

MODÉLISATION STATISTIQUE DE LA TURBULENCE

Rémi Manceau

Laboratoire d'études aérodynamiques
UMR 6609 CNRS/Université de Poitiers/ENSMA
SP2MI, Téléport 2, Bd Marie et Pierre Curie, BP 30179
86 962 Futuroscope Chasseneuil cedex, France

remi.manceau@lea.univ-poitiers.fr

10^e école de mécanique des fluides numérique

Roscoff, 3–6 juin 2007

Ce cours est téléchargeable à l'adresse :

<http://labo.univ-poitiers.fr/informations-lea/Ecole-MFN-2007/Index.html>

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Rappel : les équations de Navier–Stokes	4
1.2	La décomposition de Reynolds	7
1.3	Le problème de fermeture	9
1.4	Un rapide survol historique des différents types de modèles	11
2	Principes généraux	17
2.1	Principe de fermeture	18
2.2	Homogénéité dimensionnelle	18
2.3	Complétude	20
2.4	Objectivité	21
2.5	Réalisabilité	23
2.6	Universalité	32
2.7	Cohérence avec les résultats connus	32
2.8	Robustesse numérique	35
3	Fermeture au premier ordre	41
3.1	Loi de comportement	41
3.2	Modèles à une équation de transport	45
3.3	Les modèles $k-\varepsilon$	48
3.4	Bilan des avantages et défauts des modèles au premier ordre	53
3.5	Propositions d’amélioration du modèle $k-\varepsilon$ standard	57
4	Fermeture au second ordre	63
4.1	Équations de transport	63
4.2	Le terme de redistribution	65
4.3	Modélisation des termes de transport turbulent	74
4.4	Modélisation du tenseur de dissipation	75
4.5	Conclusions sur les modèles au second ordre	76

5	Les modèles algébriques explicites	77
5.1	Hypothèses de base de la modélisation algébrique	77
5.2	Méthodologie algébrique explicite	78
6	La région de proche paroi	81
6.1	Rappel : le comportement « universel » en proche paroi	83
6.2	Notions de « haut-Reynolds » et « bas-Reynolds »	88
6.3	Les lois de paroi	88
6.4	Modèles bas-Reynolds	91
6.5	Modèles à deux couches	93
6.6	Modèle SST	93
6.7	La relaxation elliptique	94
7	Modélisation thermique	99
7.1	Équations instantanées	99
7.2	Décomposition de Reynolds	100
7.3	La convection forcée	101
7.4	Convection mixte ou naturelle	103
7.5	Équations de transport des flux thermiques turbulents	106
7.6	Modélisation des termes inconnus	108
7.7	Remarques sur la région de proche paroi	110

Chapitre 1

Introduction

La turbulence est un phénomène omniprésent, d'une grande importance : la très grande majorité des écoulements rencontrés par un ingénieur sont turbulents. De plus, comme il s'agit d'un phénomène très complexe, impliquant une large gamme d'échelles de longueur et de temps, la résolution numérique des équations de Navier-Stokes (DNS) est très chère en terme d'espace mémoire et de temps CPU : les hypothèses de Kolmogorov conduisent aux ordres de grandeurs suivant :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Espace mémoire nécessaire} \propto Re^{9/4} \\ \text{Temps de calcul} \propto Re^3 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{avec } Re \text{ entre } 10000 \text{ et} \\ \text{plusieurs centaines de millions} \end{array}$$

Une utilisation industrielle de la DNS d'écoulements à très haut Reynolds (de type voiture ou avion) ne sera pas accessible avant la fin du 21^e siècle, en faisant l'hypothèse que l'augmentation de la puissance des ordinateurs continuera à suivre le même rythme que durant les dernières décennies. Le tableau 1.1, reproduit de Spalart (1999) [43], donne une évaluation de la disponibilité des différentes méthodes pour des applications industrielles de type aérodynamique externe. Dans ce tableau, LES désigne la simulation des grandes échelles avec lois de parois, tandis que QDNS (Quasi-DNS) désigne la simulation des grandes échelles avec résolution fine de la turbulence de proche paroi.

Le but de la modélisation de la turbulence est donc de remplacer les équations de Navier-Stokes par un modèle, de manière à satisfaire les contraintes suivantes :

- ✓ La résolution du système d'équations (le modèle) doit être la moins chère possible : le calcul en une nuit est réclamé pour les études paramétriques et encore plus court pour l'optimisation.
- ✓ Le modèle doit être prédictif : on ne doit avoir besoin que des conditions de l'écoulement et donc n'avoir besoin d'aucune connaissance a priori de la solution.
- ✓ Le modèle doit, évidemment, représenter au mieux la physique de l'écoulement.
- ✓ Le modèle doit donner les quantités utiles :
 - ↪ au minimum des grandeurs globales : forces exercées sur les obstacles (trainée, portance), transferts thermiques entre fluides et solides, mélange d'un polluant, *etc.* ;

Stratégie	Dépendance en Re	Maillage	Pas de temps	Disponible en
RANS	faible	10^7	10^3	1985
LES	faible	$10^{11.5}$	$10^{6.7}$	2045
QDNS	fort	10^{15}	$10^{7.3}$	2070
DNS	fort	10^{16}	$10^{7.7}$	2080

TAB. 1.1 – Évaluation des stratégies de calcul et de leur disponibilité pour des applications industrielles coûteuses (type aérodynamique automobile ou aéronautique). D’après Spalart (1999) [43]

- ↪ très souvent les variations de ces grandeurs avec les paramètres (vitesse, écart de température, paramètre de forme), ce qui permet notamment l’optimisation d’un système ;
- ↪ mais aussi la position des décollements de couches limites, champ de pression à la paroi, structure de l’écoulement, position des chocs, sources acoustiques, *etc.* ;
- ↪ et de plus en plus : réponse à l’application d’une stratégie de contrôle (soufflage, aspiration, MEMS, *etc.*).

La modélisation de la turbulence est donc la science qui consiste à construire ces modèles, dans le but de leur utilisation par les ingénieurs. Cette science est à la recherche d’un but inaccessible : fournir un modèle simple, peu coûteux et fiable dans toutes les situations...

1.1 Rappel : les équations de Navier–Stokes

Bien que les équations de base utilisées en mécanique de fluides newtonien soient bien connues, il est utile de les rappeler ici car la manière de les établir est très similaire à ce qui sera fait plus loin en modélisation de la turbulence. On peut résumer la démarche en trois étapes :

- ✓ écriture des équations de conservation ;
- ✓ fermeture du système à l’aide de lois de comportement, qui introduisent des *variables d’état* qui permettent de décrire l’état macroscopique du fluide en un point donné et à un instant donné ;
- ✓ écriture de lois d’état qui permettent de décrire ces variables d’état.

Dans ce cours, les grandeurs instantanées seront notées à l’aide d’une étoile (f^*), car la notation f est conservée pour les grandeurs fluctuantes et F pour les grandeurs moyennes (moyenne de Reynolds). Les équations les plus générales pour un fluide homogène s’écrivent alors :

- ✓ Conservation de la masse (continuité) :

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \frac{\partial \rho^* u_i^*}{\partial x_i} = 0 \quad (1.1)$$

- ✓ Conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \rho^* u_i^*}{\partial t} + \frac{\partial \rho^* u_i^* u_j^*}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial x_j} + \rho^* g_i \quad (1.2)$$

✓ Conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial \rho^* e^*}{\partial t} + \frac{\partial \rho^* u_i^* e^*}{\partial x_i} = \sigma_{ij}^* s_{ij}^* + \frac{\partial}{\partial x_i} \gamma_i \quad (1.3)$$

Ces équations décrivent le comportement du fluide à l'échelle macroscopique, quel que soit le type de fluide. Cependant, on peut voir qu'il contient 14 inconnues :

- ✓ la masse volumique ρ^* ;
 - ✓ les trois composantes de la vitesse u_i^* ;
 - ✓ les six composantes indépendantes du tenseur des contraintes σ_{ij}^* (tenseur symétrique) ;
 - ✓ l'énergie interne e^* ;
 - ✓ et les trois composantes du flux de chaleur γ_i ,
- pour seulement 5 équations.

Pour fermer ce système, il faut introduire des lois de comportement, qui décrivent les propriétés du fluide (et sont donc dépendantes du fluide). Un fluide est dit *newtonien*, s'il peut être décrit par des lois linéaires donnant :

- ✓ le tenseur des contraintes σ_{ij}^* en fonction de la déformation s_{ij}^* (loi de Newton) :

$$\sigma_{ij}^* = \left(-p^* + \lambda \frac{\partial u_l^*}{\partial x_l} \right) \delta_{ij} + 2\mu s_{ij}^* \quad (1.4)$$

où $s_{ij}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \right)$, et δ_{ij} est le tenseur identité (symbole de Kronecker),

- ✓ et le flux de chaleur γ_i en fonction du gradient de température (loi de Fourier) :

$$\gamma_i = k \frac{\partial T^*}{\partial x_i} \quad (1.5)$$

Ces lois de comportement fournissent bien les 9 équations manquantes, mais introduisent, outre des propriétés du fluide (viscosité dynamique μ et secondaire λ , conductivité k), les deux variables d'état (pression p^* et température T^*) qui permettent de décrire l'état du fluide au point et à l'instant considéré (c'est-à-dire de décrire à l'échelle macroscopique les propriétés de l'agitation moléculaire). Il est donc nécessaire de se donner des relations supplémentaires, dites *lois d'état*, qui permettent d'obtenir l'évolution de ces variables d'état. On écrira par exemple pour un gaz parfait :

$$de^* = C_v dT^* \quad (1.6)$$

et

$$p^* = \rho^* r T^* \quad (1.7)$$

Cette dernière relation sera remplacée par la condition d'incompressibilité

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} = 0 \quad (1.8)$$

dans le cas d'un fluide incompressible (introduisant un paradoxe apparent bien connu : la loi d'état ne fait pas intervenir la pression).

Les solutions de ce système sont très complexes, et contiennent tous les effets observés dans un écoulement de fluide newtonien : tourbillons (notamment en écoulement turbulent), chocs, ondes acoustiques, transformation d'énergie cinétique en chaleur, *etc.* Ce système peut éventuellement être simplifié, mais cela nécessite de se demander :

- ✓ Quelles hypothèses permettent de faire ces simplifications ?
- ✓ Est-ce que cela permet de répondre au problème posé ?

Exemples :

- ✓ On suppose souvent que μ , λ , k et C_v sont indépendants de la température. Cette hypothèse n'est plus valable s'il y a de grandes variations de température.
- ✓ La condition d'incompressibilité ($\text{div } u_i^* = 0$) est une approximation. Il faut garder à l'esprit qu'il n'existe pas de fluide incompressible ! Cependant, supposer que les effets de la compressibilité sont négligeables est justifié dans de nombreux cas (faible nombre de Mach). Mais attention, cela exclut de la solution les ondes acoustiques et les chocs.
- ✓ En écoulement incompressible, la masse volumique ne dépend plus de la pression, mais elle dépend toujours de la température (fluide incompressible, mais dilatable) :

$$\rho^*(p^*, T^*) = \rho^*(T^*) \quad (1.9)$$

Une approximation très utilisée lorsque les écarts de température sont faibles est **l'approximation de Boussinesq** :

- ↪ μ , k et C_v sont supposés indépendants de la température ;
- ↪ On réalise un développement limité à l'ordre 1 de la masse volumique à proximité de la température de référence T_0^* :

$$\rho^* = \rho_0^* - \beta \rho_0^* (T^* - T_0^*) \quad (1.10)$$

avec $\beta = -\frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial \rho^*}{\partial T}$ (coefficient de compressibilité isobare)

- ↪ On ne garde que le terme d'ordre 0 dans les équations ($\rho^* = \rho_0^*$) sauf pour le terme de flottabilité :

$$\rho^* g_i = \rho_0^* g_i - \rho_0^* g_i \beta (T^* - T_0^*) \quad (1.11)$$

car il est essentiel pour reproduire l'effet des variations de température sur l'écoulement.

- ✓ Lorsque les variations de température sont faibles et que les effets de flottabilité sont négligeables (écoulement de convection forcée), on peut considérer que $\rho^* = \text{constante}$ (notée alors simplement ρ).

Les équations de Navier-Stokes se réduisent alors à :

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} = 0 \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t} + u_j^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x_i} + g_i + \nu \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j \partial x_j} \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t} + u_i^* \frac{\partial T^*}{\partial x_i} = \alpha \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{2\mu}{\rho C_v} s_{ij}^* s_{ij}^* \quad (1.14)$$

On remarque que :

- ↪ la viscosité secondaire λ a disparu ;
- ↪ la viscosité cinématique $\nu = \mu/\rho$ et la diffusivité thermique $\alpha = k/\rho C_v$ s'introduisent naturellement ;

- ↪ la dynamique ne dépend plus de la thermique : on peut donc résoudre la dynamique, Eqs. (1.12) et (1.13), puis utiliser le champ de vitesse solution dans l'équation de la température : on dit alors que la température est un *scalaire passif* ;
- ↪ si l'écoulement est isotherme ($T^* = \text{constante}$), l'équation (1.14) disparaît.

- ✓ Si on suppose que le champ de gravitation est orienté suivant $-z$: $g_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}$ on peut poser :

$$p^{**} = p^* + \rho g z \quad (1.15)$$

et donc on a :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x_i} + g_i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{**}}{\partial x_i} \quad (1.16)$$

On constate donc que *si on peut négliger les forces de flottabilité*, la gravité n'a aucune influence sur les vitesses : elle ne fait que modifier la pression.

La plupart du temps, dans les codes de calcul, lorsqu'on peut négliger les forces de flottabilité, on utilise p^{**} , et ainsi g_i disparaît des équations. Attention : cela ne veut pas dire qu'on néglige la gravité, mais qu'on inclut la pression hydrostatique dans p^{**} . Le calcul ne donnera pas la pression, mais p^{**} ! Si on veut p^* , il faudra calculer $p^{**} - \rho g z$.

- ✓ On a fait des simplifications, mais on peut aussi compliquer ! Il peut y avoir par exemple :
- ↪ d'autres scalaires (passifs ou non) transportés par l'écoulement :
Exemples :
 - ▷ la concentration en sel (salinité) dans l'océan,
 - ▷ un polluant atmosphérique (CO, NOx, *etc.*) ;
 - ↪ des particules en suspension (gouttelettes d'eau, de gasoil, particules de charbon, *etc.*) ;
 - ↪ plusieurs fluides immiscibles (air/eau, *etc.*) ;
 - ↪ des réactions chimiques, et notamment de la combustion ;
 - ↪ du rayonnement.

On va se placer dans ce cours dans le cas le plus simple d'un écoulement incompressible et isotherme. On ne considérera des problèmes anisothermes qu'au chapitre 7.

1.2 La décomposition de Reynolds

En modélisation RANS, la première des modélisations consiste à supposer que les grandeurs instantanées sont des variables aléatoires : on suppose que l'écoulement a un comportement aléatoire, alors que manifestement les équations de Navier–Stokes sont déterministes. C'est le caractère chaotique du système qui permet de faire cette hypothèse. Le caractère déterministe de la turbulence n'est donc pas pris en compte : notamment, la présence de structures cohérentes (tourbillons à grande échelle, souvent à caractère pseudo-périodique) peut jouer un rôle important dans l'écoulement (cf. Figure 1.1). Cela suppose aussi que l'écoulement soit pleinement turbulent : le problème de la transition à la turbulence sort du cadre de ce cours.

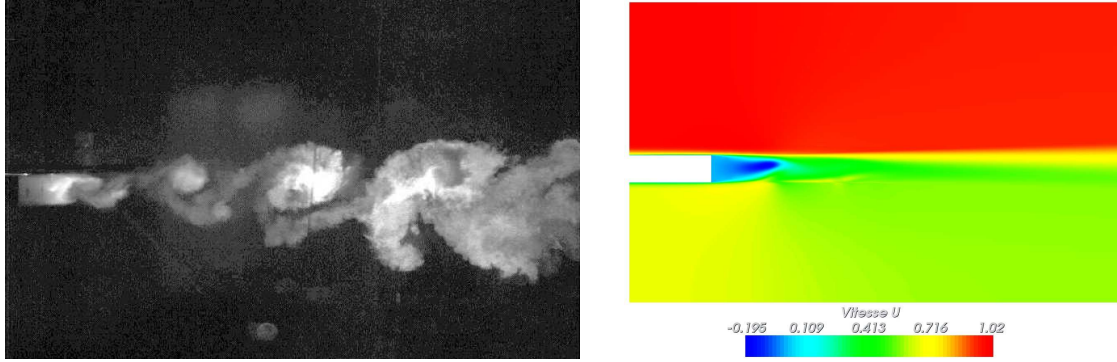


FIG. 1.1 – Couche de mélange derrière une plaque épaisse (vitesse en haut > vitesse en bas). À gauche : expériences de Perret et Delville (LEA, université de Poitiers/CNRS/ENSMA). À droite : solution RANS (modèle $k-\varepsilon$ bas-Reynolds), Calculs de Clerc (LEA, université de Poitiers/CNRS/ENSMA).

On décompose l'écoulement en partie moyenne/partie turbulente en introduisant la moyenne de Reynolds : en modélisation RANS, cette moyenne est notée $\overline{}$.

Vitesses moyennes : $U_i = \overline{u_i^*}$

Vitesses fluctuantes : $u_i = u_i^* - U_i$

Pression moyenne : $P = \overline{p^{**}}$

Pression fluctuante : $p = p^{**} - P$

(N.B. : donc, la pression hydrostatique est enlevée)

Il s'agit d'une moyenne d'ensemble, définie par :

$$\overline{f^*}(\mathbf{x}, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_n^*(\mathbf{x}, t) \right) \quad (1.17)$$

c'est-à-dire calculée en chaque point et à chaque instant en répétant l'expérience un grand nombre de fois.

Dans de nombreux cas, la moyenne d'ensemble peut s'exprimer de manière plus simple à mesurer :

✓ **Stationnarité statistique** = grandeur statistique indépendante du temps :

$$\overline{f^*}(\mathbf{x}, t) = \overline{f^*}(\mathbf{x}) \quad (1.18)$$

Dans ce cas, la moyenne d'ensemble est équivalente à une moyenne temporelle :

$$\overline{f^*}(\mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f^*(\mathbf{x}, t) dt \quad (1.19)$$

- ✓ **Homogénéité statistique** dans une (ou plusieurs directions) = grandeur statistique indépendante de la position (ici x) :

$$\overline{f^*}(x, y, z, t) = \overline{f^*}(y, z, t) \quad (1.20)$$

Dans ce cas, la moyenne d'ensemble est équivalente à une moyenne spatiale :

$$\overline{f^*}(y, z, t) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L f^*(x, y, z, t) dx \quad (1.21)$$

- ✓ **Périodicité statistique** = grandeur statistique périodique de période τ :

$$\overline{f^*}(\mathbf{x}, t) = \overline{f^*}(\mathbf{x}, \phi) \quad (1.22)$$

où $\phi = 2\pi t/\tau$ modulo 2π . Dans ce cas, la moyenne d'ensemble est équivalente à une moyenne de phase :

$$\overline{f}(\mathbf{x}, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N f(\mathbf{x}, t + n\tau) \quad (1.23)$$

1.3 Le problème de fermeture

La décomposition de Reynolds conduit aux équations de Navier–Stokes moyennées :

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} \quad (1.25)$$

On a 4 équations pour 10 inconnues : $P, U, V, W, \overline{u^2}, \overline{v^2}, \overline{w^2}, \overline{uv}, \overline{uw}, \overline{vw}$. Le système est donc ouvert.

