

Le compactifié d'Alexandrov

Exercice 1 (Existence). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé localement compact (cad tout point admet un voisinage compact), mais non compact. On se donne un point $\omega \notin X$ et on pose $\hat{X} := X \cup \{\omega\}$. Soit $\mathcal{O}$ un sous-ensemble de $\hat{X}$: on dit que $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\hat{X}$ si

- (1) Soit $\mathcal{O} = \emptyset$,
 - (2) Soit $\mathcal{O}$ est un ouvert de X ,
 - (3) Soit il existe $K \subset X$ compact tel que $\mathcal{O} = (X \setminus K) \cup \{\omega\}$.
- Montrez que ceci définit une topologie sur $\hat{X}$
 - Montrez que, muni de cette topologie, $\hat{X}$ est compact. On dit que $\hat{X}$ est le compactifié d'Alexandrov de X .
 - Montrez que le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}$ peut être assimilé au cercle $\mathcal{C}$ de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 (Unicité). On reprend les notations et les hypothèses de l'exercice précédent. On se donne un espace topologique séparé $(Y, \mathcal{T}_Y)$ et $i : X \rightarrow Y$ tels que

- Y est compact
- $Y \setminus i(X)$ est réduit à un point, noté p ,
- $i : X \rightarrow Y \setminus \{p\}$ induit un homéomorphisme.

Montrez que i se prolonge en un homéomorphisme $\hat{X} \rightarrow Y$ qui envoie ω sur p . C'est en cela qu'on a unicité du compactifié d'Alexandrov.