

Circuits électriques monophasés

S. Dufour

2A Energie - ENRS8AB

10 avril 2026



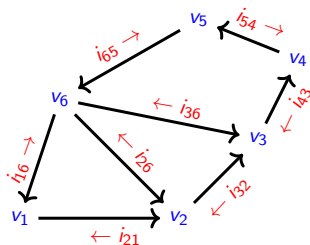
Objectifs de la séance

- Rappeler les éléments de culture commune sur les circuits électriques ;
- Faire apparaître (sans insister) qu'il existe des développements possibles de ces éléments ;
- Passer au régime monophasé en insistant sur les puissances électriques ;
- Rappeler/introduire le couplage inductif.

Structure de graphe

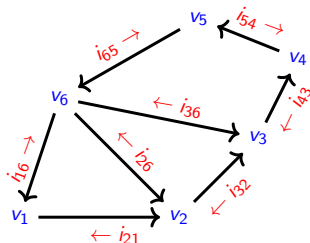
D'un point de vue mathématique, un circuit électrique est un graphe orienté :

- ➡ à chaque nœud k est fixée une valeur de potentiel électrique v_k
- ➡ chaque arête jk est parcourue par un courant électrique i_{jk}
le sens du courant est du nœud j vers le nœud k
- ➡ il existe une relation algébrique ou différentielle entre les courants de arêtes et les différences de potentiel aux bornes de ces arêtes



le graphe comporte $n = 6$ nœuds et $a = 8$ arêtes orientées (les arcs).

Structure de graphe



Les «courants à un nœud donné» sont les courants dont il est la provenance mais aussi ceux dont il est la destination, donc comptés négativement.
Par exemple les courants au nœud n° 3 sont : i_{32} , i_{36} et $-i_{43}$.

La «tension aux bornes d'une arête» ou «différence de potentiel» est

$$V_{nm} = V_n - V_m$$

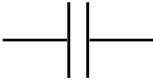
- ▶ **Loi des nœuds** : la somme des courants à un nœud du circuit électrique est nulle ;
- ▶ **Loi des mailles** : la somme des tensions aux bornes des arêtes le long d'un parcours fermé sur le circuit (une maille) est nulle.

La considération des potentiels aux nœuds (plutôt que celle de tensions des arêtes) permet de satisfaire automatiquement la 2ème loi de Kirchhoff.

Mais les relations entre tension et courant apparaissent entre différence de potentiel et courant dans les arêtes. De plus la loi aux nœuds reste à satisfaire.

La théorie des graphes permet de fournir des méthodes automatiques de paramétrisation des courants pour satisfaire la loi aux nœuds. Cette question ne sera pas traitée ici.

Idéographie des composants électriques passifs

nom du composant	nom du coefficient	Unité	symbole	relation
résistance (ou resistor)	résistance	Ω (Ohm)		$v = r i$
résistance	conductance	S (Siemens)		$i = g v$
autoinductance	inductance	H (Henry)		$v = \frac{d\Phi}{dt}$ avec $\Phi = L i$
condensateur	capacité	F (Farad)		$i = \frac{dq}{dt}$ avec $q = C v$

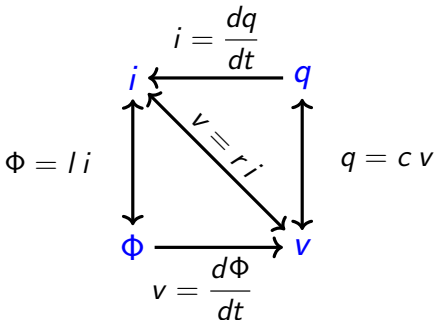
Deux quantités intermédiaires ont été introduites :

- le «flux magnétique» Φ dont l'unité est le Weber (Wb)
- la «charge électrique» q dont l'unité est le Coulomb (Cb).

L'unité de la «différence de potentiel» ou «tension aux bornes» abrégée en «tension» v est le Volt (V) et celle du courant électrique i l'Ampère (A).

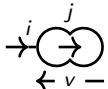
Diagramme de Chua

- Les relations linéaires (incluant l'opération de dérivation par rapport au temps) entre le courant et la tension sont figurées par les relations correspondant aux composants passifs.
- Il est intéressant de représenter ces relations sous la forme du diagramme



dans lequel chaque couple de variables de l'ensemble $\{q, i, \Phi, v\}$ sont connectées 2 à 2 ; à l'exception de q et Φ , liés par un composant imaginé par Chua, le «memristor», qui vérifierait $\Phi = m q$, hors cadre des objectifs de la séance.