Si on écrit les équations de transport du tenseur de Reynolds $\overline{u_i u_j}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \underbrace{U_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k}}_{C_{ij}} &= \underbrace{\nu \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_k \partial x_k}}_{D_{ij}^\nu} - \underbrace{\frac{\partial \overline{u_i u_j u_k}}{\partial x_k}}_{D_{ij}^T} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \overline{u_i} \frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \overline{u_j} \frac{\partial p}{\partial x_i}}_{\phi_{ij}^*} \\ &\quad - \underbrace{\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}}_{P_{ij}} - \underbrace{2\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k}}_{\varepsilon_{ij}} \end{aligned} \quad (1.26)$$

on a 6 nouvelles équations... mais malheureusement on fait apparaître 34 nouvelles inconnues : les $\overline{u_i u_j u_k}$, les $u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}$, les $\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}$. Le problème est donc toujours ouvert. On pourrait écrire des équations pour ces 34 inconnues, mais on ferait apparaître encore plus de nouvelles inconnues. On doit donc décider à quel niveau on s'arrête.

Modélisation au premier ordre. Le principe de la modélisation au premier ordre est le suivant :

- ✓ On résout les 4 équations (1.24) et (1.25) ce qui permet d'obtenir les moments d'ordre 1 : U, V, W, P
- ✓ On doit donc « inventer » une relation donnant les variables non résolues en fonction des variables résolues : une relation donnant les moments d'ordre 2 (les $\overline{u_i u_j}$) en fonction des moments d'ordre 1 s'appelle un *modèle au premier ordre*.
- ✓ C'est l'équivalent d'une *loi de comportement* pour un matériau (*constitutive relation* en anglais) : par exemple, pour un fluide newtonien incompressible, les équations (1.4) et (1.8) montrent que le tenseur des contraintes est relié à la déformation par la relation :

$$\sigma_{ij}^* = -p^* \delta_{ij} + 2\mu s_{ij}^* \quad (1.27)$$

Il s'agit d'un modèle pour le fluide, le modèle de Newton. Il permet de fermer le système (équations de Navier–Stokes).

- ✓ Un modèle de turbulence au premier ordre est l'équivalent pour le « fluide turbulent » du modèle de Newton : il relie le tenseur de Reynolds (qui joue exactement le rôle d'une contrainte dans l'équation 1.25) à la pression moyenne et à la déformation moyennes. D'ailleurs, les modèles les plus simples sont basés sur la relation de Boussinesq, directement calquée sur la relation de Newton :

$$-\rho \overline{u_i u_j} = -\frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} + 2\mu_t S_{ij} \quad (1.28)$$

$$\text{où } S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right).$$

Modélisation au second ordre. Le principe de la modélisation au second ordre est le suivant :

- ✓ On résout les 4 équations (1.24) et (1.25) pour obtenir les moments d'ordre 1 : U, V, W, P
- ✓ On résout également les 6 équations de transport du tenseur de Reynolds (1.26) pour obtenir les moments d'ordre 2 : les $\overline{u_i u_j}$
- ✓ On doit donc « inventer » des relations donnant les variables non résolues en fonction des variables résolues : des relations donnant les moments inconnus $\left(\overline{u_i u_j u_k}, u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}, \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} \right)$ en fonction des moments d'ordre 1 et 2 constituent un *modèle au second ordre*.
- ✓ C'est également l'équivalent d'une *loi de comportement*, mais très complexe. Exemple : le modèle de Daly et Harlow pour des corrélations triples s'écrit :

$$\overline{u_i u_j u_k} = -C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l}$$

On peut faire quelques remarques sur les différences fondamentales entre ces deux niveaux de modélisation

- ✓ La modélisation au second ordre résout les équations des tensions de Reynolds, alors que la modélisation au premier ordre les modélise par une simple relation algébrique : les modèles au second ordre contiennent donc forcément « plus de physique ».
- ✓ En particulier, les termes de production ne nécessitent aucune modélisation, car ils ne font intervenir que des moments d'ordre inférieur ou égal à deux :

$$P_{ij} = - \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \quad (1.29)$$

Ces termes jouent un rôle fondamental dans la physique de la turbulence.

Une question nous brûle les lèvres : de quel niveau de modélisation a-t-on besoin ? Cette question n'a malheureusement pas de réponse simple, pour plusieurs raisons :

- ✓ Cela dépend des moyens qu'on se donne (puissance de calcul, temps de l'étude).
- ✓ Cela dépend des objectifs que l'on se fixe : les grandeurs globales (traînée, portance, flux de chaleur global) ou des détails bien plus précis (position des décollements, structure de l'écoulement, échelles turbulentes, anisotropie, *etc.*).
- ✓ Mais cela ne suffit pas : tout dépend du type d'écoulement !
 - ↪ Pour un écoulement attaché (aile d'avion à faible incidence), un modèle très simple peut suffire pour obtenir la traînée (modèle de longueur de mélange).
 - ↪ Mais pour un écoulement massivement décollé (aile d'avion en décrochage, corps non-profilé), un modèle très sophistiqué est nécessaire même pour obtenir la traînée !
 - ↪ En règle générale, la compréhension des mécanismes physiques en jeu dans un écoulement et une bonne connaissance du potentiel des modèles pour reproduire ces mécanismes est nécessaire pour trouver la bonne adéquation.
 - ↪ Il n'existe pas de modèle « universel », qui sache tout faire et qui marche dans toutes les situations !

La figure 1.2 montre un exemple d'écoulement complexe, qui représente une voiture simplifiée : le corps de Ahmed. On voit que la structure de l'écoulement est très complexe. L'évaluation du coefficient de traînée est délicate, car l'obtention d'une pression correcte sur la surface du corps est dépendante de la reproduction fidèle des zones décollées. Un modèle très raffiné est donc nécessaire, même pour obtenir simplement la traînée globale (en fait, actuellement, aucun modèle ne donne satisfaction !)

1.4 Un rapide survol historique des différents types de modèles

Cette partie donne un rapide aperçu de l'histoire de la modélisation. L'intérêt de cette partie n'est pas seulement de satisfaire une légitime curiosité historique, mais aussi de montrer dans quel ordre les idées sont réellement apparues, car dans la suite, la présentation ne sera pas du tout chronologique mais plutôt logique. De plus, cela va nous permettre d'introduire un peu de vocabulaire.

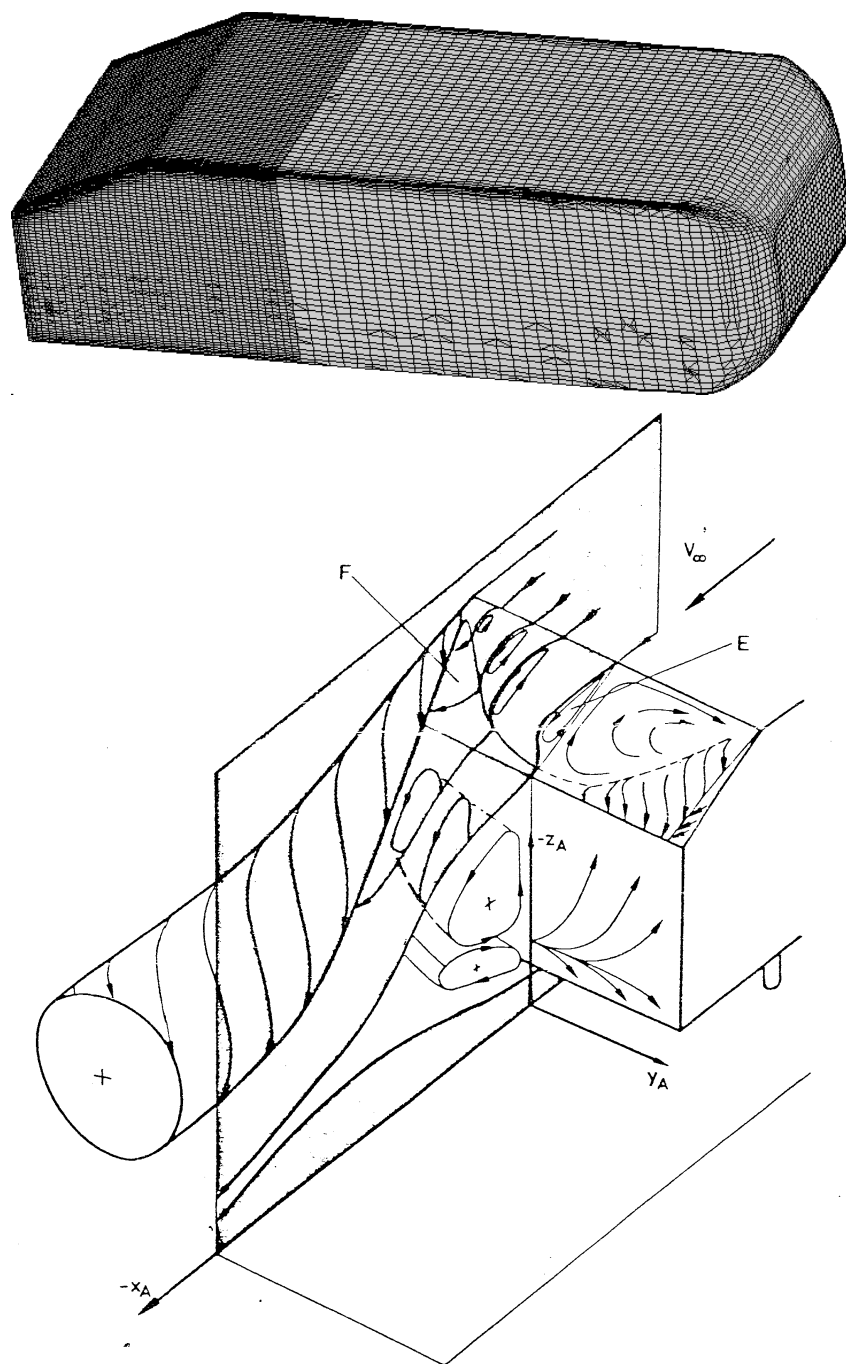


FIG. 1.2 – Écoulement autour d'une voiture simplifiée (corps de Ahmed). En haut : maillage surfacique du corps, d'après Manceau (2003) [27]. En bas : structure de l'écoulement, d'après Ahmed *et al.* (1984) [1].

1.4.1 Avant l'avènement de l'informatique : les pionniers

1877 Boussinesq invente le concept de viscosité turbulente : par un simple raisonnement phénoménologique, il postule que le « matériau turbulent » se comporte comme un fluide newtonien, c'est-à-dire que la contrainte est proportionnelle à la déformation. Boussinesq l'exprime uniquement pour la tension de cisaillement, celle pour lequel c'est le plus évident :

$$\overline{uv} = -\nu_t \frac{\partial U}{\partial y} \quad (1.30)$$

C'est le premier **modèle au premier ordre**. On voit apparaître ici la notion de *viscosité turbulente*, qui décrit l'effet global de la turbulence comme un effet **uniquement diffusif**. On suppose donc ici que la turbulence est une agitation aléatoire qui accroît les effets de mélange. C'est exactement le même raisonnement que celui qui conduit en mécanique des milieux continus à introduire une viscosité moléculaire pour prendre en compte l'effet de l'agitation moléculaire. Ce modèle ne donne que la composante $\overline{uv}$. Il a été généralisé plus tard en :

$$\overline{u_i u_j} = -2\nu_t S_{ij} + \frac{2}{3}k\delta_{ij} \quad (1.31)$$

En comparant cette relation avec l'équation (1.27), on constate à quel point ce modèle est similaire au modèle de Newton. La viscosité turbulente et l'énergie turbulente jouent des rôles équivalents à ceux de la viscosité moléculaire et de la pression, respectivement. Cependant, ce modèle ne dit pas comment calculer ν_t et k , qui varient fortement au sein d'un écoulement et d'un écoulement à l'autre. Ce type de modèles est appelé **modèle algébrique** (c'est-à-dire n'impliquant pas la résolution d'équations différentielles), ou **modèle à zéro équation**.

On peut ici introduire le vocabulaire suivant : *Modèle à n équation* = modèle nécessitant la résolution de n équations en plus des équations de Navier–Stokes moyennées (équations 1.24 et 1.25).

Aparté . Distinction entre les rôles de la viscosité turbulente et de l'énergie turbulente :

Si on introduit la relation de Boussinesq dans les équations des vitesses moyennes :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} \quad (1.32)$$

on obtient :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[P + \frac{2}{3}\rho k \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (1.33)$$

En définissant $P^* = P + \frac{2}{3}\rho k$, on a :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (1.34)$$

On constate donc que, de manière similaire à la gravité dans les équations de Navier–Stokes, l'énergie turbulente dans les équations moyennées ne modifie pas les vitesses,

mais seulement la pression et donc que **la connaissance de ν_t suffit pour évaluer les vitesses moyennes**.

Attention : dans certains codes de calcul, c'est effectivement l'équation (1.34) qui est résolue. Ce n'est donc pas P qui est calculé, mais P^* .

1925 Prandtl introduit le concept de longueur de mélange, qui permet d'évaluer ν_t . À partir d'une théorie analogue à la théorie cinétique des gaz, Prandtl écrit la viscosité turbulente sous la forme :

$$\nu_t = \ell_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad (1.35)$$

pour un écoulement cisailé. ℓ_m est la longueur de mélange (analogue du libre parcours moyen en théorie cinétique des gaz). Pour être valable quelle que soit la direction du cisaillement, cette relation doit être généralisée en :

$$\nu_t = \ell_m^2 \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \quad (1.36)$$

Cette idée a fait ses preuves dans les écoulements cisailés libres (jets, couches de mélange, sillages) et en couche limite. Elle nécessite cependant de prescrire la valeur de ℓ_m . Il s'agit également d'un **modèle au premier ordre algébrique (zéro équation)**. Cette approximation est très utile pour des évaluations « de coin de table ».

Sous des formes un peu plus élaborées, elle est utilisée en aéronautique, pour les écoulements *attachés*.

1942/1945 Indépendamment, Kolmogorov et Prandtl remarquent que la viscosité turbulente doit dépendre de l'énergie cinétique de la turbulence :

$$\nu_t \simeq \ell u \quad (1.37)$$

ou, plus précisément :

$$\nu_t = C_\mu \sqrt{k} \ell \quad (1.38)$$

relation connue sous le nom de *relation de Prandtl-Kolmogorov*. On voit ici apparaître des notions très importantes en physique de la turbulence : les propriétés diffusives globales de la turbulence sont liées aux plus gros tourbillons de l'écoulement (échelles énergétiques) et, lorsque le nombre de Reynolds ν_t/ν est suffisamment grand, sont indépendantes de la viscosité moléculaire. L'analyse dimensionnelle indique donc que ν_t doit être évalué à partir de deux échelles caractéristiques des tourbillons énergétiques. Ces échelles caractérisent l'état de la turbulence en chaque point et à chaque instant : elles jouent exactement le rôle de variables d'état (cf. § 1.1). La relation (1.38) introduit les deux variables d'état k et ℓ . On a d'ailleurs déjà vu plus haut que k joue le rôle d'une pression. On a donc besoin de lois d'état qui permettent d'évaluer ces variables.

✓ Prandtl propose de résoudre une équation de transport pour k , qui est basé sur l'équation exacte de k , dans laquelle on modélise les termes inconnus. Il s'agit d'un modèle au **premier ordre**. C'est le premier **modèle à 1 équation**. Il nécessite toujours de prescrire une échelle de longueur ℓ .

✓ Kolmogorov propose de plus d'évaluer cette échelle de longueur par :

$$\ell = \frac{\sqrt{k}}{\omega} \quad (1.39)$$

où ω est une fréquence caractéristique des gros tourbillons (il s'agit donc également d'une variable d'état). Il propose de résoudre une équation de transport pour ω : c'est toujours un modèle au **premier ordre**. C'est le premier **modèle à 2 équations**.

1945 Chou écrit les équations de transport des tensions de Reynolds et montre que le terme de pression peut se décomposer en terme rapide et terme lent sous la forme :

$$\phi_{ij}^* = -\frac{1}{\rho} \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}} - \frac{1}{\rho} \overline{u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}} = \underbrace{B_{ij}}_{\phi_{ij}^1} + \underbrace{(A_{ijml} + A_{jiml}) \frac{\partial U_l}{\partial x_m}}_{\phi_{ij}^2} \quad (1.40)$$

C'est le premier pas vers les modèles au second ordre.

1951 Rotta propose la première modélisation complète des équations de transport des tensions de Reynolds. En particulier, il propose la modélisation suivante du terme lent, par une simple hypothèse de retour à l'isotropie :

$$\phi_{ij}^l = -C_1 \varepsilon a_{ij} \quad (1.41)$$

où $a_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij}$ est le tenseur d'anisotropie. L'idée se base sur le rôle physique de ce terme observé dans l'expérience de retour à l'isotropie d'une turbulence initialement anisotrope (cf. § 4.2.3) : lorsque plus aucune déformation n'est appliquée à la turbulence, les observations expérimentales montrent que la turbulence retourne vers un état isotrope ($\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3} k \delta_{ij}$, c'est-à-dire $a_{ij} = 0$), sous l'effet des seuls termes sources non nuls dans ce cas (terme lent et tenseur de dissipation). Pour reproduire cet effet de retour à l'isotropie, le moyen le plus simple est de modéliser le terme lent de manière à ce qu'il dépende de manière linéaire de l'opposé de l'anisotropie. Le facteur ε est nécessaire pour des raisons dimensionnelles.

Ce modèle du terme lent, connu sous le nom de *modèle de Rotta*, est encore le plus utilisé aujourd'hui. C'est le premier modèle au second ordre. On remarquera que Rotta a négligé le terme rapide. L'avenir lui donnera tort.

1.4.2 Après l'apparition des premiers ordinateurs : les temps héroïques de la MFN

1967 Cebeci et Smith proposent un modèle algébrique (type longueur de mélange), amélioré plus tard par Baldwin et Lomax (1978) : ces modèles ont été et sont toujours très utilisés en aéronautique. Ils ne sont pas valables pour des écoulements décollés.

1972 Jones et Launder, exploitant les travaux de Davidov (1961), de Harlow et Nakayama (1967) et d'Hanjalić (1970), proposent et appliquent un modèle à deux équations utilisant ε comme seconde variable (modèle $k-\varepsilon$). La forme définitive du modèle avec son jeu

de constantes sera donnée par Launder et Spalding (1974) [21]. C'est le **modèle $k-\varepsilon$ standard**, de très loin le plus utilisé encore aujourd'hui dans l'industrie. C'est l'acte de naissance de la modélisation RANS moderne.

1975 Exploitant les travaux antérieurs de Donaldson (1968), Daly et Harlow (1970), Hanjalić et Launder (1972) et Naot, Shavit et Wolfshtein (1973), Launder, Reece et Rodi (1975) [20] proposent le modèle au second ordre le plus utilisé (connu sous le nom de modèle LRR ou Rotta+IP). Il s'agit d'un modèle à 7 équations ($\overline{u_i u_j} + \varepsilon$).

Les bases sont jetées. La suite de l'histoire consiste en l'amélioration de ces approches.

