho^3} d\rho \vec{u}_\varphi$$

Impulsion accumulée au cours du transport de la charge et échangeable avec la particule

Pour calculer $\vec{p}_{em}$ on passe par le couple de $\vec{F}_{ex}$: $\mathcal{T}_z = \rho F_{ex} = \rho qvB$

$$L_z = \int \mathcal{T} dt = \int_{+\infty}^\rho qB(\rho')\rho' d\rho' = \frac{q\Phi}{2\pi}$$

Pour ρ près du solénoïde où $\vec{B} \sim 0$

Près du solénoïde $A_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi\rho}$



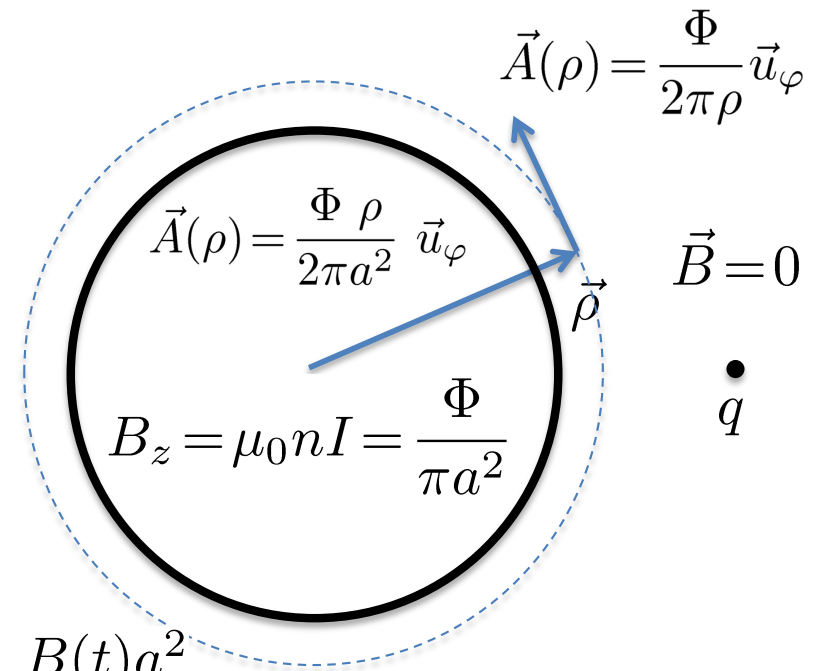
$$L_z = \rho q A_\varphi$$



$$\vec{p}_{em} = q\vec{A}(\vec{\rho}_q)$$

Caractère non local : intégration depuis l'infini

Pour un solénoïde infini, $B_{\text{ex}}=0$ et on ne peut pas calculer l'impulsion accumulée en apportant une charge de l'infini. Mais, quand on coupe le courant dans le solénoïde, on a un champ électrique induit et on doit appliquer une force extérieure pour compenser la force d'induction :



$$F_{ex} = -qE_{\varphi}(t) = q \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial t} = \frac{qa^2}{2\rho} \frac{\partial B}{\partial t} \quad A_{\varphi}(\rho, t) = \frac{B(t)a^2}{2\rho}$$

$$\vec{\mathcal{T}}_{ex} = \rho F_{ex} \vec{u}_z = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{En intégrant} \quad 0 - L_z(B) = \int (\mathcal{T}_{ex})_z dt = \int_B^0 q\rho \frac{a^2}{2\rho} dB$$

$$L_z(B) = \rho \frac{qBa^2}{2} = \frac{q\Phi}{2\pi\rho} = \rho q A_{\varphi}$$



$$\vec{p}_{em} = q\vec{A}(\vec{\rho}_q)$$

« Paradoxe » du disque de Feynman (1963) :

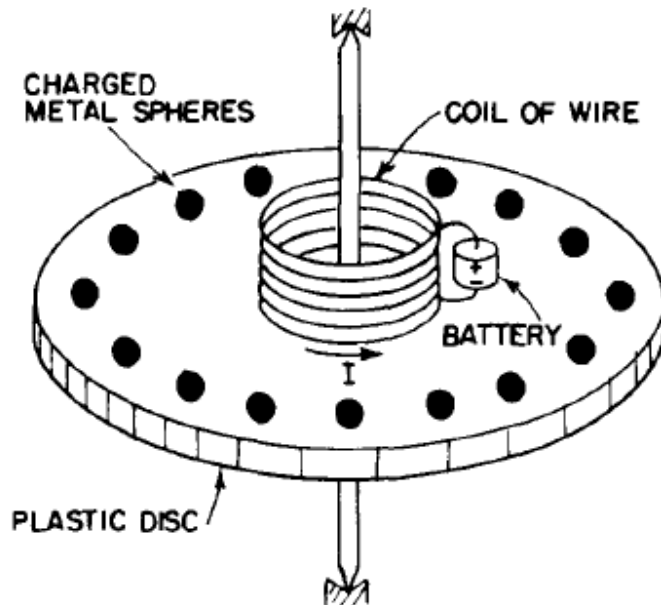


Fig. 17-5. Will the disc rotate if the current I is stopped?