Idéographie des composants électriques actifs

nom du composant	nom du coefficient	symbole	relation	donnée
générateur de tension	tension		$v = -e$	e
générateur de courant	courant		$i = j$	j

La tension source peut aussi être appelée une force électromotrice : le choix fait pour la relation entre le sens du courant et la tension e (convention générateur) est opposé à celui des composants passifs (convention récepteur, tension v).

Ces composants actifs sont une idéalisation de circuits électriques qui assurent leur fonction globale ; l'étude de ces circuits dépassant les objectifs de la leçon.

Systèmes monophasés : régime sinusoïdal établi

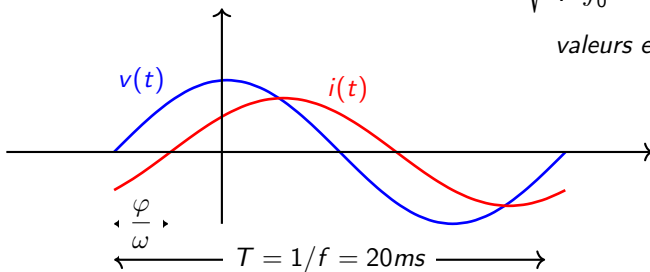


pulsation $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ $f = 50\text{Hz}$ fréquence $T = 20\text{ms}$ période

tension de phase : $v(t) = \sqrt{2} V \cos(\omega t)$ $\leadsto V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v(t)^2 dt}$ [V]

courant de phase : $i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t - \varphi)$ $\leadsto I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 dt}$ [A]

valeurs efficaces



Systèmes monophasés : grandeurs complexes

$$\sqrt{-1} = j = e^{j\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{j} = \frac{1}{j^*}$$

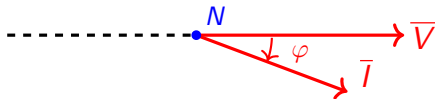
$$f = 50\text{Hz fréquence ; pulsation } \omega = 2\pi f$$

$$\text{tension de phase : } v(t) = \sqrt{2} V \cos(\omega t) = \sqrt{2} \Re \left[\bar{V} e^{j\omega t} \right]$$

$$\text{amplitude complexe : } \bar{V} = V \text{ origine des phases} \quad |\bar{V}| = V \text{ valeur efficace}$$

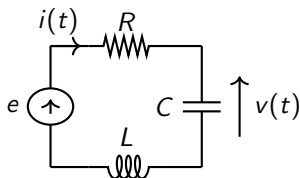
$$\text{courant de phase : } i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t - \varphi) = \sqrt{2} \Re \left[\bar{I} e^{j\omega t} \right]$$

$$\text{amplitude complexe : } \bar{I} = I e^{-j\varphi} \quad |\bar{I}| = I \text{ valeur efficace}$$

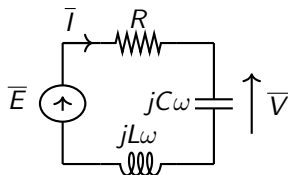


Systèmes monophasés : relations tension-courant

symbole	relation temporelle	symbole	relation complexe
R 	$v(t) = R i(t)$	R 	$\bar{V} = R \bar{I}$
L 	$v(t) = L \frac{di}{dt}$	$jL\omega$ 	$\bar{V} = jL\omega \bar{I}$
C 	$i(t) = C \frac{dv}{dt}$	$jC\omega$ 	$\bar{I} = jC\omega \bar{V}$



$$\begin{aligned}
 e(t) &= \sqrt{2} E \cos(\omega t) \\
 &= Ri + L \frac{di}{dt} + v \\
 i(t) &= C \frac{dv}{dt}
 \end{aligned}$$



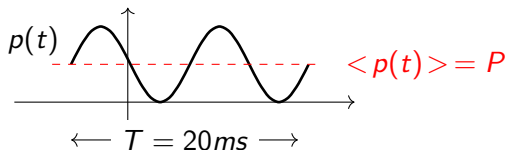
$$\begin{aligned}
 e(t) &= \sqrt{2} \Re e [\bar{E} e^{j\omega t}] \\
 \bar{E} &= (R + jL\omega) \bar{I} + \bar{V} \\
 \bar{I} &= jC\omega \bar{V}
 \end{aligned}$$