Chapitre 2

Principes généraux pour le développement de modèles

Un certain nombre de principes peuvent être suivis en modélisation (= développement de modèles de turbulence). L'existence de ces principes a d'énormes avantages :

- ✓ Ils donnent un cadre mathématique à la modélisation.
- ✓ Ils fixent des contraintes physiques, permettant de faire des choix pertinents.
- ✓ Ils offrent ainsi une démarche à suivre.

mais on doit aussi remarquer que :

- ✓ Ils sont insuffisants pour assurer que les modèles vont « bien marcher » : c'est la raison pour laquelle la modélisation est toujours un sujet de recherche actif.
- ✓ Ils ne sont pas forcément tous compatibles entre eux !
- ✓ Certains sont plus importants que d'autres, mais il est impossible de faire un véritable classement : deux modélisateurs différents donneront très certainement un classement différent.

La formalisation et la généralisation de l'application de ces principes en modélisation doivent beaucoup à Lumley et Speziale.

Voici une liste des principes les plus souvent utilisés, que nous allons détailler :

1. Principe de fermeture
2. Homogénéité dimensionnelle
3. Complétude
4. Objectivité
5. Réalisabilité
6. Universalité
7. Cohérence avec les résultats connus
8. Robustesse numérique

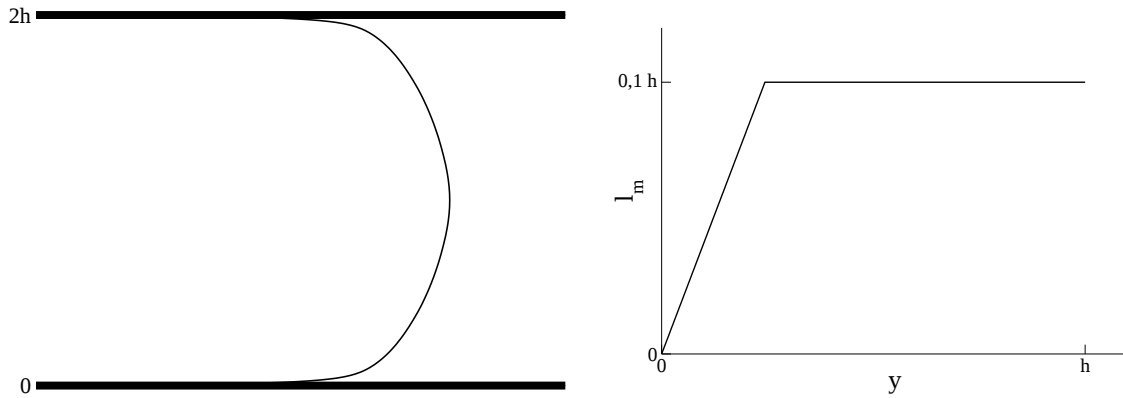


FIG. 2.1 – Écoulement en canal. À gauche : géométrie et profil de vitesse. À droite : modèle d'évolution de la longueur de mélange.

2.1 Principe de fermeture

Nous avons déjà présenté le problème de fermeture précédemment : le principe de fermeture stipule simplement qu'un modèle, pour mériter ce nom, doit consister en un système fermé d'équations. On doit avoir autant d'équations que d'inconnues.

Par exemple, en introduisant l'équation de Boussinesq pour fermer les équations de Navier–Stokes moyennées :

$$\overline{u_i u_j} = -2\nu_t S_{ij} + \frac{2}{3}k\delta_{ij}$$

le système n'est pas fermé, car il reste une inconnue non déterminée : ν_t (on a vu que k n'intervenait pas).

Si on cherche à fermer le système en introduisant la longueur de mélange :

$$\nu_t = \ell_m^2 \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$$

le système n'est toujours pas fermé, à cause de l'inconnue ℓ_m . On doit encore fournir une relation donnant ℓ_m . Par exemple, dans un écoulement en canal, on peut utiliser l'approximation (assez grossière) :

$$\ell_m = \min(\kappa y ; 0,1h) \quad (2.1)$$

montrée sur la figure 2.1, où κ est la constante de Karman $\kappa = 0,41$. On a alors un système fermé.

2.2 Homogénéité dimensionnelle

Ce principe stipule simplement que le modèle utilisé pour une quantité donnée doit avoir la même dimension que cette quantité. Par exemple, dans le modèle de longueur de mélange

$$\nu_t = \ell_m^2 \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$$

les deux membres de la relation sont bien de dimension L^2T^{-1} .

Cela paraît évident sur un exemple aussi simple, mais quand on formalise un peu plus, on en vient facilement à oublier ce principe de base. Par exemple, dans un article de 1997 paru dans *Journal of Fluid Mechanics*, L. Wang propose la loi de comportement générale suivante pour le tenseur de Reynolds $\mathbf{R} = [\overline{u_i u_j}]$:

$$\rho \mathbf{R} = \mathbf{F}(\mu, \rho, \mathbf{U}, \nabla \mathbf{U}) \quad (2.2)$$

Le principe d'objectivité (voir plus loin) permet d'éliminer $\mathbf{U}$ de cette relation. De plus, le fait qu'à haut Reynolds μ soit négligeable permet d'éliminer μ . On arrive donc à

$$\rho \mathbf{R} = \mathbf{F}(\rho, \nabla \mathbf{U}) \quad (2.3)$$

Or, aucune combinaison de ρ et $\nabla \mathbf{U} = \left[\frac{\partial U_k}{\partial x_l} \right]$ n'est de la bonne dimension ! La loi de comportement introduite par Wang donc n'est pas valable.

C'est une des raisons pour lesquelles il est nécessaire d'introduire des échelles supplémentaires dans ce type de relation : l'énergie turbulente k , son taux de dissipation ε , l'échelle de temps de la turbulence k/ε , etc.

De plus, l'analyse dimensionnelle permet souvent d'obtenir des informations sur la forme des relations. Reprenons notre exemple : on fait intervenir dans la loi de comportement les variables d'état k et ε :

$$\rho \mathbf{R} = \mathbf{F}(\rho, \nabla \mathbf{U}, k, \varepsilon) \quad (2.4)$$

Un des principes fondamentaux de la physique est que cette relation doit être valable dans n'importe quel système d'unités. Choisissons par exemple le système d'unité suivant :

$$L = \ell \quad ; \quad T = \tau \quad ; \quad M = \rho \ell^3$$

où ℓ et τ sont respectivement l'échelle intégrale et le temps de retournement des plus gros tourbillons. Elles sont reliées à k et ε par : $\ell = k^{3/2}/\varepsilon$ et $\tau = k/\varepsilon$. Dans ce système, la relation doit rester la même :

$$\rho^* \mathbf{R}^* = \mathbf{F}(\rho^*, \nabla^* \mathbf{U}^*, k^*, \varepsilon^*) \quad (2.5)$$

où les $*$ indiquent que les variables sont exprimées dans le nouveau système. On a :

$$\begin{aligned} \rho^* &= \frac{\rho}{ML^{-3}} = 1 \quad ; \quad R^* = \frac{R}{L^2 T^{-2}} = \frac{R}{k} \quad ; \quad \nabla^* U^* = \frac{\nabla U}{T^{-1}} = \frac{k \nabla U}{\varepsilon} \quad ; \\ k^* &= \frac{k}{L^2 T^{-2}} = 1 \quad ; \quad \varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{L^2 T^{-3}} = 1 \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\frac{\mathbf{R}}{k} = \mathbf{F}\left(1, \frac{k \nabla \mathbf{U}}{\varepsilon}, 1, 1\right) \quad (2.6)$$

On voit que la fonction se résume à une fonction de l'unique variable $\frac{k \nabla \mathbf{U}}{\varepsilon}$:

$$\mathbf{R} = k \mathbf{F}\left(\frac{k \nabla \mathbf{U}}{\varepsilon}\right) \quad (2.7)$$

On a donc appris pas mal de choses sur cette relation : l'analyse dimensionnelle impose en grande partie la forme qu'elle peut prendre.

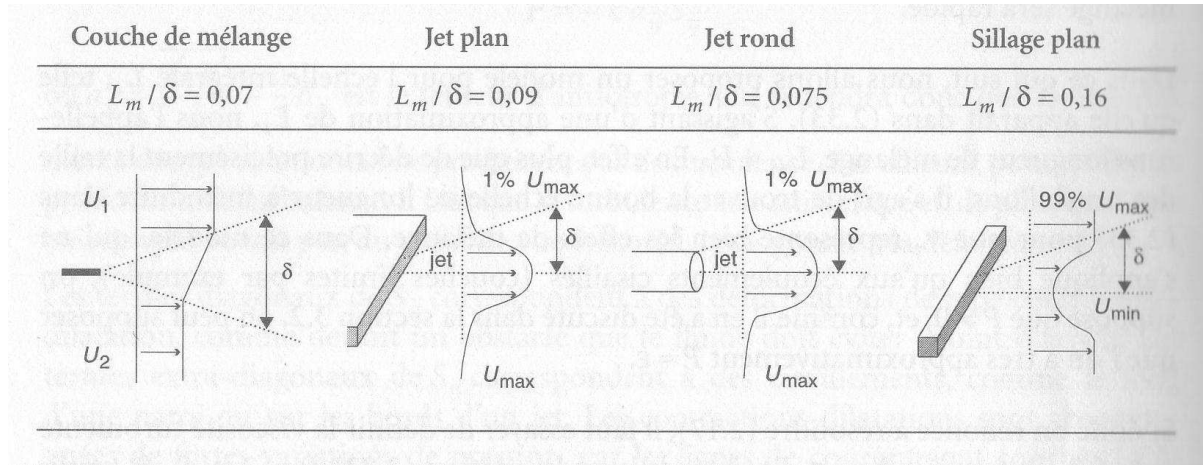


FIG. 2.2 – Lien entre la longueur de mélange et l'épaisseur des couches cisailées, d'après Viollet *et al.*(1998)

2.3 Complétude

Un modèle est dit complet s'il ne nécessite aucune connaissance a priori de l'écoulement.

Par exemple : le modèle de longueur de mélange n'est pas complet (et pourtant il est fermé). En effet, nous avons vu qu'on a besoin pour fermer le système de prescrire la longueur de mélange en fonction de la position dans l'écoulement : or, celle-ci dépend de l'écoulement considéré. On a vu qu'on pouvait utiliser la relation

$$\ell_m = \min(\kappa y ; 0,1h)$$

pour un écoulement de canal. En écoulement cisailé libre, on peut relier la longueur de mélange à l'épaisseur de la couche cisailée, mais cela dépend du type d'écoulement, comme on peut le voir sur la figure 2.2.

De la même manière, le modèle à une équation de Prandtl donnant la viscosité turbulente sous la forme $\nu_t = C_\mu \sqrt{k} \ell$ est incomplet : il nécessite également de prescrire l'échelle de longueur ℓ .

Historiquement, le premier modèle complet est celui de Kolmogorov qui, comme nous l'avons vu, évalue la viscosité turbulente par :

$$\nu_t = C_\mu \frac{k}{\omega}$$

Le modèle est complet parce que les deux échelles, k et ω , sont données par des lois d'état, qui sont des équations de transport :

$$\frac{dk}{dt} = \dots \quad \frac{d\omega}{dt} = \dots$$

On peut donc utiliser ce modèle d'un écoulement à l'autre sans rien changer : il est complet.

Nous verrons trois possibilités pour construire un modèle complet :

✓ Modèles au premier ordre :

↪ En utilisant comme loi de comportement la relation de Boussinesq :

$$\overline{u_i u_j} = -2\nu_t S_{ij} + \frac{2}{3}k\delta_{ij}$$

et en écrivant une équation de transport pour ν_t .

↪ En utilisant n'importe quelle loi de comportement (dont Boussinesq) et en évaluant ν_t à l'aide de deux échelles de turbulence (k - ε , k - ω , *etc.*) pour lesquelles on résout des équations de transport.

✓ Modèles au second ordre :

Pour les modèles au second ordre, on peut calculer k à partir des tensions de Reynolds. On aura besoin d'une seconde échelle de turbulence (ε , ω , *etc.*) pour laquelle on résoudra une équation de transport.

2.4 Objectivité

En mécanique des milieux continus, une quantité est dite objective si elle ne dépend pas de l'observateur, c'est-à-dire si elle est indépendante du référentiel dans lequel on la mesure.

De manière plus formelle : un changement de référentiel se décompose en une translation et une rotation fonctions du temps :

$$x_i(t) = \mathcal{R}_{ij}(t)x'_j(t) + \mathcal{T}_i(t)$$

où $x_i(t)$ est la position d'un point M dans le repère du premier observateur, et $x'_i(t)$ la position du même point dans le repère du second observateur.

Une quantité est objective si et seulement si elle satisfait les relations suivantes :

✓ Pour un scalaire s :

$$s = s'$$

✓ Pour un vecteur $\mathbf{V}$:

$$V_i = \mathcal{R}_{ij}V'_j$$

✓ Pour un tenseur $\mathbf{M}$:

$$M_{ij} = \mathcal{R}_{ik}M'_{kl}\mathcal{R}_{lj}^{-1}$$

Par exemple :

✓ La vitesse moyenne $\mathbf{U}$ n'est pas objective : pour un second observateur en translation par rapport au premier (pas de rotation), on a

$$U_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{dx'_i}{dt} + \frac{dT}{dt} = U'_i + \frac{dT}{dt}$$

✓ Le tenseur des gradients de vitesse $\nabla\mathbf{U}$ n'est pas objectif.

✓ Le tenseur des taux de déformation $\mathbf{S}$ est objectif.

✓ Les vitesses fluctuantes sont objectives.

✓ Par conséquent, le tenseur de Reynolds est objectif.

Dans le cadre de la modélisation de la turbulence : le modèle représentant une quantité objective doit être lui même objectif.

Par exemple, revenons sur une affirmation faite précédemment à propos de la loi de comportement de Wang : le vecteur vitesse moyenne $\mathbf{U}$ ne peut pas intervenir dans une loi de comportement du tenseur de Reynolds. En effet, tout simplement, $\mathbf{U}$ n'est pas objectif, donc le tenseur de Reynolds modélisé ne serait pas objectif si $\mathbf{U}$ intervenait. En revanche, la partie symétrique du gradient de vitesse $\mathbf{S}$ peut intervenir, car elle est objective.

Aparté : la question de l'indifférence matérielle

Le principe d'indifférence matérielle est une des bases de la mécanique des milieux continus classique. Il stipule que les propriétés d'un matériau ne dépendent pas du référentiel : cela revient à dire que la forme de la loi de comportement ne dépend pas du référentiel.

En particulier :

- ✓ Le comportement d'un matériau ne dépend pas explicitement du temps. La contrainte varie dans le temps, mais uniquement parce que la déformation varie dans le temps : la relation entre les deux est, quant à elle, la même à tout instant. Ceci se démontre à partir du principe d'indifférence matérielle en changeant l'origine des temps.
- ✓ De la même manière, en changeant le point d'origine des axes, on montre que le comportement du matériau ne dépend pas de la position $\mathbf{x}$.
- ✓ Les propriétés d'un matériau ne dépendent pas non plus du caractère galiléen ou non-galiléen du repère. Les propriétés du matériau sont insensibles à l'accélération ou à la rotation.

Par exemple, le modèle de Newton pour les fluides (newtoniens, donc) est la loi de comportement qui donne le tenseur des contraintes en fonction de la déformation :

$$\sigma_{ij}^* = -p^* \delta_{ij} + 2\mu s_{ij}^*$$

Cette relation respecte l'indifférence matérielle : elle ne fait pas intervenir explicitement le temps t , la position $\mathbf{x}$ ou la rotation du référentiel. Cela revient à dire que :

- ✓ Le fluide ne vieillit pas (ses propriétés sont constantes dans le temps) ;
- ✓ Le fluide est homogène (ses propriétés sont constantes dans l'espace) ;
- ✓ Les propriétés du fluide ne dépendent pas de la rotation : cela est vrai parce que l'agitation moléculaire se fait sur des distances très courtes, ce qui fait que la force de Coriolis n'a pas le temps d'agir. Globalement, à l'échelle macroscopique, les propriétés du fluide ne dépendent pas de la rotation du référentiel.

En revanche, lorsqu'il s'agit d'écrire une loi de comportement pour le tenseur de Reynolds, c'est-à-dire pour le « matériau turbulent », on ne peut pas invoquer ce principe. En effet, les équations de transport du tenseur de Reynolds sont modifiées en référentiel non-galiléen : l'effet des forces de Coriolis est important (par exemple en météo, dans les machines tournantes, etc.).

La loi de comportement pour les tensions de Reynolds doit donc *explicitement* faire intervenir la vitesse de rotation du référentiel par rapport à un référentiel galiléen. De longues controverses ont opposé les spécialistes sur ces questions. Un consensus ne s'est établi que très récemment (1999).

La manière la plus simple de satisfaire à la fois l'objectivité et la sensibilité à la rotation du référentiel est de faire intervenir dans la loi de comportement le taux de rotation *absolu*, qui est objectif :

$$W^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \varepsilon_{mji} \omega_m \quad (2.8)$$

où ω_m est le pseudo-vecteur rotation du référentiel non-galiléen.

Quant à l'accélération en translation du référentiel, elle est équivalente à une force de gravité. Notamment, en écoulement incompressible et isotherme, le tenseur de Reynolds ne dépend pas de cette accélération en translation, de la même manière qu'il ne dépend pas de la gravité.

2.5 Réalisabilité

Les maths nous enseignent quelques propriétés importantes des moments (d'ordre 1, d'ordre 2, *etc.*)

- ✓ Nous avons considéré que les vitesses instantanées sont des variables aléatoires.
- ✓ Nous cherchons à modéliser les moments de ces variables aléatoires (notamment d'ordre 2).
- ✓ Pour que le modèle puisse bien représenter les moments d'une variable aléatoire (c'est-à-dire pour qu'il soit *réalisable*), il doit vérifier certaines propriétés.

2.5.1 Intermède mathématique : les conditions de réalisabilité

Soit u une variable aléatoire *scalaire*. Soit a_k la suite des moments d'ordre k de u (avec notre notation pour la moyenne d'ensemble, on a donc $a_1 = \overline{u}$, $a_2 = \overline{u^2}$, $a_3 = \overline{u^3}$, *etc.*). Cette suite vérifie la propriété suivante :

Pour tout m et pour tout polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^m c_k x^k$ positif ($\forall x, P(x) \geq 0$),

on a :

$$\sum_{k=0}^m c_k a_k \geq 0 \quad (2.9)$$

Exemple simple : prenons $P(x) = x^2$. L'inégalité (2.9) nous donne $\overline{u^2} \geq 0$, ce qui en soi n'est pas un scoop.

La réciproque est vrai :

Toute suite de réels qui satisfait l'inégalité (2.9) pour tout polynôme positif est la suite des moments d'une variable aléatoire.

Dans le cas d'une variable vectorielle : soit (u, v, w) une variable aléatoire *vectorielle* ; soit a_{klm} les moments définis par $a_{klm} = \overline{u^k v^l w^m}$. Ces moments vérifient la propriété suivante :

Pour tous entiers (p, q, r) et pour tout polynôme positif $P(x, y, z) = \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^q \sum_{m=0}^r c_{klm} x^k y^l z^m$ ($\forall x, y, z, P(x, y, z) \geq 0$), on a :

$$\sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^q \sum_{m=0}^r c_{klm} a_{klm} \geq 0 \quad (2.10)$$

Réciproquement :

Toute suite de réels a_{klm} qui satisfait l'inégalité (2.10) pour tout polynôme positif est la suite des moments d'une variable aléatoire vectorielle (u, v, w)

2.5.2 Utilisation pour la modélisation

Le tenseur de Reynolds étant composé des moments d'ordre 2 de la vitesse u_i^* , il vérifie la conditions de réalisabilité exposée précédemment. En particulier, si on considère la famille des polynômes positifs $P(x, y, z) = (n_1 x + n_2 y + n_3 z)^2$, on arrive à la condition :

$$\forall n_i, \quad \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{u^2} & \overline{uv} & \overline{uw} \\ \overline{uv} & \overline{v^2} & \overline{vw} \\ \overline{uw} & \overline{vw} & \overline{w^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = R_{ij} n_i n_j \geq 0 \quad (2.11)$$

Le tenseur de Reynolds est donc un tenseur positif. C'est souvent dans ce sens restrictif qu'on parle de réalisabilité en modélisation de la turbulence. Cependant, les relations précédentes montrent que de nombreuses propriétés peuvent être appliquées aux moments d'ordre supérieur.