The Feynman's lectures

interprétation du **potentiel vecteur**

Le disque se met à tourner lorsqu'on coupe le courant



$$\frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \neq 0 \quad \rightarrow \quad \vec{F} = q\vec{E}_{ind}$$

Symétrie cylindrique

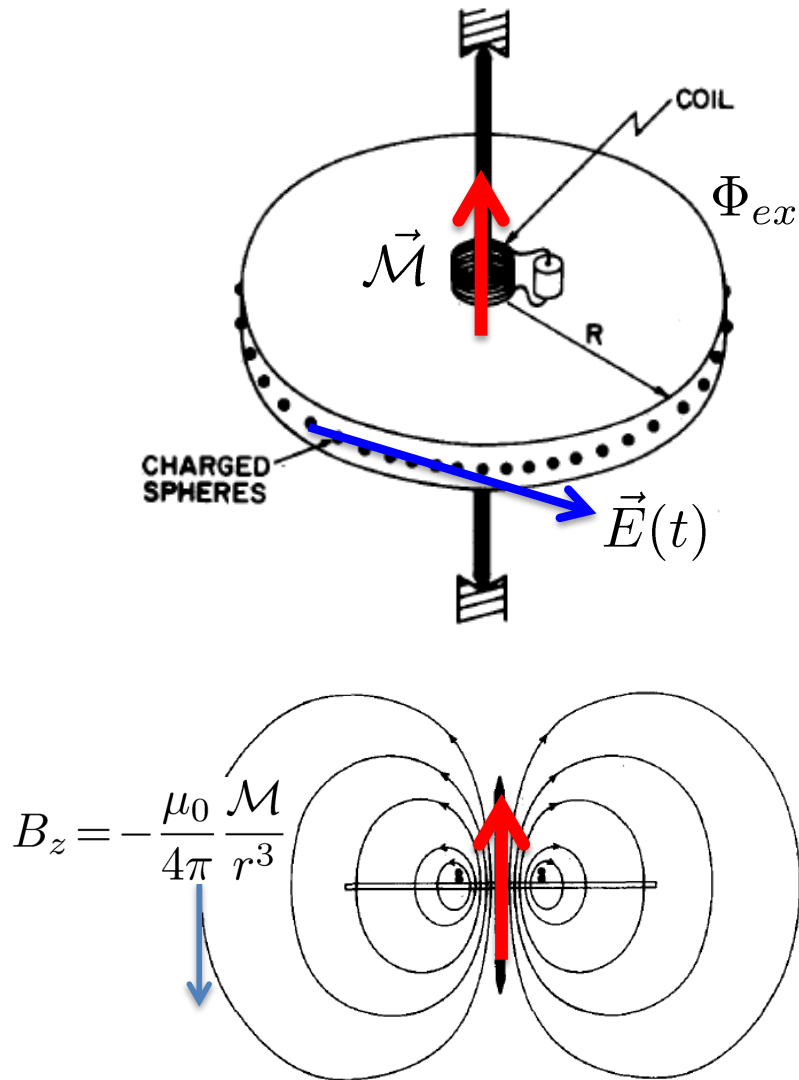
$$L_z = \text{const} \quad \text{????}$$

Solénoïde infini

$$\vec{B}_{ext}(t) = 0$$

$$\vec{E}_{ind} = \text{????}$$

Retour sur le problème du disque de Feynman



On coupe le courant dans la bobine lentement pour que les expressions quasi-statiques soient valables.

$$\Phi_D = - \int_{ext} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_R^{+\infty} \frac{\mathcal{M}}{r^3} 2\pi r dr = \frac{2\pi\mathcal{M}}{R}$$

Loi de Faraday :

$$\oint_C \vec{E}(t) \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d\Phi_D}{dt} = - \frac{2\pi}{R} \frac{d\mathcal{M}}{dt}$$

$$E(t) = - \frac{1}{R^2} \frac{d\mathcal{M}}{dt}, \quad \mathcal{T}_z = (QE)R = - \frac{Q}{R} \frac{d\mathcal{M}}{dt}$$

Moment
angulaire

$$L_z = \int_0^{+\infty} \mathcal{T}_z dt = \frac{\mathcal{M}Q}{R}$$

Le disque se met à tourner. Mais d'où vient le moment angulaire?