Systèmes monophasés : puissances

aux bornes de la source : $e(t) = \sqrt{2} E \cos(\omega t) = \sqrt{2} \Re \left[\bar{E} e^{j\omega t} \right]$
 $i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t - \varphi) = \sqrt{2} \Re \left[\bar{I} e^{j\omega t} \right]$

puissance instantanée :

$$\begin{aligned} p(t) = e(t) i(t) &= \underbrace{E I \cos \varphi}_{\text{puissance active}} + \underbrace{E I \cos(2\omega t - \varphi)}_{\text{puissance fluctuante}} \\ &= \Re[\bar{E} \bar{I}^*] + \Re[\bar{E} \bar{I} e^{j2\omega t}] \end{aligned}$$



Puissance active : $P = \langle p(t) \rangle = \Re[\bar{E} \bar{I}^*] \quad [\text{W}]$

Puissance fluctuante : $p_f(t) = p(t) - \langle p(t) \rangle = \Re[\bar{E} \bar{I} e^{j2\omega t}] \quad [\text{W}]$

Systèmes monophasés : puissances

$$e(t) = \sqrt{2} \Re \left[\bar{E} e^{j\omega t} \right] = \sqrt{2} \Re \left[E e^{j\omega t} \right]$$

aux bornes de la source :

$$i(t) = \sqrt{2} \Re \left[\bar{I} e^{j\omega t} \right] = \sqrt{2} \Re \left[I e^{-j\varphi} e^{j\omega t} \right]$$

puissance apparente complexe :

$$\bar{S} = \bar{E} \bar{I}^* = \underbrace{\Re[\bar{E} \bar{I}^*]}_{\text{puissance active}} + j \underbrace{\Im[\bar{E} \bar{I}^*]}_{\text{puissance réactive}} = P + j Q$$

$$\text{Puissance active :} \quad P = \Re[\bar{E} \bar{I}^*] = EI \cos \varphi \quad [W]$$

$$\text{Puissance réactive :} \quad Q = \Im[\bar{E} \bar{I}^*] = EI \sin \varphi \quad [Var]$$

$$\text{Puissance apparente :} \quad |\bar{S}| = |\bar{E}| |\bar{I}| = EI \quad [VA]$$

$$\text{Facteur de puissance :} \quad FP = \frac{P}{|\bar{S}|} = \cos \varphi$$

Puissances : application au circuit $R - L - C$ série

$$\bar{E} = (R + jL\omega)\bar{I} + \bar{V} \quad \bar{I} = jC\omega\bar{V} \quad \leadsto \bar{E} = \left(R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right) \bar{I}$$

$$\bar{S} = \bar{E}\bar{I}^* = \left(R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right) |\bar{I}|^2 = \frac{R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) |\bar{E}|^2}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}$$

$$P = \Re \left[\bar{E}\bar{I}^* \right] = R|\bar{I}|^2 \quad Q = \Im \left[\bar{E}\bar{I}^* \right] = \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) |\bar{I}|^2$$

- si $R = 0$ la puissance active que doit fournir la source est nulle ;
- si $L \longrightarrow 0$ et $C \longrightarrow \infty$ la puissance réactive que doit fournir la source est nulle ;
- si $LC\omega^2 = 1$ la puissance réactive que doit fournir la source est nulle ; c'est la condition de résonance ;

★ *impédance* : $\bar{Z}$ $\bar{E} = \left(R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right) \bar{I} = \bar{Z} \bar{I}$

$$\bar{S} = \bar{E} \bar{I}^* = \bar{Z} |\bar{I}|^2 = |\bar{E}| |\bar{I}| e^{j\varphi} \quad \leadsto \varphi = \arg(\bar{Z})$$

$$P = \Re \left[\bar{E} \bar{I}^* \right] = \Re(\bar{Z}) |\bar{I}|^2 \quad Q = \Im \left[\bar{E} \bar{I}^* \right] = \Im(\bar{Z}) |\bar{I}|^2$$

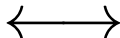
★ *admittance* : $\bar{Y}$ $\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\left(R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right)} = \bar{Y} \bar{E}$

$$\bar{S} = \bar{E} \bar{I}^* = \bar{Y}^* |\bar{E}|^2 = |\bar{E}| |\bar{I}| e^{j\varphi} \quad \leadsto \varphi = -\arg(\bar{Y})$$

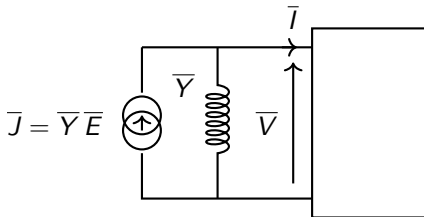
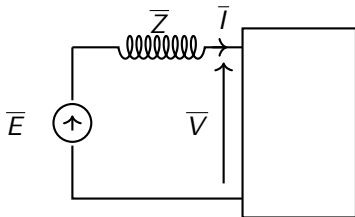
$$P = \Re \left[\bar{E} \bar{I}^* \right] = \Re(\bar{Y}) |\bar{E}|^2 \quad Q = \Im \left[\bar{E} \bar{I}^* \right] = -\Im(\bar{Y}) |\bar{E}|^2$$