2.5.3 Intermède mathématique : formes quadratiques positives

Soit une forme quadratique :

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} x_i x_j \text{ pour } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Il y a différentes conditions nécessaires et suffisantes pour que F soit positive (c'est-à-dire $F \geq 0$ pour tout $\mathbf{x}$). On peut utiliser une des trois conditions suivantes de manière équivalente :

1. Les n valeurs propres λ_i de la matrice $\mathbf{M}$ sont positives :

$$\forall i, \quad \lambda_i \geq 0$$

2. Les n déterminants diagonaux principaux sont positifs :

$$\forall i \leq n, \quad \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1i} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{i1} & M_{i2} & \dots & M_{ii} \end{vmatrix} \geq 0$$

3. Les n invariants principaux de $\mathbf{M}$ sont positifs.

$$\forall i \leq n, \quad I_n \geq 0$$

2.5.4 Encore un intermède mathématique : les invariants

Les invariants d'un tenseur sont des scalaires qui sont indépendants du repère. Par exemple : la trace est un invariant. De manière générale, on peut définir différents invariants à partir des tenseurs :

Tenseurs du premier ordre (vecteurs). Le seul invariant d'un vecteur $\mathbf{U}$ est sa norme :

$$I = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U}^t \mathbf{U} = \sum_{i=1}^n U_i U_i \quad (2.12)$$

Tenseurs du second ordre. Soit $\mathbf{M} = [M_{ij}]$ un tenseur du second ordre. Ses n valeurs propres sont les solutions du polynôme caractéristique :

$$|\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}| = 0$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\lambda^n - I_1 \lambda^{n-1} + I_2 \lambda^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} I_{n-1} \lambda + (-1)^n I_n = 0$$

Les n coefficients du polynôme caractéristique I_i sont les invariants principaux de $\mathbf{M}$. Ces invariants s'obtiennent de la manière suivante :

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{i=1}^n M_{ii} = \{\mathbf{M}\} && \text{(trace de } \mathbf{M} \text{)} \\ I_2 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \begin{vmatrix} M_{ii} & M_{ij} \\ M_{ji} & M_{jj} \end{vmatrix} && \text{(somme des mineurs principaux d'ordre 2)} \\ I_3 &= \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \begin{vmatrix} M_{ii} & M_{ij} & M_{ik} \\ M_{ji} & M_{jj} & M_{jk} \\ M_{ki} & M_{kj} & M_{kk} \end{vmatrix} && \text{(somme des mineurs principaux d'ordre 3)} \end{aligned}$$

Le théorème de Cayley-Hamilton indique que tout tenseur du second ordre est racine de son propre polynôme caractéristique :

$$\mathbf{M}^n - I_1 \mathbf{M}^{n-1} + I_2 \mathbf{M}^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} I_{n-1} \mathbf{M} + (-1)^n I_n \mathbf{I} = 0 \quad (2.13)$$

Ce théorème est très utile en modélisation : $\mathbf{M}^n$ s'exprime en fonction des puissances plus faibles de $\mathbf{M}$, donc, dans un modèle, quand on cherchera la forme la plus générale que peut prendre une relation (par exemple, $\mathbf{R} = \mathbf{F}(k, \varepsilon, \mathbf{S}, \mathbf{W})$ pour les modèles au premier ordre), on pourra se contenter de faire intervenir les puissances inférieures à la dimension de l'espace (dans l'exemple : $\mathbf{S}^0 = \mathbf{W}^0 = \mathbf{I}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}^2$, $\mathbf{W}$ et $\mathbf{W}^2$).

En dimension n , on ne peut former que n invariants indépendants. En particulier, les invariants formés à partir des puissances de $\mathbf{M}$ peuvent être reliés aux invariants principaux (par exemple, $\{\mathbf{M}^2\}$). On aura besoin au cours de la démarche de modélisation de choisir une famille de n invariants indépendants. Les choix suivants sont par exemple possibles :

- ✓ La famille des valeurs propres : $\lambda_1, \dots, \lambda_n$
- ✓ La famille des invariants principaux : $I_1, \dots, I_n$
- ✓ La famille des traces des puissances de $\mathbf{M}$: $\{\mathbf{M}\}, \dots, \{\mathbf{M}^n\}$

On peut aussi former des invariants à partir d'une famille de tenseurs. Par exemple : $\{\mathbf{MN}\}$.

On peut aussi former des invariants à partir de tenseurs et de vecteurs. Par exemple : $\{\mathbf{U}_1 \mathbf{M} \mathbf{U}_1\}$, $\{\mathbf{U}_1 \mathbf{M} \mathbf{U}_2\}$, $\{\mathbf{U}_1 \mathbf{M}^2 \mathbf{U}_2\}$, etc.

Dans le cas particulier le plus courant d'un espace en trois dimensions ($n = 3$) :

$$I_1 = \{\mathbf{M}\} \quad (2.14)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \left(\{\mathbf{M}\}^2 - \{\mathbf{M}^2\} \right) \quad (2.15)$$

$$I_3 = \frac{1}{6} \left(\{\mathbf{M}\}^3 - 3 \{\mathbf{M}\} \{\mathbf{M}^2\} + 2 \{\mathbf{M}^3\} \right) \quad (2.16)$$

On a aussi une relation entre les invariants principaux et les valeurs propres :

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad (2.17)$$

$$I_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 \quad (2.18)$$

$$I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (2.19)$$

2.5.5 Réalisabilité du tenseur de Reynolds

La réalisabilité du tenseur de Reynolds impose donc qu'il soit une forme quadratique positive. On peut écrire cette propriété sous différentes formes :

- ✓ Ses 3 valeurs propres sont positives.

✓ Ses 3 déterminants diagonaux principaux sont positifs :

$$\begin{cases} \overline{u^2} \geq 0 \\ \overline{uv^2} \leq \overline{u^2} \overline{v^2} \\ \overline{u^2} \overline{v^2} \overline{w^2} + 2 \overline{uv} \overline{uw} \overline{vw} - \overline{v^2} \overline{uw^2} - \overline{w^2} \overline{uv^2} - \overline{u^2} \overline{vw^2} \geq 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

En fait, par permutation des indices, on obtient d'autres relations qui sont donc redondantes : $\overline{v^2} \geq 0$, $\overline{w^2} \geq 0$, $\overline{uw^2} \leq \overline{u^2} \overline{w^2}$, $\overline{vw^2} \leq \overline{v^2} \overline{w^2}$.

✓ Ses 3 invariants principaux sont positifs :

$$I_1^R \geq 0 \quad ; \quad I_2^R \geq 0 \quad ; \quad I_3^R \geq 0$$

Ces propriétés peuvent être reformulée en termes d'invariants du tenseur d'anisotropie. L'intérêt principal de cette approche vient du fait que les invariants du tenseur d'anisotropie peuvent être plus facilement reliés à la structure de la turbulence.

L'école américaine définit le tenseur d'anisotropie comme :

$$b_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{2k} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \quad (2.21)$$

contrairement à l'école anglaise qui le définit comme :

$$a_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \quad (2.22)$$

Les invariants principaux du tenseur $\mathbf{b}$ sont alors notés I , II et III :

$$I = \{\mathbf{b}\} = 0 \quad (2.23)$$

$$II = \frac{1}{2}(\{\mathbf{b}\}^2 - \{\mathbf{b}^2\}) = -\frac{\{\mathbf{b}^2\}}{2} \quad (2.24)$$

$$III = \frac{1}{6}(\{\mathbf{b}\}^3 - 3\{\mathbf{b}\}\{\mathbf{b}^2\} + 2\{\mathbf{b}^3\}) = \frac{\{\mathbf{b}^3\}}{3} \quad (2.25)$$

L'analyse montre (cf. par exemple Lumley 1978 [24] ou Schiestel 1998) que la réalisabilité du tenseur de Reynolds implique que les invariants II et III doivent rester à l'intérieur du « triangle » de la figure 2.3, dit *triangle de Lumley*. Les côtés de ce triangle sont définis à partir des quantités suivantes :

$$G = \frac{1}{9} + 3 III + II \quad (2.26)$$

$$H = \frac{III}{2(-II/3)^{3/2}} \quad (2.27)$$

- ✓ La droite $G = 0$ correspond au cas limite où l'une des valeurs propres du tenseur de Reynolds est nulle (turbulence à deux composantes), tendant vers une turbulence à une composante (annulation d'une seconde valeur propre) au sommet du triangle.
- ✓ Les courbes $H = -1$ et $H = 1$ correspondent à une turbulence axisymétrique (2 valeurs propres égales). $H = -1$ lorsque la troisième valeur propre est inférieure aux deux autres et $H = 1$ lorsque la troisième valeur propre est supérieure aux deux autres.

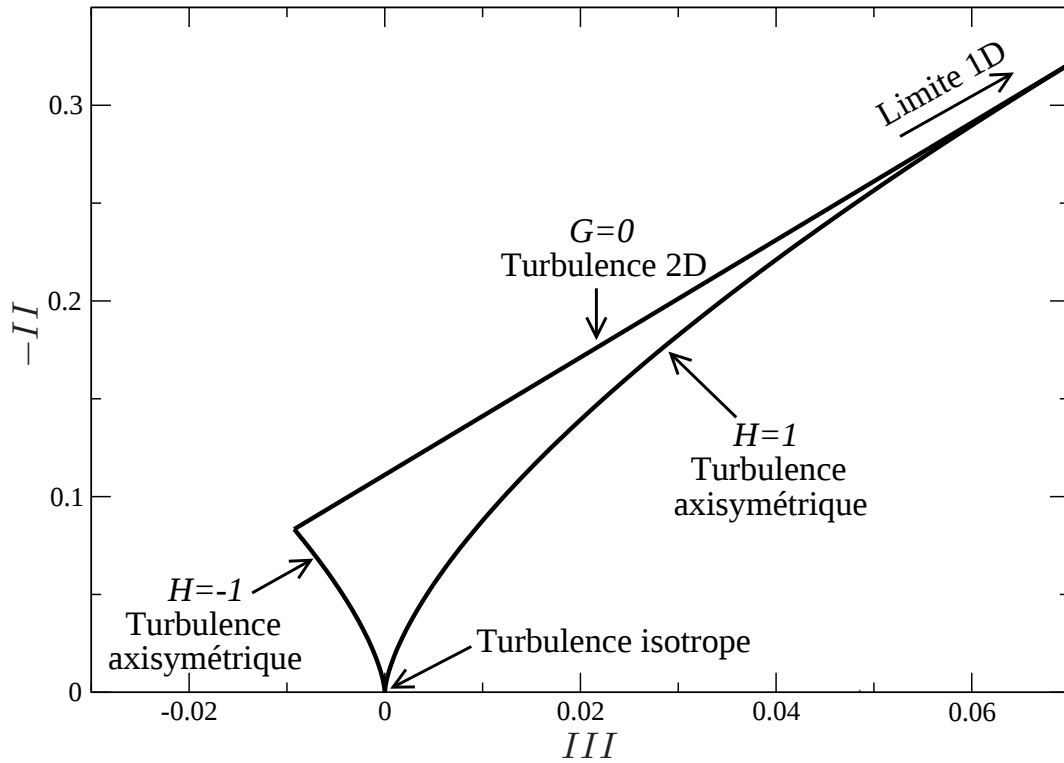


FIG. 2.3 – Triangle de réalisabilité de Lumley.

La figure 2.4 montre l'exemple d'un écoulement de canal plan. À la paroi, la composante de vitesse fluctuante normale à la paroi (ici v) tend plus vite vers zéro que les deux autres (limite à deux composantes) : c'est pourquoi quand $y^+ \rightarrow 0$, on tend vers la limite à deux composantes, c'est-à-dire vers la droite $G = 0$. En s'éloignant de la paroi, on passe, aux alentours de $y^+ = 8$, par un point où la composante $\overline{u^2}$ est très supérieure aux deux autres : on s'approche donc de la pointe du triangle qui correspond à la limite à une composante. Ensuite, en continuant à se déplacer en direction du centre du canal, on s'approche de plus en plus de l'isotropie.

Le paramètre $G = \frac{1}{9} + 3III + II$ est un invariant qui permet donc de caractériser une turbulence à 2 composantes. Il peut être utilisé en modélisation pour sensibiliser les modèles à l'approche d'une paroi ou d'une surface libre.

L'invariant H quant à lui peut être utilisé pour caractériser un état axisymétrique de la turbulence.

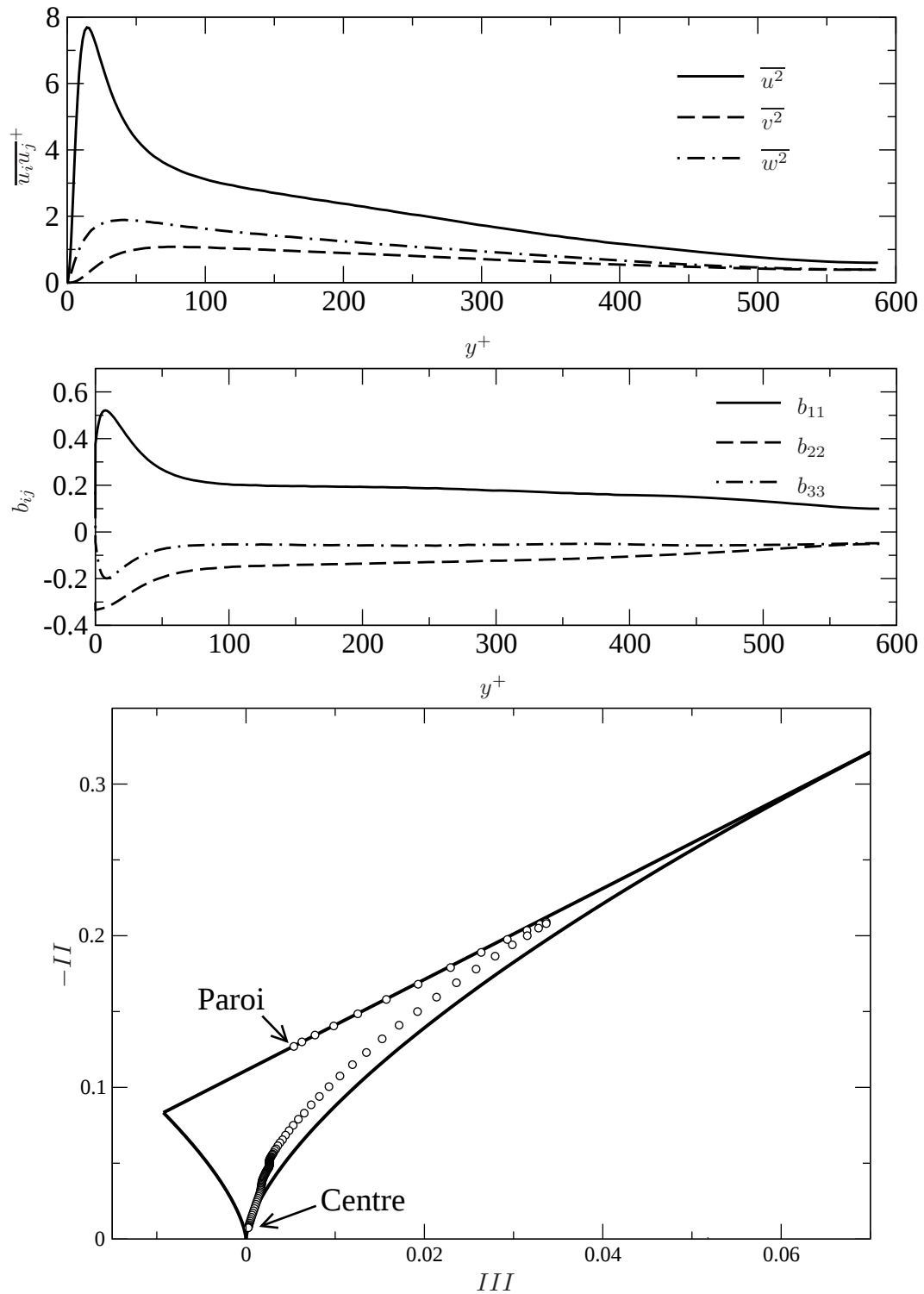


FIG. 2.4 – Écoulement de canal plan. En haut : profils des composantes du tenseur de Reynolds et du tenseur d'anisotropie. En bas : trajectoire suivie dans le triangle de réalisabilité. Données de DNS en canal à $Re_\tau = 590$ (Moser *et al.*, 1999).

2.5.6 Conséquences sur les modèles de turbulence

L'équation de transport des tensions de Reynolds (1.26) se résume à :

$$\frac{d\overline{u_i u_j}}{dt} = P_{ij} + D_{ij}^\nu + D_{ij}^T + \phi_{ij}^* - \varepsilon_{ij} \quad (2.28)$$

Pour que le modèle soit réalisable, il faut par exemple s'assurer que $\overline{u^2} \geq 0$ en toutes circonstances. On peut formuler cette contrainte de la manière suivante :

$$\text{Lorsque } \overline{u^2} = 0, \text{ on doit avoir } \frac{d\overline{u^2}}{dt} = 0 \text{ et } \frac{d^2\overline{u^2}}{dt^2} > 0.$$

En pratique, il est plus facile d'imposer une condition dite *faible*, qui s'écrit :

$$\text{Lorsque } \overline{u^2} = 0, \text{ on doit avoir } \frac{d\overline{u^2}}{dt} > 0.$$

L'inconvénient de cette contrainte est qu'elle empêche la turbulence de s'approcher d'un état à deux composantes.

Ce raisonnement peut être appliqué à toute quantité qui doit rester positive, comme par exemple $\overline{u^2 v^2} - \overline{uv}^2$, ou les invariants principaux du tenseur de Reynolds, *etc.* En pratique, écrire des équations de transport pour ces quantités peut devenir vite compliqué.

2.5.7 Conclusions sur la réalisabilité

La contrainte de réalisabilité fournit un certain nombre de relations qui permettent de guider le développement de modèles. Cependant, elle est très difficile à assurer dans toutes les situations. En pratique, on pourra se contenter de l'assurer dans des situations simplifiées : par exemple, en considérant des écoulements de turbulence homogène, on se débarrasse des termes de transport et on peut se concentrer sur les termes ϕ_{ij}^* et ε_{ij} .

Concernant l'importance d'assurer la réalisabilité, il y a deux écoles : La première, celle de Lumley, considère que la réalisabilité est très importante :

- ✓ La réalisabilité permet d'assurer qu'on n'observera pas des solutions aberrantes comme des énergies négatives. Ce risque existe dans des situations où une composante est radicalement amortie : près d'une paroi, en présence d'une forte stratification thermique (stable) ou en présence d'une rotation d'ensemble.
- ✓ Même dans des situations où on n'observe pas de telles solutions, elle est utile à la stabilité numérique : les calculs étant souvent initialisés par des valeurs nulles, on peut facilement passer *transitoirement* par des énergies négatives, ce qui risque de faire « exploser » les calculs. La réalisabilité est donc un facteur de *robustesse*.
- ✓ C'est un outil qui permet de guider le modélisateur dans le choix du modèle.
- ✓ C'est plus élégant du point de vue mathématique.