Il provient du champ électromagnétique!

En effet, chaque charge sur le disque a emmagasiné une impulsion $\vec{p}_{em}^{int} = q\vec{A}(\vec{r}_q)$

D'où un moment angulaire total : $L_{em}^{int} = R \times QA(R)$

Lorsque le courant est coupé, le moment angulaire d'origine électromagnétique se transforme en moment angulaire mécanique et le disque tourne!

Remarque : on a une symétrie cylindrique, L_z est conservé.

$$L_z = L_z^{em} + L_z^{mec} = c^{st}$$

Initial : $L_z = L_z^{em}$

Disque immobile mais moment dans le champ

final : $L_z = L_z^{mec}$

Disque tourne et pas de moment dans le champ

Dans la jauge cylindrique L_z est conservé quand on applique le champ, dans une autre jauge non!

$$L_z = rmv = r(mv' + qA) \qquad \Delta v = v' - v = -\frac{qA}{m} \qquad \text{Charge accélérée application de B}$$

Le potentiel vecteur (scalaire) est-il mesurable? (Question absurde?)

- $\vec{A}$ n'est pas invariant de jauge et pour un champ magnétique donnée, on a une infinité de potentiels vecteurs possibles!

- Dans la jauge « symétrique », $q\vec{A}$ est l'impulsion accumulée par l'interaction avec le champ et peut être mesurée par une variation de vitesse.

Parmi tous les choix de jauge, la jauge possédant la symétrie des sources du champ électromagnétique est particulière (sens physique + mesurable)

CONCLUSION Dans la jauge qui a la symétrie du système, $q\vec{A}$ et $\vec{r} \wedge q\vec{A}$ sont l'impulsion et le moment angulaire du champ échangeable avec la particule

Généralement il est convenu de distinguer deux types de grandeur :

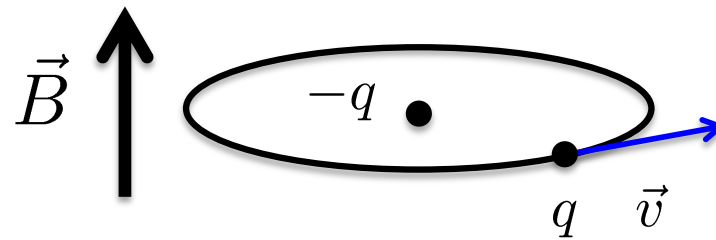
- des grandeurs invariantes de jauge $\vec{B}, m\vec{v}, \vec{r} \wedge m\vec{v}$
- des grandeurs dépendant du choix de jauge $\vec{A}, \vec{p}, \vec{r} \wedge \vec{p}$

seules les grandeurs invariantes de jauge sont des grandeurs physiques véritables!

???

MAIS...

Ils existent **des invariants liés à la symétrie** qui ne sont **pas invariants de jauge**!



Jauge cylindrique $\vec{A} = \frac{\vec{B} \wedge \vec{r}}{2} \Rightarrow L_z$ invariant

Jauge de Landau $\vec{A} = Bx \vec{u}_y \Rightarrow L_z$ n'est pas invariant

$\vec{B} = 0, \vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}, H = \frac{p^2}{2m} + V(r)$

$\vec{B} \neq 0, \vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}, H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + V(r)$

$H_{paramag} = -\frac{q}{2m} \vec{L} \cdot \vec{B}$

$\vec{\mathcal{M}} = \frac{q}{2m} \vec{L}$
Moment magn.

Revenons sur les deux interprétations historiques :

Électromagnétisme de Heaviside-Hertz

i) Les potentiels sont des champs

auxiliaires définis à partir de $\vec{E}$ et $\vec{B}$, $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

ii) Indéfinis (transf. de jauge),

iii) pas mesurables physiquement

« Interprétation » de Riemann-Lorenz

Équation de Riemann pour le potentiel vecteur (idem pour potentiel scalaire)

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}$$

Équation de Lorenz (1867 bien avant la relativité et les travaux de Lorentz)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

On déduit les champs à partir des potentiels!