Equivalence Thévenin-Norton

Source de tension

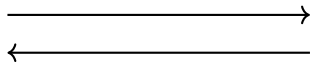


Source de courant



$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} \quad \bar{J} = \bar{Y} \bar{E}$$

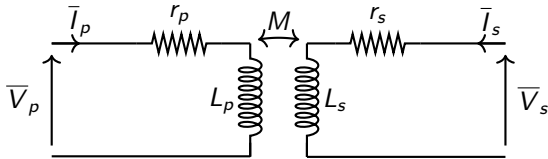
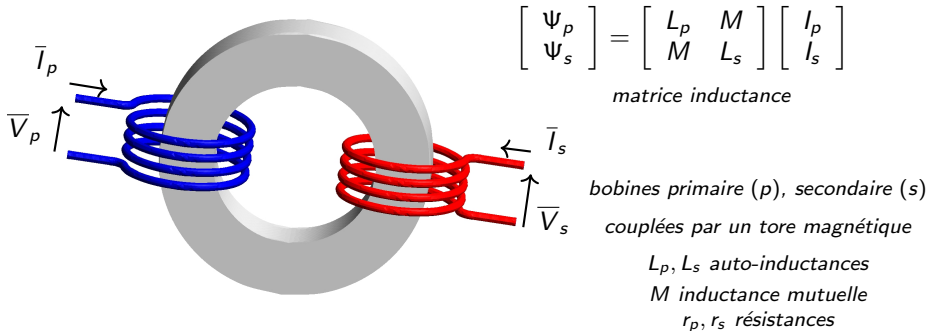
$$\bar{V} = \bar{E} - \bar{Z} \bar{I}$$



$$\bar{I} = \frac{\bar{E} - \bar{V}}{\bar{Z}} = \bar{J} - \bar{Y} \bar{V}$$

$$\bar{E} = \bar{Z} \bar{J} \quad \bar{Z} = \frac{1}{\bar{Y}}$$

Couplage Inductif



$$\begin{bmatrix} \bar{V}_p \\ \bar{V}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_p + jL_p\omega & jM\omega \\ jM\omega & r_s + jL_s\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_p \\ \bar{I}_s \end{bmatrix}$$

schéma équivalent

graphe connexe à n nœuds, a arêtes

★ inconnues

$[\bar{i}_a], [\bar{v}_a]$ dans les arêtes : $2a$ inconnues

★ équations

loi des nœuds : $n - 1$ équations

loi des mailles : $a - (n - 1)$ équations

relations tension-courant dans les arêtes : a équations

Détermination des courants

données :

$[\bar{e}_s]$ sources de tension

$[\bar{Z}]$ matrice impédance

$$\leadsto [\bar{v}_a] = [\bar{Z}][\bar{i}_a] - [\bar{e}_s]$$

a inconnues $[\bar{i}_a]$

loi des nœuds :

$n - 1$ équations

$a - (n - 1)$ inconnues sur $[\bar{i}_a]$

Détermination des tensions

données :

$[\bar{i}_s]$ sources de courant

$[\bar{Y}]$ matrice admittance

$$\leadsto [\bar{i}_a] = [\bar{Y}][\bar{v}_a] - [\bar{i}_s]$$

a inconnues $[\bar{v}_a]$

loi des mailles :

$a - (n - 1)$ équations

$n - 1$ inconnues sur $[\bar{v}_a]$

Résolution de circuits électriques : en tension

graphe connexe à n nœuds, a arêtes

loi des mailles $\leadsto n - 1$ tensions d'arêtes inconnues

exprimer les tensions d'arêtes $\bar{v}_a$ en fonction des tensions des nœuds $\bar{v}$