La seconde école, celle de Speziale, considère que la réalisabilité ne doit pas servir de guide à la modélisation :

- ✓ Elle conduit à des modèles complexes, souvent non-linéaires : le gain en robustesse numérique est donc largement compensé par la perte de linéarité.
- ✓ Les situations dans lesquelles des solutions non-réalisables sont observées sont des situations extrêmes, à la limite du « pathologique ».
- ✓ On peut très bien éviter l'apparition de solutions non-réalisables par des corrections a posteriori des modèles. Par exemple :
 - ↪ En modifiant les coefficients du modèle pour qu'ils assurent la réalisabilité quand on s'approche de situations dangereuses (par exemple en les rendant sensibles aux invariants G et H du triangle de Lumley).
 - ↪ En faisant du clipping : par exemple, on programme un test de la positivité des tensions de Reynolds diagonales et si elles sont négatives, on les remplace par des valeurs positives. C'est ce qui est fait dans la plupart des codes de calculs.

2.5.8 Petit exemple

Considérons une expérience de retour à l'isotropie d'une turbulence homogène initialement anisotrope (cf. § 4.2.3). L'équation de transport des tensions de Reynolds (1.26) se réduit à :

$$\frac{d\overline{u_i u_j}}{dt} = P_{ij} + D_{ij}^\nu + D_{ij}^T + \phi_{ij}^* - \varepsilon_{ij} = \phi_{ij}^* - \varepsilon_{ij} \quad (2.29)$$

Le modèle le plus simple pour $\phi_{ij}^* - \varepsilon_{ij}$ (modèle de Rotta) s'écrit :

$$\phi_{ij}^* - \varepsilon_{ij} = -C_1 \varepsilon a_{ij} - \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_i u_j} + \frac{2}{3} (C_1 - 1) \varepsilon \delta_{ij} \quad (2.30)$$

Avec le coefficient $C_1 = 1.8$ calibré pour reproduire correctement le retour à l'isotropie.

La contrainte forte de réalisabilité impose : $C_1 = 1$ quand $\overline{u_i u_j} = 0$. Le modèle de Rotta n'est donc pas réalisable.

Une solution simple pour rendre le modèle réalisable est de faire varier C_1 en fonction des invariants : Fu, Launder et Leschziner (1987) [11] proposent par exemple

$$C_1 = 1 + 3,1\sqrt{A_2 A} \quad (2.31)$$

On voit ici apparaître les invariants définis par l'école anglaise :

$$A_2 = \{\mathbf{a}^2\} = a_{ij}a_{ij} \quad ; \quad A_3 = \{\mathbf{a}^3\} = a_{ij}a_{jk}a_{ki} \quad ; \quad A = 1 - \frac{9}{8}(A_2 - A_3)$$

Le coefficient C_1 tend alors vers 1 quand une des composantes du tenseur de Reynolds tend vers zéro car l'invariant A tend vers 0 en turbulence bi-composante. Le modèle est alors réalisable (sur ce cas particulier), mais il est devenu non-linéaire !

2.6 Universalité

Le but ultime de la modélisation est d'écrire un modèle qui s'applique à tous les écoulements, ou au moins à une grande classe d'écoulements (par exemple, les écoulements monophasiques de fluide incompressible). Ce but paraît bien évidemment utopique, dans la mesure où l'application de la moyenne de Reynolds conduit à une gigantesque perte d'information : comment espérer qu'un modèle soit capable de reproduire correctement *tous les phénomènes*, dans *toutes les situations*.

Un consensus s'établit actuellement pour reconnaître que la modélisation n'atteindra jamais ce but. On doit donc plutôt attendre d'un modèle les caractéristiques suivantes :

- ✓ Qu'il soit applicable dans toutes les situations.
- ✓ Que ses résultats soient satisfaisants sur la plus large gamme possible d'écoulements.
- ✓ Que ses limitations soient bien identifiables.

C'est pourquoi de nombreux programmes de recherche, en particulier des programmes européens, ont pour objectif d'appliquer les modèles sur de nombreux cas tests, de manière à évaluer le potentiel des différents modèles, leurs défauts spécifiques et éventuellement les marges d'erreurs auxquelles ils conduisent.

On doit cependant conserver impérativement une **forme faible de l'universalité** : Les coefficients d'un modèle doivent faire l'objet d'une procédure de calibration sur des écoulements simples et être ensuite considérés comme « universels », c'est-à-dire applicables à tous les écoulements. Il n'est pas admissible de modifier les coefficients d'un modèle pour « faire coller » les résultats avec les données expérimentales. On tomberait alors dans le domaine du « bidouillage », qui a fait beaucoup de tort à la mécanique des fluides numérique.

2.7 Cohérence avec les résultats connus

Nous avons à notre disposition une somme considérable de résultats venant d'études expérimentales et numériques (DNS, LES). Il est donc illusoire d'essayer de trouver une formulation qui colle avec toutes les données. Cependant, on se comparera à des situations simples (turbulence homogène, couche limite, canal, jets, couches de mélange, *etc.*) pour :

- ✓ Calibrer des coefficients : par exemple, le coefficient $C_{\varepsilon 2}$ du modèle k - ε peut être calibré par rapport à l'expérience de décroissance d'une turbulence homogène et isotrope. En effet, dans cette situation, on a :

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\varepsilon \quad ; \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}$$

Ce système admet comme forme limite quand $t \rightarrow \infty$:

$$k = \frac{k_0}{\gamma^{-\gamma}} \frac{t^{-\gamma}}{\tau_0^{-\gamma}}$$

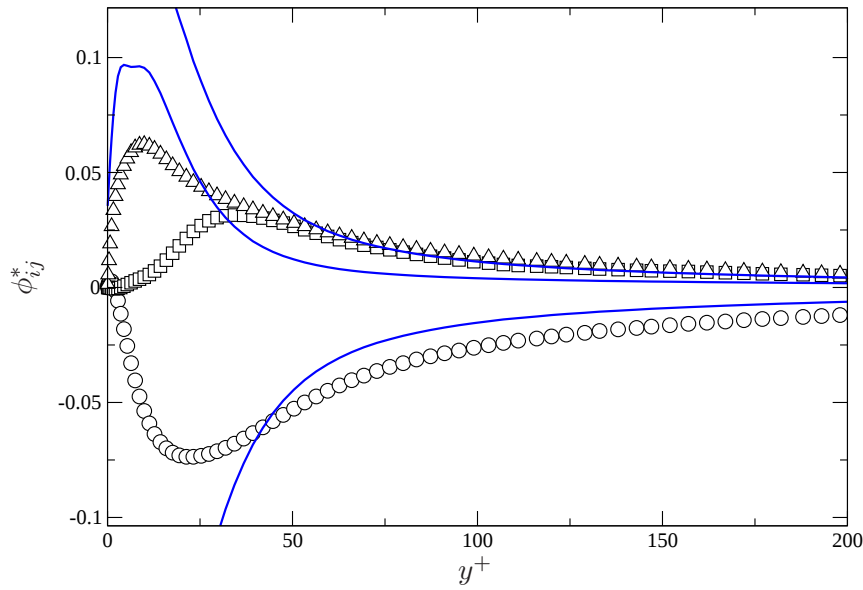


FIG. 2.5 – Test a priori du modèle de Rotta utilisant des données de DNS en canal à $Re_\tau = 590$ (Moser *et al.*, 1999). Symboles = DNS ($\circ \phi_{11}^*$, $\square \phi_{22}^*$, $\triangle \phi_{33}^*$). Lignes = Modèle de Rotta.

où $\gamma = 1/(C_{\varepsilon 2} - 1)$. Les données expérimentales indiquent que l'énergie turbulente décroît environ comme une puissance 1,1 du temps. C'est pourquoi la valeur classique du coefficient $C_{\varepsilon 2}$ est 1,92. Des données expérimentales plus récentes plaident pour des valeurs de γ légèrement plus fortes, ce qui a conduit certains auteurs à prendre $C_{\varepsilon 2} = 1,83$.

- ✓ Vérifier que les modèles reproduisent correctement l'évolution spatiale de la grandeur qu'il représentent. On dispose pour cela de deux types de tests :
 - ↪ les tests *a priori* ;
 - ↪ les tests *a posteriori*.

Tests a priori : un modèle complet est constitué de différents termes représentant, par une relation algébrique, une corrélation inconnue. Par exemple, dans les modèles au second ordre, on rencontre souvent le modèle de Rotta pour la partie lente du terme de redistribution ϕ_{ij}^* :

$$\phi_{ij}^l = -C_1 \varepsilon a_{ij}$$

On dispose parfois, grâce à la simulation directe, à la fois de la valeur exacte de ϕ_{ij}^l et de celle de ε et de a_{ij} . On peut donc calculer :

$$-C_1 \varepsilon^{\text{DNS}} a_{ij}^{\text{DNS}}$$

et le comparer à $\phi_{ij}^{l,\text{DNS}}$. Si le modèle de Rotta est « bon », on doit trouver la même chose.

Par exemple, la figure 2.5 montre le test a priori du modèle de Rotta en écoulement de canal. On voit que le modèle ne représente pas bien le terme de redistribution, ni près de la paroi, ni loin de la paroi.

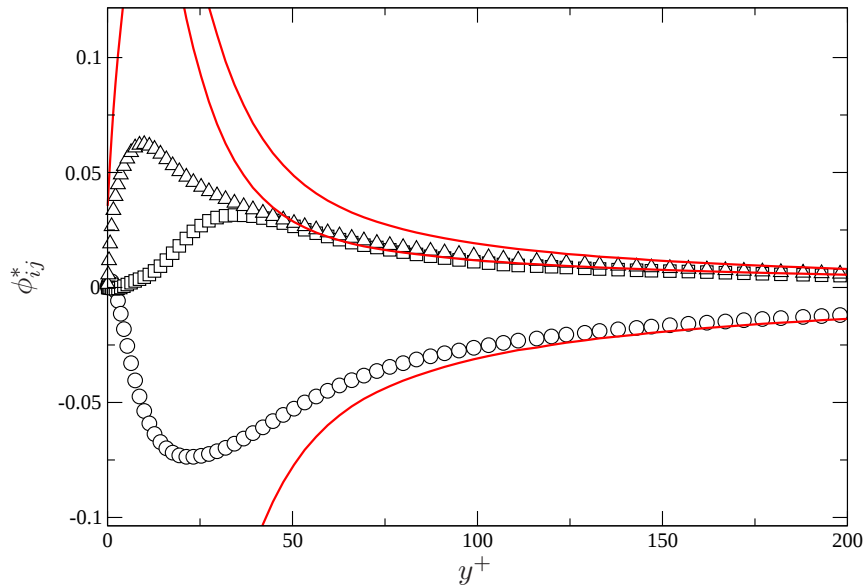


FIG. 2.6 – Test a priori du modèle Rotta+IP utilisant des données de DNS en canal à $Re_\tau = 590$ (Moser *et al.*, 1999). Symboles = DNS ($\circ \phi_{11}^*$, $\square \phi_{22}^*$, $\triangle \phi_{33}^*$). Lignes = Modèle Rotta+IP.

On a vu qu'il y avait également une partie rapide dans le terme de redistribution, qui dépend du cisaillement moyen. Naot *et al.* (1973) [36] ont proposé le modèle suivant :

$$\phi_{ij}^r = -C_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right)$$

connu sous le nom de *modèle IP* (isotropisation de la production). Il est associé au modèle de Rotta pour former un modèle complet de la redistribution (parties lente et rapide), connu sous le nom de *modèle Rotta+IP*, ou *premier modèle de Launder, Reece et Rodi (LRR)*.

Le test a priori de ce modèle est présenté sur la figure 2.6. Ce modèle marche mieux que le modèle de Rotta seul dans la zone logarithmique, mais ne résout pas le problème de la zone de proche paroi. Nous verrons plus loin les raisons de cette déficience et les remèdes à y apporter (prise en compte de l'effet de blocage).

Tests a posteriori Il s'agit tout simplement de résoudre les équations différentielles constituant le modèle (on n'introduit aucune information sur l'écoulement venant de la base de données expérimentale ou numérique) et de comparer les résultats avec l'expérience, la DNS ou la LES.

On peut comparer à différents niveaux :

- ✓ Des grandeurs globales (traînée, portance, *etc.*). C'est parfois tout ce dont on dispose (expérience avec des balances aérodynamiques uniquement).
- ✓ Les variables résolues (vitesses moyennes, énergie turbulente, tensions de Reynolds, *etc.*).
- ✓ Les termes de bilans : ce qu'on appelle le bilan d'une quantité est la somme des termes qui composent son équation de transport, avec tous les termes dans le même membre. Le bilan doit donc être nul.

Par exemple, en écoulement statistiquement stationnaire, le bilan d'énergie turbulente s'écrit :

$$\begin{aligned} & \text{Production} - \text{Dissipation} + \text{Diffusion moléculaire} + \\ & \text{Transport turbulent} + \text{« Diffusion » par la pression} - \text{Convection} = 0 \end{aligned}$$

Si on dispose de certains de ces termes dans la base de données expérimentale ou numérique, on peut faire des comparaisons, qui donnent une image beaucoup plus fine du comportement du modèle que la simple comparaison des variables résolues.

Exemple : les figures 2.7, 2.8 et 2.9 voici des pages extraites des actes du workshop ERCOFTAC qui s'est déroulé à Poitiers en 2002. Il s'agit d'un exercice collectif de comparaison des résultats donnés par différents modèles sur un cas test donné, l'écoulement au-dessus d'une série périodique de collines. On voit que la comparaison s'effectue à différents niveaux : lignes de courant (point de décollement, de recollement, longueur de recirculation, *etc.*) ; profils de vitesses, d'énergie turbulente, des tensions de Reynolds ; bilans d'énergie turbulente.

Il est important de noter que l'amélioration de la modélisation d'un terme constatée grâce aux tests a priori ne garantit pas que le modèle complet donnera de bons résultats a posteriori ! On peut dégrader les prédictions obtenues en résolvant l'équation différentielle

$$\frac{d\overline{u_i u_j}}{dt} = P_{ij} + D_{ij}^\nu + D_{ij}^T + \phi_{ij}^* - \varepsilon_{ij}$$

alors qu'on a amélioré les performances par exemple du modèle pour le terme ϕ_{ij}^* en tests a priori. Les résultats donnés par le modèle complet sont en effet souvent meilleurs que ceux donnés par chacun des termes individuels dans les tests a priori. Cela vient du fait qu'une bonne calibration des coefficients du modèle permet une compensation mutuelle des erreurs faites sur les différents termes du bilan. Malgré cette remarque, les tests a priori sont très utiles pour étudier si un modèle représente bien les mécanismes physiques et permettent souvent de comprendre pourquoi un modèle ne marche pas bien dans un cas précis.

2.8 Robustesse numérique

Comme précisé en introduction de ce cours, les modèles de turbulence ne sont pas faits pour rester confinés au monde de la recherche, mais pour être utilisés largement dans l'industrie. Les problèmes numériques rencontrés pour intégrer les systèmes d'équations (difficultés de convergence, voire divergence) sont très souvent sous-estimés par les modélisateurs. On doit donc trouver un compromis entre deux contraintes très importantes :

- ✓ le besoin de bien représenter la physique ;
- ✓ la robustesse numérique et la simplicité d'utilisation.

Par exemple, pour modéliser la partie lente du terme de redistribution, Speziale, Sarkar et Gatski (1991) [47] proposent la forme non-linéaire suivante :

$$\phi_{ij}^l = - \left(C_1 + C_1^* \frac{P}{\varepsilon} \right) \varepsilon b_{ij} + C_2 \varepsilon \left(b_{ik} b_{kj} - \frac{1}{3} b_{kl} b_{kl} \delta_{ij} \right) \quad (2.32)$$

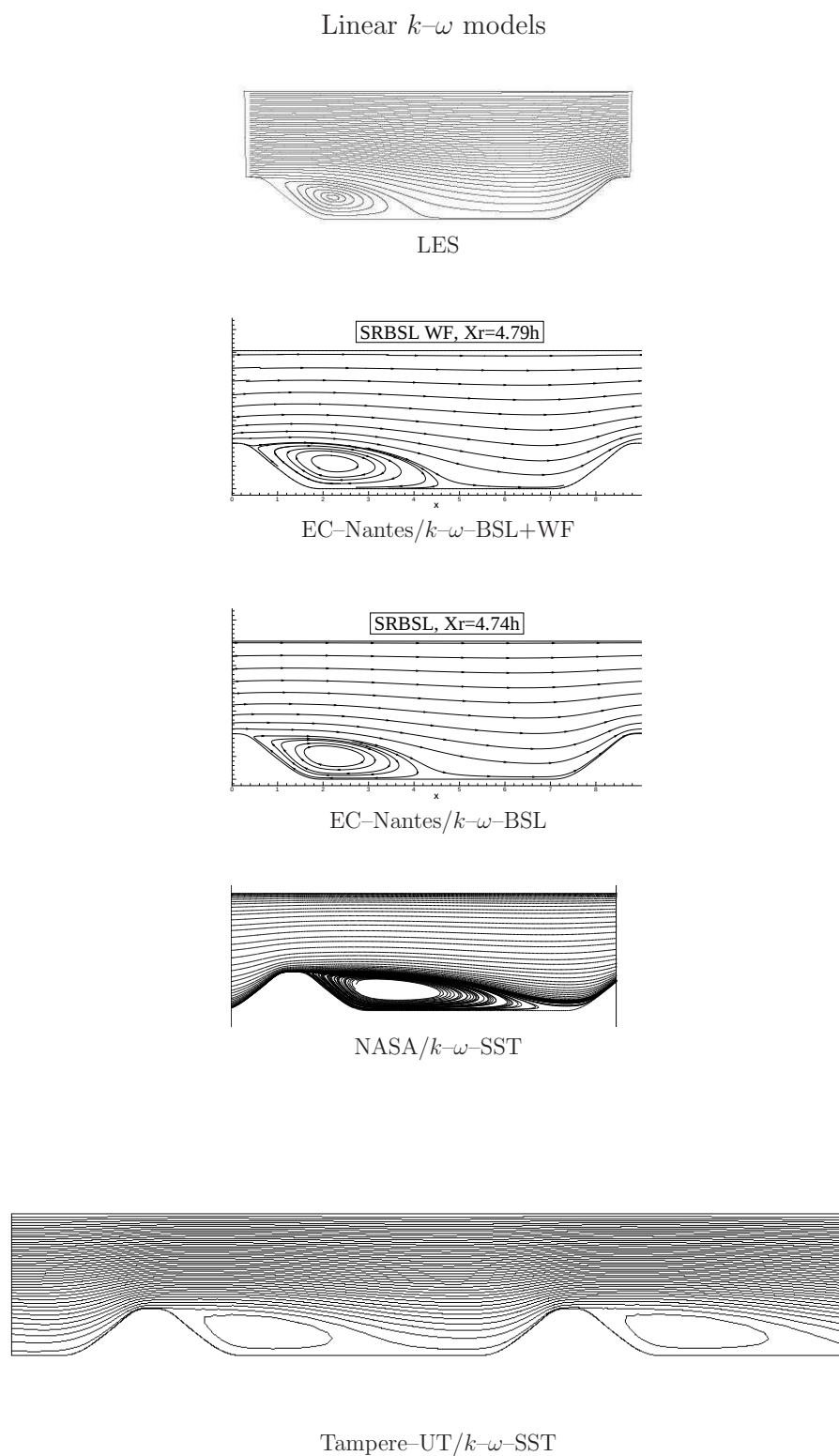


FIG. 2.7 – Écoulement au-dessus d'une série périodique de collines. Données de référence : QDNS (Temmerman & Leschziner, 2001) [48]. Lignes de courant. D'après Manceau *et al.* [29]