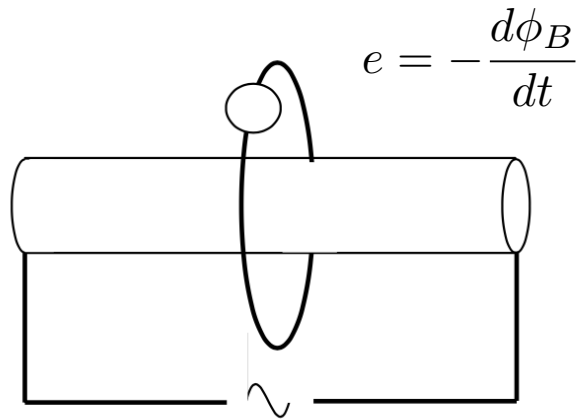


Figure 1 : L'expérience de Maxwell-Lodge

Solénoïde infini (on coupe suffisamment lentement le champ pour que les effets de rayonnement soient négligeable.

$$\vec{B}_{int}(t) \quad \text{mais} \quad \vec{B}_{ext} = 0$$

Localement :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

intégrale

$$e = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

Pour Maxwell, le potentiel vecteur est une quantité de mouvement électromagnétique par unité de charge

Comment un électron de la boucle « sait » que le champ varie dans le solénoïde?

- Action à distance?
- Quelle interaction locale?

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \longleftrightarrow \quad \vec{E} = -\frac{d\vec{A}}{dt}$$

Relation entre les effets Aharonov-Bohm et Maxwell-Lodge

Comme pour Maxwell-Lodge, deux interprétations de l'effet Aharonov-Bohm ont été proposées :

- i) Interprétation non locale : l'onde électronique « interagit » avec le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde (on a un caractère non local en mécanique quantique !)
- ii) La phase de l'onde électronique est sensible au potentiel vecteur, l'effet mesuré étant l'intégrale sur une boucle fermée (donc invariant de jauge!)

Feynman sur l'effet Aharonov-Bohm :

« Is it action at distance ? No $\vec{A}$ is as real as $\vec{B}$ realer whatever that means »

Les potentiels sont des quantités qui ont un effet même en mécanique classique et sont des quantités plus fondamentales que le champ électromagnétique!

Remarque sur la « symétrie » de Jauge (invariance de jauge)

The Meaning of Symmetry

E. P. Wigner

In: Gauge Interactions Theory and Experiment,
Proceedings of the 20th International School of Subnuclear Physics, August 3–14, 1982,
Erice, Trapani, Sicily, Italy (A. Zichichi, ed.). Plenum Press, New York 1984, pp. 729–733

Qu'appelle-t-on symétrie? Trois sens différents en physique!!!

-Symétrie des objets (cristaux, etc.)

-Plus important : la symétrie des lois physiques, ou plus précisément les invariances
mais Wigner accepte de les appeler symétries

-Mais Wigner n'est pas d'accord d'appeler symétrie les transformation de jauge!
Ce sont des transformations qui donnent des descriptions différentes du même système

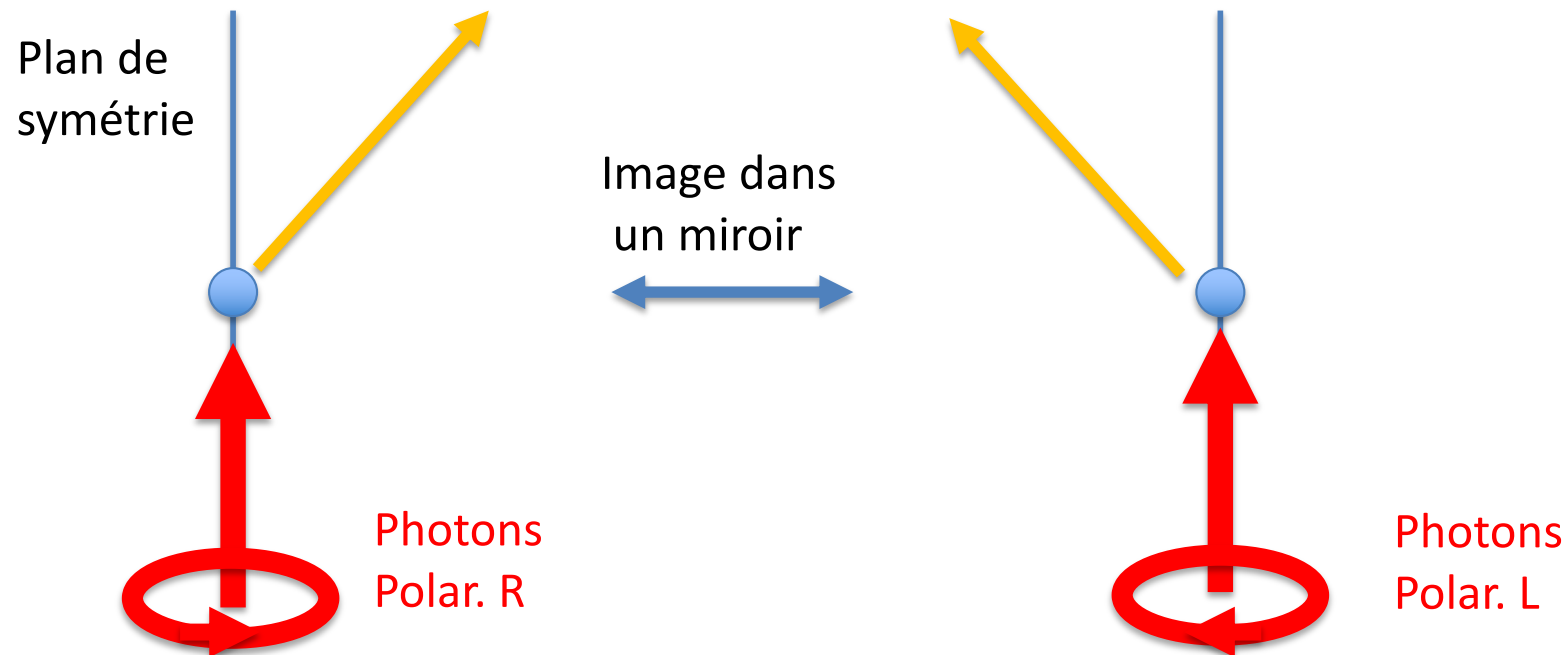
Wigner « n'aime » pas les équations avec des quantités non mesurables, il a essayé
de transformer l'équation de Dirac pour faire apparaître le champ électromagnétique
plutôt que les potentiels : ECHEC