★ $[\bar{v}_a] = [A][\bar{v}]$ matrice d'incidence arête-nœud

tensions de nœud : 1 nœud référence, $n - 1$ inconnues

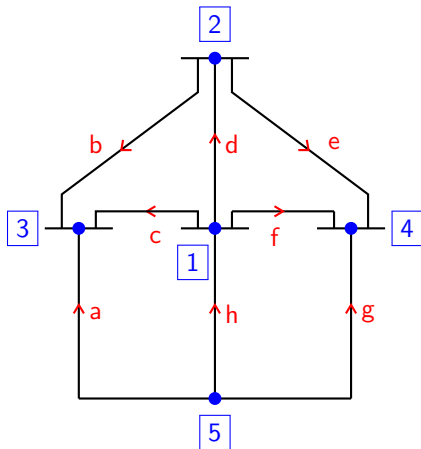
★ relations tension/courant : $[\bar{i}_a] = [\bar{Y}][\bar{v}_a] - [\bar{i}_s]$

★ loi des nœuds : $[A]^t [\bar{i}_a] = 0$

Résolution du système à $n - 1$ inconnues : tensions de nœuds $[\bar{v}]$

$$[\bar{v}] = ([A]^t [\bar{Y}] [A])^{-1} ([A]^t [\bar{i}_s])$$

Construction de la matrice $[A]$



$$[\bar{v}_a] = [A] [\bar{v}]$$

$$\bar{v}_a = \bar{v}_3 - \bar{v}_5$$

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_a \\ \bar{v}_b \\ \bar{v}_c \\ \bar{v}_d \\ \bar{v}_e \\ \bar{v}_f \\ \bar{v}_g \\ \bar{v}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \\ \bar{v}_4 \\ \bar{v}_5 \end{bmatrix}$$



$$\text{vérification : } -\bar{i}_c - \bar{i}_d - \bar{i}_f + \bar{i}_h = 0$$

$$[A]^t [\bar{i}_a] = 0 \quad \leftarrow \quad \text{loi des nœuds en 1}$$

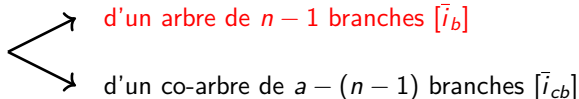
Résolution de circuits électriques : en courant

graphe connexe à n nœuds, a arêtes

loi des nœuds $\leadsto a - (n - 1)$ courants d'arêtes inconnues

trouver systématiquement les $a - (n - 1)$ inconnues

définition



arbre = former une liaison entre tous les nœuds sans faire de maille

les courants des branches sont fonction des courants du co-arbre

Résolution de circuits électriques : en courant

loi des nœuds $\leadsto a - (n - 1)$ courants du co-arbre inconnus

exprimer les courants $\bar{i}_a$ en fonction des courants du co-arbre $\bar{i}_{cb}$

★ $[\bar{i}_a] = [C][\bar{i}_{cb}]$ matrice d'incidence branche-maille

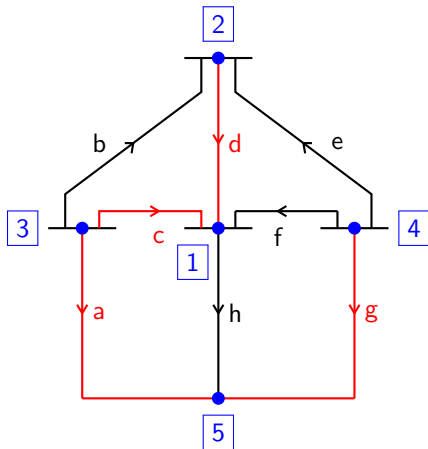
★ relations tension/courant : $[\bar{v}_a] = [\bar{Z}][\bar{i}_a] - [\bar{e}_s]$

★ loi des mailles : $[C]^t [\bar{v}_a] = [0]$

Résolution du système à $a - (n - 1)$ inconnues : courants du co-arbre $[\bar{i}_{cb}]$

$$[\bar{i}_{cb}] = ([C]^t [\bar{Z}] [C])^{-1} ([C]^t [\bar{e}_s])$$

Construction de la matrice $[C]$



— arbre
— co-arbre

$$[\bar{i}_a] = [C] [\bar{i}_{cb}]$$

$$\bar{i}_d = \bar{i}_b + \bar{i}_e$$

$$\begin{bmatrix} \bar{i}_a \\ \bar{i}_b \\ \bar{i}_c \\ \bar{i}_d \\ \bar{i}_e \\ \bar{i}_f \\ \bar{i}_g \\ \bar{i}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}_b \\ \bar{i}_e \\ \bar{i}_f \\ \bar{i}_h \end{bmatrix}$$

↓

$$[C]^t [\bar{v}_a] = 0 \quad \leftarrow \quad \text{vérification : } \bar{v}_b - \bar{v}_c + \bar{v}_d = 0$$

loi des mailles (entre les nœuds 1 – 2 – 3)