Flow over a 2-D hill: PROFILES

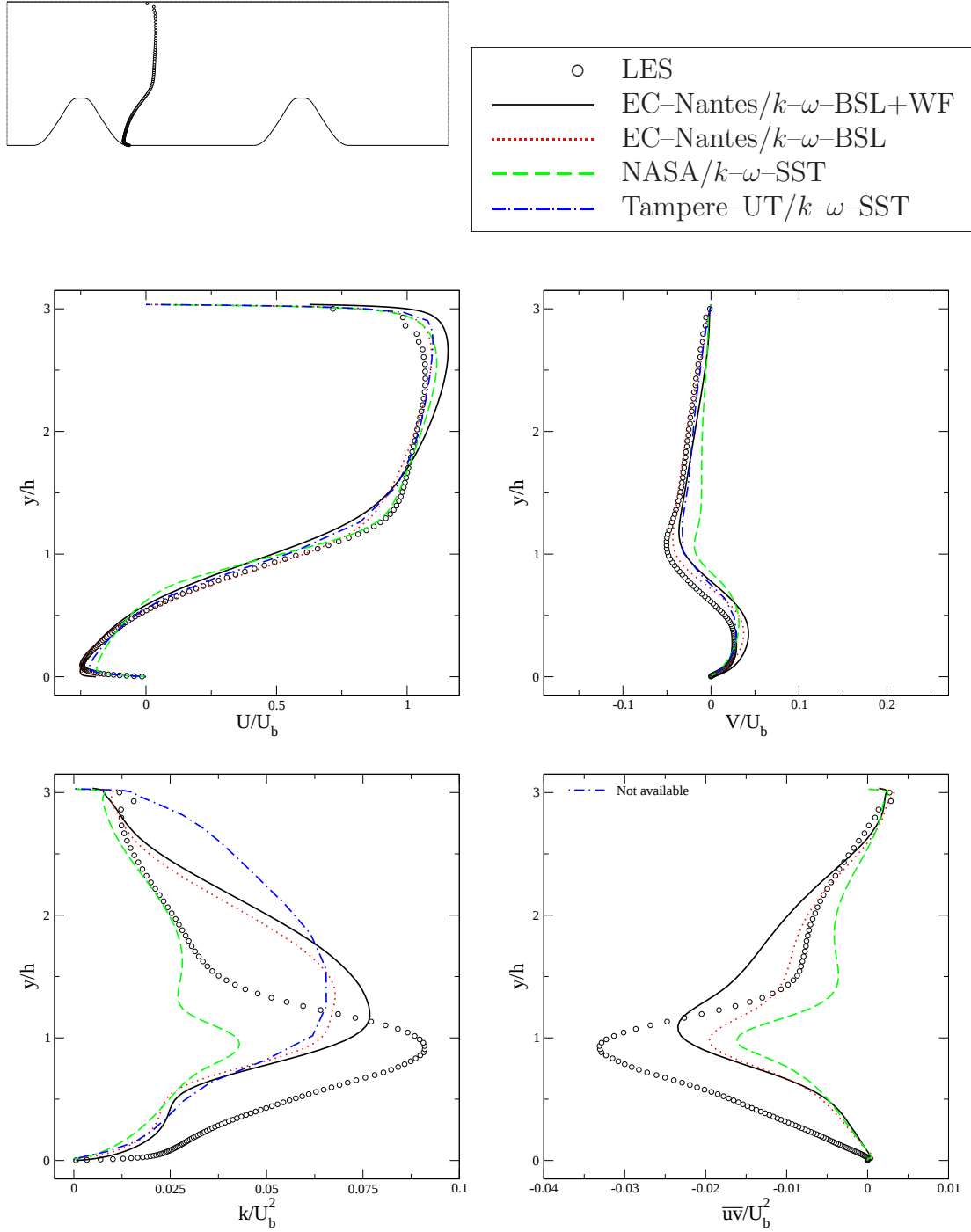
Location: 004 ($x/h = 2.00$)Linear k - ω models

FIG. 2.8 – Même cas que figure 2.7. Profils de vitesse, d'énergie turbulente et de tension de cisaillement.

Flow over a 2-D hill: BUDGETS

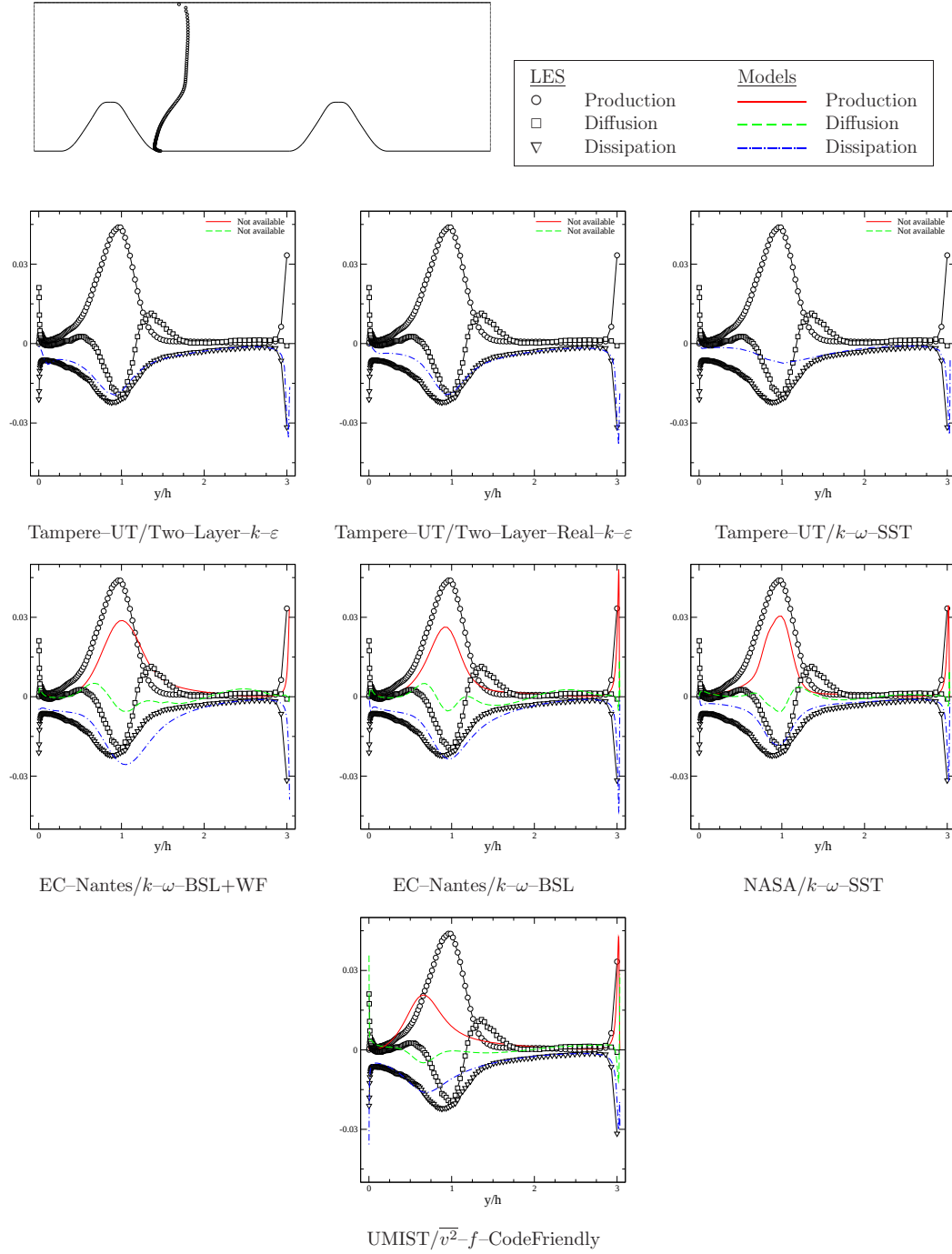
Linear and quasilinear $k-\varepsilon$ modelsLinear $k-\omega$ models $\overline{v^2-f}$ modelLocation: 004 ($x/h = 2.00$)

FIG. 2.9 – Même cas que figure 2.7. Bilans d'énergie turbulente.

Le terme non-linéaire est nécessaire pour reproduire correctement l'expérience de retour à l'isotropie d'une turbulence homogène initialement anisotrope (à la fois pour les fortes et les faibles anisotropies). Il s'avère cependant avoir peu d'influence dans la plupart des écoulements courants. En revanche, il introduit une non-linéarité qui complique l'intégration numérique du modèle. Ce terme est donc très souvent retiré du modèle.

On remarquera que l'expérience a montré qu'on peut souvent améliorer les schémas numériques pour résoudre les problèmes d'instabilité : simplifier les modèles n'est donc pas forcément la meilleure solution.

Chapitre 3

Fermeture au premier ordre

3.1 Loi de comportement

Un modèle au premier ordre consiste en une loi de comportement reliant, dans les équations de Navier–Stokes moyennées :

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} \quad (3.2)$$

les corrélations d'ordre deux ($\overline{u_i u_j}$) aux corrélations d'ordre un. On cherche donc une relation de la forme

$$\mathbf{R} = f(\nu, \rho, P, \mathbf{U}, V_1, V_2, V_3, \dots) \quad (3.3)$$

où f est une fonctionnelle quelconque : elle peut notamment faire intervenir les variables en des points différents et des temps différents. Les V_i sont les variables d'état qui permettent de caractériser globalement l'état de la turbulence ($k, \varepsilon, \dots$).

Plusieurs remarques vont permettre de simplifier la suite :

- ✓ On va supposer que f ne fait intervenir que l'instant t (instantanéité) : on exclut alors, arbitrairement, la possibilité d'un *effet mémoire* de la turbulence, qui est pourtant bien réel.
- ✓ La pression moyenne n'apparaît pas dans l'équation exacte des tensions de Reynolds : on n'a donc aucune raison de la faire intervenir dans le modèle.
- ✓ À haut Reynolds, le rôle de la viscosité est négligeable. On va donc supprimer ν de la relation pour l'instant. On devra se poser la question pour une turbulence à très bas Reynolds.
- ✓ Comme très souvent en mécanique des milieux continus, on fait une hypothèse de *localité* : la relation ne fait intervenir que le point $\mathbf{x}$. On ne verra donc apparaître dans la loi de comportement que des variables et leurs dérivées prises au point $\mathbf{x}$.

- ✓ Le plus souvent, on ne considère que les dérivées premières, c'est-à-dire qu'on considère que les variables et leur dérivées premières sont suffisantes pour décrire les propriétés de la turbulence (hypothèse classique en mécanique des milieux continus, dite *hypothèse des milieux matériellement simples*).
- ✓ En pratique, on ne va conserver les dérivées premières que pour la vitesse moyenne : les gradients de vitesse interviennent dans l'équation exacte des tensions de Reynolds (et jouent un rôle physique déterminant dans les termes de production).
- ✓ La contrainte d'objectivité impose que $\mathbf{U}$ ne puisse pas intervenir, car $\mathbf{R}$ est une quantité objective.
- ✓ Cette même contrainte impose que $\nabla \mathbf{U}$, qui n'est pas objectif, soit décomposé en tenseur des taux de déformation $\mathbf{S}$, qui est objectif, et tenseur des taux de rotation $\mathbf{W}$, qui est rendu objectif en y incluant le taux de rotation du référentiel.

Ces contraintes et hypothèses nous conduisent à la formulation suivante :

$$\mathbf{R} = f(\rho, \mathbf{S}, \mathbf{W}, V_1, V_2, V_3, \dots) \quad (3.4)$$

On sait que les propriétés diffusives de la turbulence doivent être décrites par deux échelles caractéristiques ($\nu_t = \ell u = \ell^2 \tau^{-1}$). ℓ et τ sont respectivement l'échelle intégrale de la turbulence et le temps de retournement des grands tourbillons. On doit donc, si on veut représenter correctement l'effet diffusif de la turbulence, introduire ℓ et τ comme variables d'état.

$$\mathbf{R} = f(\rho, \mathbf{S}, \mathbf{W}, \ell, \tau)$$

L'analyse dimensionnelle impose que cette relation soit valable quelles que soient les unités choisies pour la masse, la longueur et le temps. On peut choisir arbitrairement comme grandeurs de référence :

$$L = \ell \quad ; \quad T = \tau \quad ; \quad M = \rho \ell^3$$

Dans le nouveau système d'unités, la relation s'écrit :

$$\frac{\mathbf{R}}{\ell^2 \tau^{-2}} = f(1, \mathbf{S}^*, \mathbf{W}^*, 1, 1) \quad (3.5)$$

où $\mathbf{S}^* = \tau \mathbf{S}$ et $\mathbf{W}^* = \tau \mathbf{W}$, ce qui se réduit à :

$$\frac{\mathbf{R}}{\ell^2 \tau^{-2}} = f(\mathbf{S}^*, \mathbf{W}^*) \quad (3.6)$$

La théorie des bases d'intégrité (cf. par exemple Spencer, 1971, ou Pope, 1975) [45, 37] nous enseigne qu'une telle relation entre tenseurs s'écrit sous la forme générale :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{R}}{\ell^2 \tau^{-2}} = & g_0 \mathbf{I} + g_1 \mathbf{S}^* + g_2 (\mathbf{S}^* \mathbf{W}^* - \mathbf{W}^* \mathbf{S}^*) + g_3 \left(\mathbf{S}^{*2} - \frac{1}{3} \{ \mathbf{S}^{*2} \} \mathbf{I} \right) + \\ & g_4 \left(\mathbf{W}^{*2} - \frac{1}{3} \{ \mathbf{W}^{*2} \} \mathbf{I} \right) + g_5 (\mathbf{W}^* \mathbf{S}^{*2} - \mathbf{S}^{*2} \mathbf{W}^*) + \\ & g_6 \left(\mathbf{W}^{*2} \mathbf{S}^* + \mathbf{S}^* \mathbf{W}^{*2} - \frac{2}{3} \{ \mathbf{S}^* \mathbf{W}^{*2} \} \mathbf{I} \right) + g_7 (\mathbf{W}^* \mathbf{S}^* \mathbf{W}^{*2} - \mathbf{W}^{*2} \mathbf{S}^* \mathbf{W}^*) + \\ & g_8 (\mathbf{S}^* \mathbf{W}^* \mathbf{S}^{*2} - \mathbf{S}^{*2} \mathbf{W}^* \mathbf{S}^*) + g_9 \left(\mathbf{W}^{*2} \mathbf{S}^{*2} + \mathbf{S}^{*2} \mathbf{W}^{*2} - \frac{2}{3} \{ \mathbf{S}^{*2} \mathbf{W}^{*2} \} \mathbf{I} \right) + \\ & g_{10} (\mathbf{W}^* \mathbf{S}^{*2} \mathbf{W}^{*2} - \mathbf{W}^{*2} \mathbf{S}^{*2} \mathbf{W}^*) \end{aligned} \quad (3.7)$$

où les coefficients g_i ne sont pas des constantes, mais des fonctions qui ne peuvent dépendre que des invariants formés à partir des tenseurs $\mathbf{S}^*$ et $\mathbf{W}^*$: $\{\mathbf{S}^{*2}\}$, $\{\mathbf{W}^{*2}\}$, $\{\mathbf{S}^{*3}\}$, $\{\mathbf{W}^{*2}\mathbf{S}^*\}$, $\{\mathbf{W}^{*2}\mathbf{S}^*\}$, $\{\mathbf{S}^{*2}\mathbf{W}^{*2}\}$.

On voit donc que malgré des hypothèses déjà très restrictives (instantanéité, localité, ...), on aboutit à une relation très complexe, avec des termes non-linéaires d'ordre 5. Heureusement, grâce au théorème de Cayley–Hamilton, il ne peut pas apparaître de puissances supérieures à deux de chaque tenseur. Une relation aussi complexe est inapplicable :

- ✓ Le modèle serait très difficile à intégrer numériquement ;
- ✓ Le processus de calibration serait également très difficile : comment trouver les valeurs des dix coefficients à partir d'écoulements simples ?

Les termes les plus non-linéaires doivent donc être « sacrifiés ».

Modèles cubiques

Craft, Launder et Suga (1996) [6] ont montré qu'il était nécessaire de retenir les termes cubiques pour reproduire les *effets de courbure* (sensibilité du tenseur de Reynolds à la courbure des lignes de courant). C'est pourquoi dans certains codes commerciaux, un modèle cubique est proposé. La loi de comportement est alors tronquée en prenant les coefficients de g_7 à g_{10} nuls.

Modèles quadratiques

En écoulement statistiquement bidimensionnel (les grandeurs moyennes ne dépendent pas de z , par exemple), les 4 premiers tenseurs de la loi de comportement forment une base d'intégrité. La relation se simplifie donc en :

$$\frac{\mathbf{R}}{\ell^2 \tau^{-2}} = g_0 \mathbf{I} + g_1 \mathbf{S}^* + g_2 (\mathbf{S}^* \mathbf{W}^* - \mathbf{W}^* \mathbf{S}^*) + g_3 \left(\mathbf{S}^{*2} - \frac{1}{3} \{\mathbf{S}^{*2}\} \mathbf{I} \right) \quad (3.8)$$

Si on fait le choix (le plus courant) d'exprimer les échelles ℓ et τ en fonction de k et ε , on obtient finalement :

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - 2C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} S_{ij} + g_2 \frac{k^3}{\varepsilon^2} (S_{ik} W_{kj} - W_{ik} S_{kj}) + g_3 \frac{k^3}{\varepsilon^2} \left(S_{ik} S_{kj} - \frac{1}{3} S_{kl} S_{kl} \delta_{ij} \right) \quad (3.9)$$

On commence à voir apparaître des termes connus. En effet, en posant $g_1 = -C_\mu$, on a fait apparaître la viscosité turbulente $\nu_t = C_\mu k^2 / \varepsilon$. Ce type de modèle est également intégré dans certains codes de calcul industriels. Le développement précédent montre que les modèles quadratiques sont les modèles les plus généraux pour des écoulements bidimensionnels. Il sont également utilisés en écoulement tridimensionnel, en tant que modèles simplifiés.

Modèles linéaires

Enfin, on peut décider, pour des raisons de simplicité et de robustesse numérique, de ne conserver que les termes linéaires. On arrive alors à :

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - 2C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} S_{ij} \quad (3.10)$$

On retombe donc sur la relation de Boussinesq.

On voit donc que cette relation (introduite initialement par un simple raisonnement phénoménologique) est le résultat *d'une longue série d'hypothèses simplificatrices* :

- ✓ instantanéité : pas de prise en compte de l'histoire de la déformation et de la turbulence ;
- ✓ localité : la turbulence n'est influencée que par son voisinage immédiat ;
- ✓ milieu matériellement simple ;
- ✓ linéarité de la loi de comportement.

On comprends alors que les modèles au premier ordre linéaires ne puissent pas marcher dans toutes les situations.