Réponse de C.N. Yang

Yang déclare avoir pris conscience que, contrairement aux symétries des lois physiques, il n'est pas possible de concevoir un dispositif expérimental illustrant la symétrie associée à l'invariance de jauge !

Par ex, dans un pb à symétrie sphérique, si on a une trajectoire on peut déduire d'autres trajectoires possibles!

Ainsi si un dispositif expérimental mesure quelque chose on peut construire un autre dispositif expérimental transformé pour lequel on peut prédire le résultat



Peut-on imaginer un dispositif expérimental « transformé » par symétrie de jauge?

Non c'est le même! La symétrie de jauge est d'une autre nature qu'il est préférable d'appeler invariance de jauge!

Qu'est ce que l'invariance de jauge? C'est une sorte de symétrie qui nous dit comment les interactions sont formées!

Symmetry dictates interactions

Il y a des similitudes dans la structure mathématique de l'invariance de jauge avec les symétries standards mais physiquement c'est très différent!

Conclusion

Le traitement classique newtonien de l'électromagnétisme avec la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

est très limité (domaine non relativiste et non quantique).

Les potentiels sont des quantités physiques fondamentales

Théorie classique des champs :

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$\mathcal{L}_{Part} + \mathcal{L}_{Max} + \mathcal{L}_{int} = \mathcal{L}_{Part} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - j_\mu A^\mu$$

$$\mathcal{L}_{Max}(A_\nu, \partial_\mu A_\nu) = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$


Coordonnées, vitesses généralisées

Les équation d'Euler-Lagrange correspondantes donnent les équations de Maxwell

Quelques références :

J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, 3rd Ed. (John Wiley and Sons, New York, 1999).

M.D. Semon et J.R. Taylor, Am. J. Phys. 46, 499 (1996).

E.J. Konopinski, Am. J. Phys. 46, 499 (1978).

E.J. Konopinski, Electromagnetic fields and relativistic particles, Mac Grow Hill (1981).

R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, The Feynman lectures on physics, Addison-Wesley publishing company, (1963) vol.2 chapitre 17-4 et 27-6.

P.A.M. Dirac, Proceedings of the Royal Society, A133, 60 (1931).

Y. Aharonov et D. Bohm, Phys. Rev. 115, 485 (1959); Phys. Rev. 123, 1511 (1961).

T.T. Wu et C.N. Yang Phys. Rev. D 12, 3845 (1975)

A. Zangwill, Modern Electrodynamics, Cambridge university press (2012)

B. Berche, D. Malterre et E. Medina Am. J. Phys. 84, 616 (2016).

...

Why would an author prepare a new edition of a forty-odd year old physics book? The short answer is that only in the last few years, a century old problem has been solved. The classical dynamics of charged particles has now become a completed theory.

F. Rohrlich, classical charged particles, 3nd ed (2007).