La loi de comportement linéaire peut aussi s'écrire :

$$\mathbf{a} = -C_\mu \frac{k}{\varepsilon} \mathbf{S} \quad (3.11)$$

On voit donc qu'elle implique une relation de proportionnalité entre le tenseur d'anisotropie et le tenseur de déformation. Cela veut dire que les axes propres du tenseur d'anisotropie sont alignés sur ceux du tenseur de déformation, et que leurs valeurs propres sont proportionnelles, ce qui est faux en général, comme le montrent les figures 3.1 et 3.2. Dans le cas du canal, la seule composante non-nulle du tenseur de déformation est $\partial U / \partial y$. La relation de Boussinesq conduit donc à :

$$\overline{u^2} = \overline{v^2} = \overline{w^2} = \frac{2}{3}k \quad (3.12)$$

et

$$\overline{uv} = -\nu_t \frac{\partial U}{\partial y} \quad (3.13)$$

Le modèle ne reproduit donc pas l'anisotropie de la turbulence. Cependant, elle reproduit la tension de cisaillement $\overline{uv}$, qui est la seule à avoir une influence sur l'écoulement moyen en canal.

Dans le cas de la figure 3.2, l'interaction d'un sillage et d'une couche de mélange, les profils de vitesse et l'analyse des termes de production conduit à montrer que le tenseur de Reynolds doit ressembler à la partie gauche de la figure 3.2. Or, l'utilisation de la relation de Boussinesq linéaire conduit à la partie droite de la figure. Cela montre que la loi de comportement linéaire est bien adaptée à la reproduction des composantes de cisaillement $\overline{uv}$ et $\overline{vw}$, qui sont produites respectivement par le cisaillement dû au sillage et à la couche de mélange :

$$P_{12} = -\overline{v^2} \frac{\partial U}{\partial y} \quad ; \quad P_{23} = -\overline{v^2} \frac{\partial W}{\partial y} \quad (3.14)$$

Elle est en revanche incapable de distinguer les trois composantes diagonales. En l'absence de déformation plane, elle prédit simplement :

$$\overline{u^2} = \overline{v^2} = \overline{w^2} = \frac{2}{3}k \quad (3.15)$$

De plus, la composante $\overline{uw}$, qui est produite par l'interaction sillage/couche de mélange :

$$P_{13} = -\overline{uv} \frac{\partial W}{\partial y} - \overline{vw} \frac{\partial U}{\partial y} \quad (3.16)$$

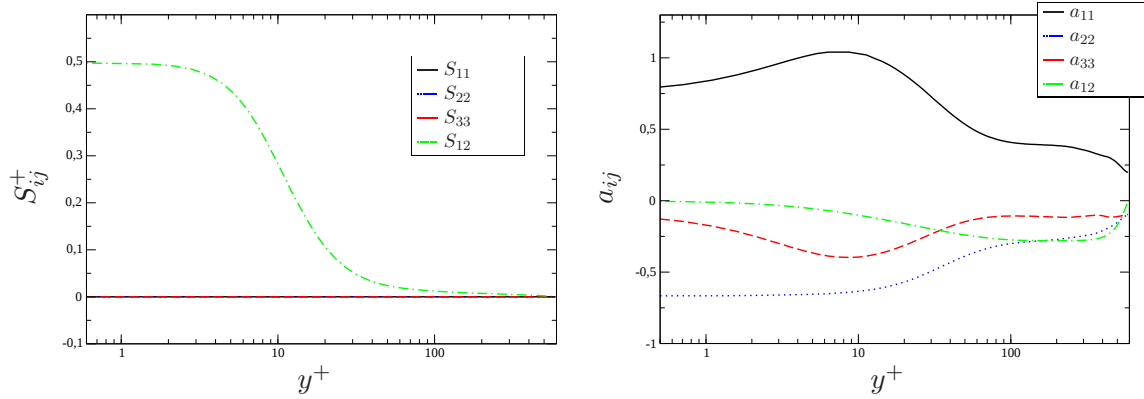


FIG. 3.1 – Comparaison des composantes du tenseur de déformation (à gauche) et du tenseur d'anisotropie (à droite). Écoulement en canal à $Re_\tau = 590$ (DNS de Moser *et al.*, 1999).

est donnée tout simplement nulle par le modèle linéaire. On a donc besoin d'une loi de comportement non-linéaire. Un modèle au second ordre, grâce à l'exactitude des termes de production, donne également les bons profils des tensions de Reynolds.

La figure 3.3 montre une comparaison des résultats donnés par des modèles au premier ordre : différents modèles linéaires et un modèle cubique. On voit clairement la confirmation des remarques faites : seul le modèle cubique est capable de reproduire l'anisotropie de la turbulence et la composante due à l'interaction sillage/couche de mélange.

3.2 Modèles à une équation de transport

Les lois de comportement qui viennent d'être établies, qu'elles soient linéaires ou non-linéaires, font intervenir deux échelles ℓ et τ , et des coefficients. Or, nous avons vu que pour qu'un modèle soit complet, on ne doit avoir besoin d'aucune connaissance *a priori* de l'écoulement.

Si on se contente de la loi de comportement linéaire (relation de Boussinesq), on a :

$$\mathbf{R} = g_0 \mathbf{I} + g_1 \ell^2 \tau^{-1} \mathbf{S} = \frac{2}{3} k \mathbf{I} - 2\nu_t \mathbf{S} \quad (3.17)$$

Nous avons vu précédemment que k n'intervient dans l'équation des vitesses moyennes qu'en modifiant la pression. On n'a donc pas besoin de k pour obtenir les vitesses moyennes. Par conséquent, on peut obtenir un modèle complet en écrivant simplement une équation de transport pour ν_t .

Le seul exemple d'un modèle à équation de transport pour ν_t utilisé dans l'industrie est le modèle de Spalart et Allmaras (1992) [44]. Nous n'entrerons pas dans le détail de ce modèle, qui fait apparaître des fonctions compliquées. Notons simplement que ν_t est donné par $\nu_t = f_{v1} \tilde{\nu}$,

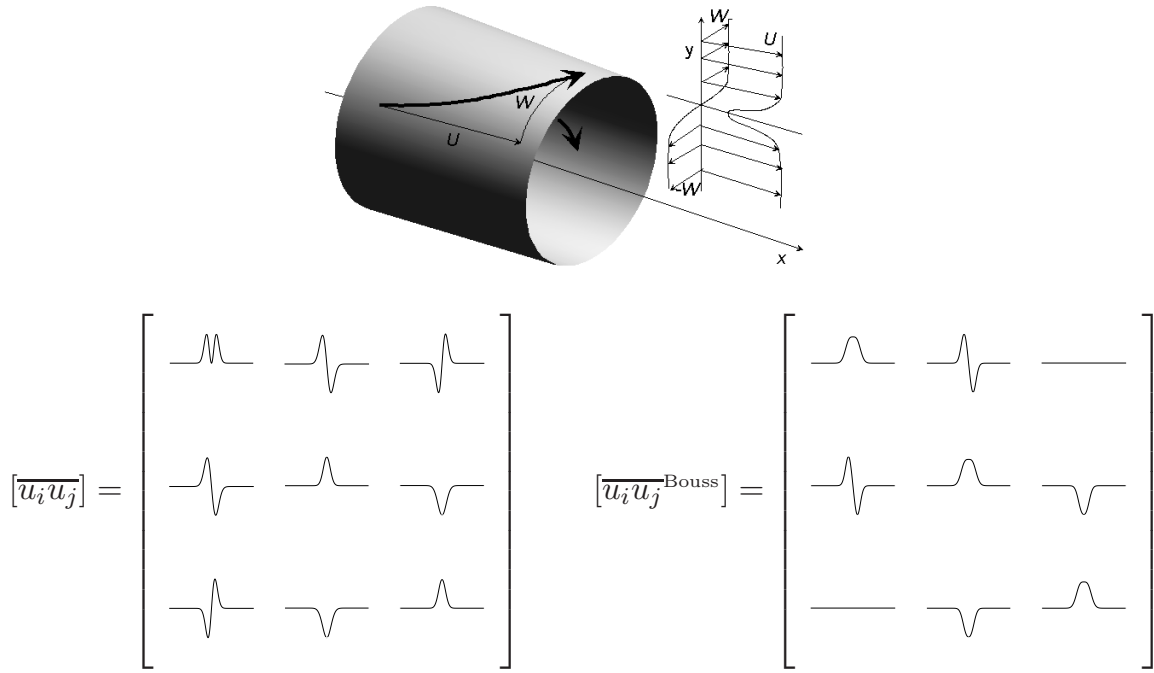


FIG. 3.2 – Interaction sillage/couche de mélange (Expérience de Béharelle *et al.* 1997 [4]). En haut : géométrie et système de coordonnées. En bas à gauche : vision schématique des profils des tensions de Reynolds. En bas à droite : vision schématique des profils des tensions de Reynolds donnés par la relation de Boussinesq.

et $\tilde{\nu}$ obtenu par l'équation de transport :

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j} = c_{b1} \tilde{S} \tilde{\nu} - c_{w1} f_w \left(\frac{\tilde{\nu}}{d} \right)^2 + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \right] + \frac{c_{b2}}{\sigma} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_k} \quad (3.18)$$

Les détails sur les coefficients c_i et les fonctions f_i peuvent être trouvés dans l'article d'origine ou, par exemple, dans le livre de Wilcox (1998). Les fonctions f_i sont introduites en particuliers pour que le modèle soit valide en région de proche paroi. Ce modèle est très utilisé en aéronautique, pour trois raisons essentielles :

- ✓ Il est très facile à intégrer numériquement.
- ✓ Pour les écoulements attachés, il produit des résultats aussi bons que les modèles à zéro équation (Cebeci–Smith, Baldwin et Lomax).
- ✓ Pour les écoulements décollés il donne une bien meilleure description du champ de vitesse que les modèles à zéro équation.

Cependant, ce modèle est trop simple (une seule équation) pour être valide pour une vaste gamme d'écoulements. Par exemple, il donne de très mauvaises prédictions dans les écoulements de type jet (cf. Wilcox, 1998), avec une surestimation des taux d'expansion de plus de 40 %.

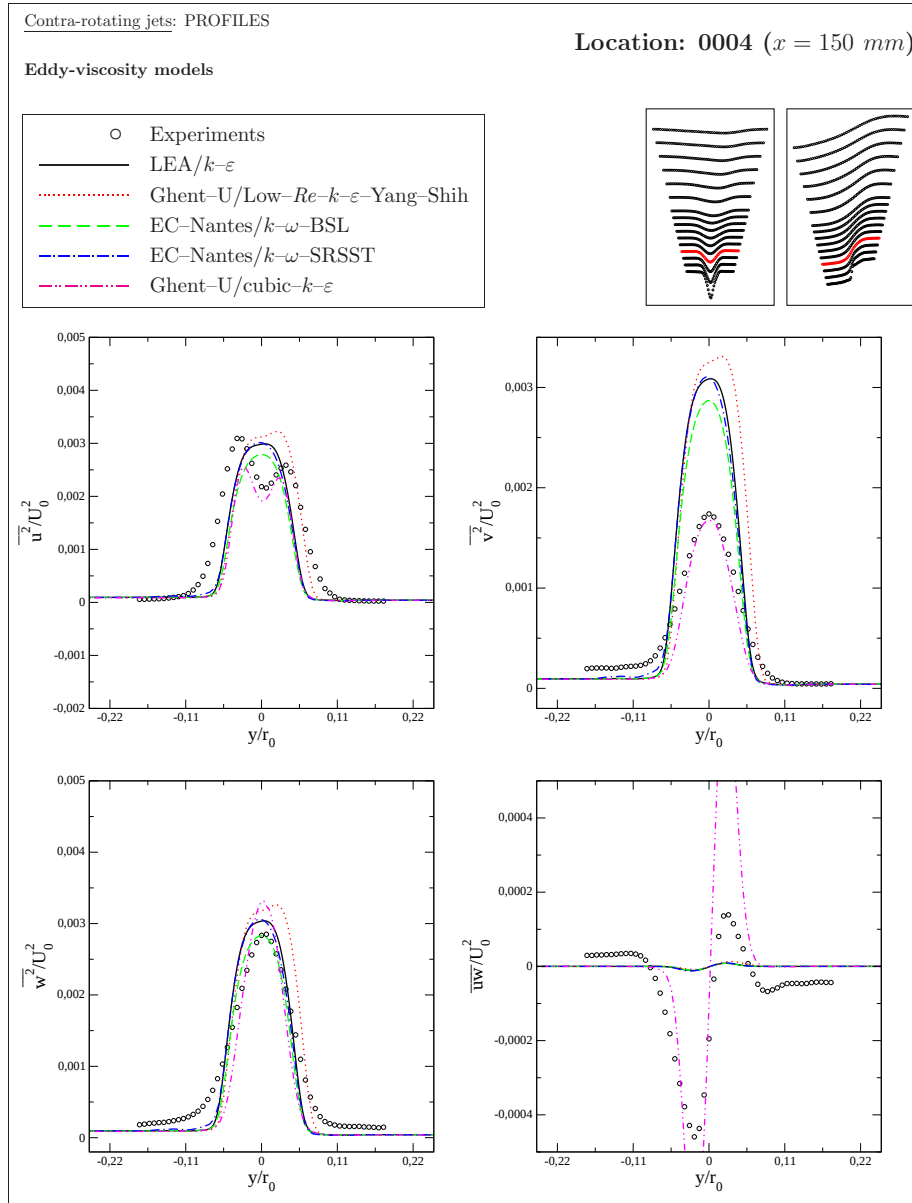
Figure 4: Eddy-viscosity models. Profiles at $x/r_0 = 1.25$ (continued).

FIG. 3.3 – Comparaison de modèles linéaires avec le modèle cubique de Merci et Dick. Cas test : interaction sillage/couche de mélange (Expérience de Béharelle *et al.* 1997 [4]). D'après Manceau *et al.* (2002) [29].

3.3 Les modèles $k-\varepsilon$

Quelle que soit la loi de comportement choisie, dès qu'elle n'est plus linéaire, on a besoin de déterminer les deux échelles ℓ et τ . Rappelons par exemple la loi de comportement quadratique :

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - g_1 \ell^2 \tau^{-1} S_{ij} + g_2 \ell^2 (S_{ik} W_{kj} - W_{ik} S_{kj}) + g_3 \ell^2 \left(S_{ik} S_{kj} - \frac{1}{3} S_{kl} S_{kl} \delta_{ij} \right) \quad (3.19)$$

C'est également le cas avec la loi linéaire si on veut s'affranchir des défauts du modèle Spalart-Allmaras.

Le choix le plus classique aujourd'hui est de déterminer ℓ et τ à partir de l'énergie turbulente k et son taux de dissipation ε :

$$\ell = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \quad ; \quad \tau = \frac{k}{\varepsilon}$$

3.3.1 Équations de transport

Équation de l'énergie turbulente

L'équation de transport exacte de k s'écrit :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial k}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{\rho} \overline{p u_k} - \frac{1}{2} \overline{u_i u_i u_k} \right)$$

On remarque donc que le second membre contient des termes sources (production et dissipation, la dissipation étant en fait toujours un puits), et des termes de transport : diffusion visqueuse, « diffusion » par la pression et transport turbulent.

Rappel : termes source et termes de transport.

Les équations de transport que l'on est amené à traiter sont de la forme symbolique suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial U_k f}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} F_k + S \quad (3.20)$$

où f peut être un scalaire, un vecteur ou un tenseur d'ordre 2. Les termes à modéliser se trouvent tous au second membre. En intégrant cette équation sur un volume de contrôle, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} f \, dV + \int_{\partial\Omega} U_k f \, n_k \, dS = \int_{\partial\Omega} F_k \, n_k \, dS + \int_{\Omega} S \, dV \quad (3.21)$$

Cette équation montre que la variation totale de f sur Ω est due à deux types de termes (voir figure 3.4) :

- ✓ Des termes source (ou puits) S . Ce sont des termes de création (ou de destruction) de la quantité f . Exemples : une réaction chimique peut créer du CO dans le volume ; la production turbulente P est le taux de création (ou dans certains cas de destruction) d'énergie turbulente k , etc.

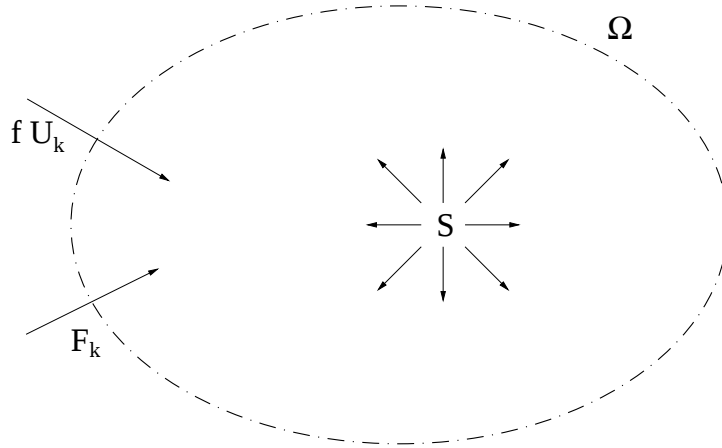


FIG. 3.4 – Schéma représentant le rôle des différents termes de l'équation 3.20.

- ✓ Des termes de transport à travers la surface $\partial\Omega$ par les flux $U_k f$ et F_k . Ces flux sont de type convectif ou diffusif. Contrairement aux termes source (ou puits), les termes de transport ne créent pas (et ne détruisent pas) la quantité f au sein du volume Ω , ils *transportent* f à travers la surface : ce sont des termes de redistribution dans l'espace.

Modélisation des termes sources de k

Le modèle pour la production est déjà écrit : il suffit de multiplier la loi de comportement par $\frac{\partial U_i}{\partial x_k}$. Avec une loi linéaire, on obtient par exemple :

$$P = 2\nu_t S_{ij} S_{ij} \quad (3.22)$$

La dissipation sera donnée par sa propre équation de transport.

Modélisation des termes de transport

Le terme de diffusion visqueuse ne nécessite aucune modélisation. Les deux termes de transport turbulent sont en général modélisés ensemble. On suppose alors que l'effet de ces termes est diffusif, et par analogie avec le terme visqueux, on écrit :

$$\frac{1}{\rho} \overline{p u_k} - \overline{u_i u_i u_k} = \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} \quad (3.23)$$

où σ_k est un nombre de Prandtl. Ce type de modélisation serait parfaitement justifié si l'agitation turbulente avait un comportement de « pure agitation » et à une échelle très petite devant celle de l'écoulement moyen (en d'autres termes, si la turbulence avait des caractéristiques similaires à celles de l'agitation moléculaire). En fait, cette hypothèse est discutable pour deux raisons principales :

- ✓ La turbulence n'a pas ces caractéristiques. Il n'y a pas de séparation d'échelles et il y a des structures cohérentes.
- ✓ La « diffusion » par la pression n'a pas toujours le même comportement que la diffusion turbulente : il existe des cas où elle transporte l'énergie en sens contraire (il est alors anti-diffusif, d'où les guillemets autour de « diffusion »)! C'est pourquoi certains auteurs ont proposé des modèles spécifiques pour ce terme.

L'équation de k modélisée s'écrit donc :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = P - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] \quad (3.24)$$

dans laquelle $\nu_t = C_\mu k^2 / \varepsilon$ et la production a une forme différente suivant la loi de comportement.

Équation du taux de dissipation

L'équation de transport exacte de ε est trop complexe pour permettre une modélisation terme à terme. On retiendra donc une approche phénoménologique qui se base sur l'idée que l'équation de ε doit avoir la même forme que celle de k : convection, terme source, terme puits, diffusion visqueuse, diffusion turbulente :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = P_\varepsilon - \epsilon_\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right] \quad (3.25)$$

Une simple analyse dimensionnelle permet de relier les termes de production et de dissipation de ε à ceux de k :

$$P_\varepsilon = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P \quad ; \quad \epsilon_\varepsilon = C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon}{k} \varepsilon \quad (3.26)$$

L'équation modélisée de ε s'écrit donc finalement :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right] \quad (3.27)$$

En développant cette approche, Harlow & Nakayama (1968) et Hanjalić (1970) [17, 13] n'ont pas manqué de culot ! Mais malgré de nombreuses critiques sur cette équation en raison de son caractère complètement phénoménologique, elle est toujours très largement utilisée aujourd'hui, aussi bien pour les modèles au premier ordre que pour les modèles au second ordre. Elle est sans doute loin d'être parfaite, mais personne n'a vraiment proposé autre chose pour le moment.

3.3.2 Le modèle k - ε standard

Le modèle k - ε standard de Launder et Spalding (1974) est basé sur la loi de comportement linéaire. Ses équations s'écrivent donc :

$$\overline{u_i u_j} = -2 \nu_t S_{ij} + \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (3.28)$$

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad ; \quad P = 2 \nu_t S_{ij} S_{ij} \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = P - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right] \quad (3.31)$$

Avec les coefficients :

$$C_\mu = 0,09 \quad ; \quad \sigma_k = 1 \quad ; \quad C_{\varepsilon 1} = 1,44 \quad ; \quad C_{\varepsilon 2} = 1,92 \quad ; \quad \sigma_\varepsilon = 1,3 \quad (3.32)$$

3.3.3 Procédure de calibration

Ces coefficients ont été déterminés en considérant les écoulements suivants.

Décroissance de turbulence de grille

En faisant passer un écoulement au travers d'une grille, on obtient une turbulence homogène (c'est-à-dire que toutes les dérivées spatiales $\partial/\partial x_i$ des quantités turbulentes (moments statistiques d'ordre ≥ 2) sont nulles), générée par la grille, qui n'est plus soumise à aucune déformation lorsqu'elle est convectée vers l'aval ($S_{ij} = 0$). Dans cette situation, on a :

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\varepsilon \quad ; \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.33)$$

qui admet comme forme limite quand $t \rightarrow \infty$:

$$k = \frac{k_0}{\gamma^{-\gamma}} \frac{t^{-\gamma}}{\tau_0^{-\gamma}} \quad (3.34)$$

où $\gamma = 1/(C_{\varepsilon 2} - 1)$. Les données expérimentales indiquent que l'énergie turbulente décroît environ comme une puissance 1,1 du temps, et donc $C_{\varepsilon 2} = 1,92$.

Turbulence homogène cisailée

Ce cas est similaire au cas précédent, mais avec une grille dont les mailles varient dans une direction (y). La variation de la perte de charge suivant y implique une variation de la vitesse U en fonction de y . Pour produire une turbulence homogène, il faut s'assurer que le gradient de vitesse $\partial U/\partial y$ soit constant. Dans ce cas, la production n'est plus nulle, et les équations se réduisent à :

$$\frac{\partial k}{\partial t} = P - \varepsilon \quad ; \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.35)$$

En utilisant les définitions suivantes :

$$S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \quad ; \quad \eta = \frac{Sk}{\varepsilon} \quad ; \quad t^* = tS \quad (3.36)$$

on peut écrire une équation d'évolution pour η :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t^*} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial t} - \frac{k}{\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -C_\mu (C_{\varepsilon 1} - 1) \eta^2 + (C_{\varepsilon 2} - 1) \quad (3.37)$$

L'expérience montre que quand $t \rightarrow \infty$, η tend vers une valeur constante. La relation précédente montre que cette valeur ne peut être que :

$$\eta^2 = \frac{C_{\varepsilon 2} - 1}{C_\mu (C_{\varepsilon 1} - 1)} \quad (3.38)$$

L'expérience montre qu'on a environ $\eta \rightarrow 4,8$. La valeur classique de $C_{\varepsilon 1}$ est alors 1,44.

Zone logarithmique en écoulement de canal ou de couche limite

En canal, la production se réduit à $P = -\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y}$. Or, le modèle k - ε modélise la production par $P = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2$. En éliminant le gradient de vitesse de ces deux relations, et en utilisant le fait que dans cette zone $P = \varepsilon$, on obtient :

$$C_\mu = \frac{\overline{uv}^2}{k^2} \quad (3.39)$$

Les expériences montrent que dans la zone log, $\overline{uv}/k \simeq -0,3$, et donc la valeur classique de C_μ est 0,09.

De plus, en utilisant les relations $P^+ = \varepsilon^+ = \frac{1}{\kappa y^+}$ et $k^+ = C_\mu^{-1/2} \overline{uv}^+ = C_\mu^{-1/2}$, l'équation de transport de ε donne :

$$\sigma_\varepsilon = \frac{\kappa^2}{C_\mu^{1/2} (C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1})} \quad (3.40)$$

où $\kappa = 0,41$ est la constante de Karman. Cette relation conduit au choix standard : $\sigma_\varepsilon = 1,3$.

3.3.4 Pourquoi k et ε ?

Le choix de k est très naturel, dans la mesure où il apparaît directement dans la loi de comportement : cependant, rien n'empêche d'évaluer k à partir d'autres échelles. k est choisi surtout parce que son équation de transport exacte est simple et que les mécanismes sont facilement identifiables.

Le choix de ε comme seconde échelle est moins évident. D'ailleurs, il existe de nombreux modèles utilisant une échelle différente : k - ω , k - ω^2 , k - kl , k - ν_t , k - $\varepsilon/\sqrt{k}$, etc.

On peut en fait choisir n'importe quelle combinaison φ de ℓ et τ à la seule condition que φ soit alors une variable indépendante de k (ce ne doit pas être une puissance de k). Si on suit la même procédure que pour le k - ε , on écrit une équation de transport pour φ de la forme

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = C_{\varphi 1} \frac{\varphi}{k} P - C_{\varphi 2} \frac{\varphi}{k} \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varphi} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right] \quad (3.41)$$

Posons $\varphi = k^a \varepsilon^b$, et appliquons la même procédure de calibration que pour les coefficients du k - ε . On arrive alors aux relations suivantes :

$$C_{\varphi 1} = a + b + \frac{b}{C_\mu \gamma \eta_\infty^2} \quad ; \quad C_{\varphi 2} = a + b + \frac{b}{\gamma} \quad ; \quad \sigma_\varphi = \frac{b C_\mu^{1/2} \gamma \eta_\infty^2 \kappa^2}{C_\mu \eta_\infty^2 - 1} \quad (3.42)$$

Les paramètres sont donnés par les mesures expérimentales :

$$C_\mu = 0,09 \quad ; \quad \gamma = 1,1 \quad ; \quad \eta_\infty = 4,8 \quad ; \quad \kappa = 0,41 \quad (3.43)$$

Par exemple, si on choisit comme seconde variable $\varphi = \omega^2 = \frac{\varepsilon^2}{k^2}$, on obtient :

$$C_{\varphi 1} = 0,88 \quad ; \quad C_{\varphi 2} = 1,82 \quad ; \quad \sigma_\varphi = 2,38 \quad (3.44)$$

On voit clairement apparaître un problème pour certaines variables : par exemple, si on choisit $\varphi = \ell = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$, on obtient

$$C_{\varphi 1} = 0,06 \quad ; \quad C_{\varphi 2} = -0,41 \quad ; \quad \sigma_\varphi = -1,19 \quad (3.45)$$

Le coefficient du terme de diffusion est négatif : l'équation de transport de ℓ capable de reproduire les trois écoulements utilisés pour la calibration est anti-diffusive !

Parmi toutes les variables qui conduisent à un coefficient σ_φ positif, Launder et Spalding choisissent ε car le coefficient σ_ε permet d'obtenir, sans modification, des taux d'expansion réalistes en écoulements cisailés libres. Ce n'est pas le cas, par exemple, de la variable ω^2 .

3.4 Bilan des avantages et défauts des modèles au premier ordre

Nous allons ici tout d'abord donner quelques indications générales concernant tous les modèles au premier ordre. Ensuite, nous nous intéresserons plus spécifiquement au modèle k - ε standard, et ensuite aux modèles non-linéaires.

3.4.1 Les modèles au premier ordre en général

Avantages

Les avantages des modèles au premier ordre tiennent en une ligne :

- ✓ Ils contiennent moins d'équations différentielles que les modèles au second ordre.

Cela sous-entend qu'ils sont moins coûteux en temps de calcul, bien que la différence ne soit pas toujours énorme (un code de calcul passe souvent l'essentiel de son temps à résoudre le système vitesse–pression). Ils ne sont pas forcément plus stables numériquement que les modèles au second ordre : tout dépend s'il s'agit de modèles linéaires ou non-linéaires.

Inconvénients

- ✓ Les modèles au premier ordre supposent qu'il existe une relation entre le tenseur de Reynolds et le champ moyen (via $\mathbf{S}$ et $\mathbf{W}$) : ce n'est pas vrai en général. La prédiction des écoulements complexes, notamment 3D, peut donc être problématique.
- ✓ Cette relation est supposée instantanée. On suppose donc qu'il y a une réponse immédiate de la turbulence à un changement de contrainte : c'est faux (voir par exemple le temps de réponse des tensions de Reynolds à l'entrée d'un conduit de distorsion, Chassaing, 2000). En fait, la turbulence est sensible à *l'histoire* de la contrainte qu'on lui applique (effet mémoire).
- ✓ L'équation de transport de la seconde échelle (le plus souvent ε) est très empirique : nombreux sont ceux qui la remettent en cause, mais rares sont ceux ont proposé des alternatives !
- ✓ Les modèles prédisent en général un taux d'expansion des jets axisymétriques plus grand que celui des jets plans, alors que les expériences montrent le contraire : ce défaut est connu sous le nom d'*anomalie jet axi/jet plan*. Bien que la question soit loin d'être résolue, il semblerait que le problème vienne de l'équation de ε .
- ✓ Les modèles basés sur la seconde échelle ε ont des difficultés à bien reproduire les effets induits par les gradients de pression adverse. En particulier, cela implique souvent des erreurs dans la prédiction de la position des points de décollement.

3.4.2 Le modèle k – ε standard

Ce modèle est basé sur une loi de comportement linéaire, ce qui lui donne quelques avantages, et beaucoup d'inconvénients.

Avantages

- ✓ Il est facile à programmer et peu sujet aux instabilités numériques.
- ✓ Il reproduit bien la tension de cisaillement en situation d'écoulement cisailé libre (par exemple $\overline{uv}$ produit par un cisaillement $\partial U / \partial y$).

- ✓ Il est assez prévisible : il fait à peu près toujours les mêmes erreurs. Sans aller vraiment jusqu'à pouvoir donner une marge d'erreur, on peut avoir une idée de la direction dans laquelle on doit corriger ses résultats.
- ✓ Il est, malgré sa simplicité, d'application bien plus générale que le modèle de Spalart–Allmaras.

Inconvénients

- ✓ Sa linéarité fait qu'il n'a quasiment aucune chance de bien reproduire un écoulement complexe, en particulier 3D (cf. par ex. l'interaction sillage/couche de mélange).
- ✓ La proportionnalité entre anisotropie et taux de déformation implique qu'il prédise toujours une production positive ($P = 2\nu_t S_{ij} S_{ij}$).
- ✓ Il est également totalement insensible aux effets dus à la courbure des lignes de courant et à une rotation d'ensemble du référentiel : il donne exactement la même solution dans un canal sans rotation et avec rotation. Il est donc par exemple complètement inadapté aux problèmes de turbomachines.
- ✓ Dans un écoulement cisailé simple (sans déformation plane), il prévoit l'égalité des trois composantes diagonales du tenseur de Reynolds. Il est donc incapable de reproduire les écoulements secondaires dus à l'anisotropie.
Par exemple, dans un écoulement en conduite à section carrée, une analyse de l'équation de transport de la vorticité moyenne $\Omega_x = \partial W / \partial y - \partial V / \partial z$ montre que des tourbillons secondaires sont produits par le terme $\frac{\partial^2 (\overline{v^2} - \overline{w^2})}{\partial y \partial z}$. Les modèles linéaires donnent $\Omega_x = 0$, comme illustré sur la figure 3.5.
- ✓ En situation de déformation plane (par exemple, près d'un point d'arrêt), la production exacte est de la forme $P = (\overline{w^2} - \overline{v^2})D$, alors que la relation de Boussinesq conduit à $P = 4\nu_t D^2$. Dans les situations où la distorsion est forte ($4\nu_t D$ plus grand que $\overline{w^2} - \overline{v^2}$), la relation de Boussinesq conduit à une forte surestimation de la production. C'est ce qu'on appelle *l'anomalie aux points d'arrêt*. Cette anomalie est très critique, car, comme on peut le voir sur la figure 3.6, elle conduit à une forte surestimation de l'énergie turbulente dans les couches limites en aval des points d'arrêt, ce qui retarde fortement les décollements.
- ✓ Enfin, le modèle k – ε standard n'est pas valide dans les régions de proche paroi. Le problème essentiel vient de l'estimation de la viscosité turbulente par la relation de Prandtl-Kolmogorov $\nu_t = C_\mu k^2 / \varepsilon$, comme le montre la figure 3.7. Il nécessite donc un traitement particulier pour les régions de proche paroi (cf. § 6).

3.4.3 Modèles non-linéaires

L'introduction de non-linéarités dans la loi de comportement présente des avantages et des inconvénients par rapport au k – ε standard.

Avantages

- ✓ La loi de comportement est plus subtile et peut potentiellement reproduire des écoulements complexes.
- ✓ Elle peut aussi prendre en compte tous les effets auxquels la loi linéaire est insensible : production négative, effets de rotation, génération de tourbillons secondaires, *etc.*

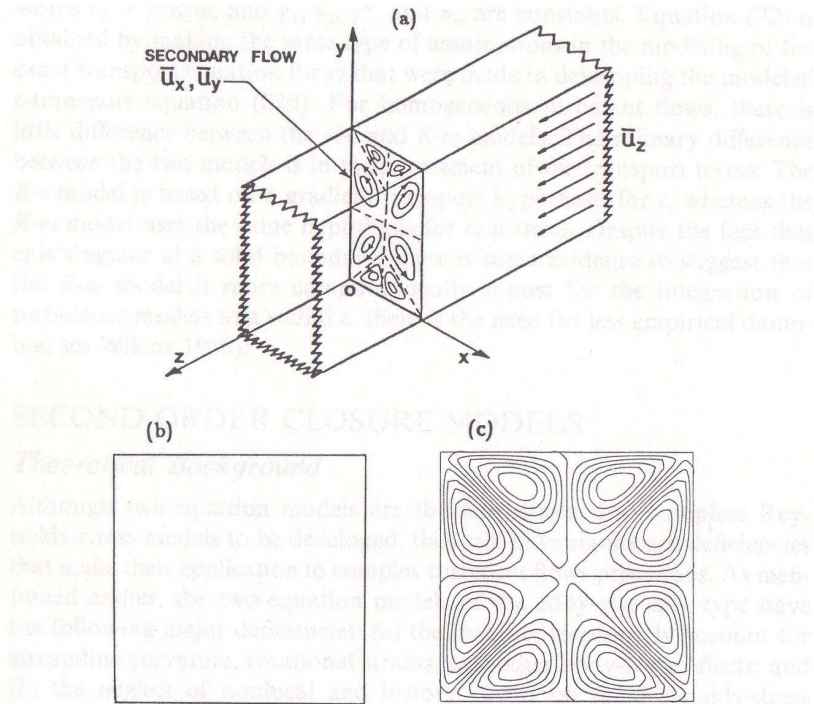


Figure 3 Turbulent secondary flow in a rectangular duct: (a) experiments; (b) standard $K-\epsilon$ model; (c) nonlinear $K-\epsilon$ model of Speziale (1987b).

FIG. 3.5 – Écoulement en conduite à section carrée. Comparaison entre le modèle $k-\epsilon$ standard et modèle non-linéaire de Speziale. D'après Speziale (1991) [46].

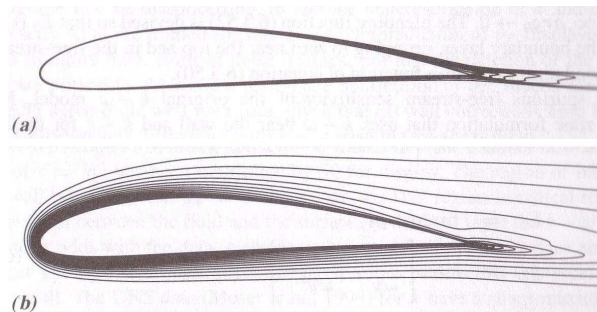


FIG. 3.6 – Illustration de l'anomalie aux points d'arrêt. Écoulement autour d'un profil d'aile. Isocontours d'énergie turbulente. (a) Sans l'anomalie au point d'arrêt (correction de Durbin, voir § 3.5.2). (b) Avec l'anomalie au point d'arrêt. D'après Durbin et Pettersson Reif (2001).

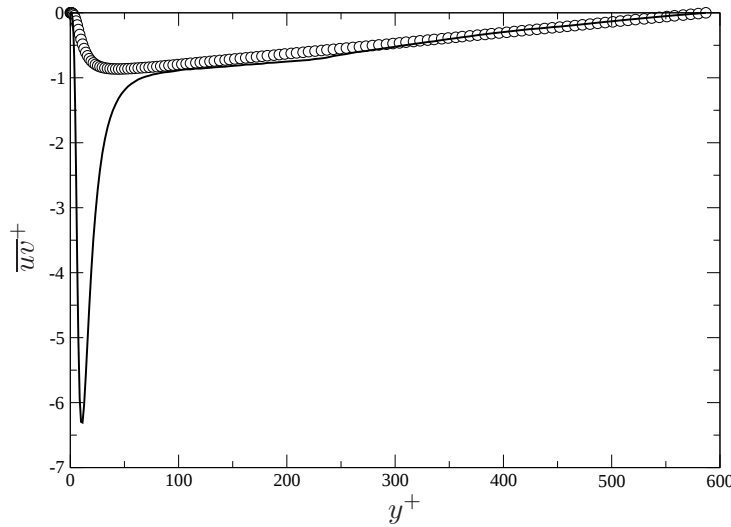


FIG. 3.7 – Test a priori : comparaison de $\overline{uv}$ (○) et de $-2\nu_t S_{12}$ (—). Données de DNS de Moser *et al.* (1999) [35].

- ✓ Elle permet aussi de supprimer l'anomalie aux points d'arrêt.
- ✓ Certains modèles non-linéaires sont également valides dans les régions de proche paroi.

Inconvénients

- ✓ Les modèles non-linéaires sont beaucoup moins robustes numériquement que les modèles linéaires.
- ✓ Ils sont plus difficiles à calibrer : il y a plus de coefficients qui, du fait de la non-linéarité, sont difficiles à isoler en considérant des écoulements simples. Cependant, nous verront plus loin au § 5 la méthode *algébrique explicite* qui permet de déduire un modèle non-linéaire d'un modèle au second ordre, sans besoin de calibration.
- ✓ Ils ont un comportement moins prévisible que le modèle $k-\varepsilon$ standard : ils peuvent donner de très bons résultats en général, et, sur un écoulement particulier ou dans une zone donnée, avoir un comportement totalement faux.

3.5 Propositions d'amélioration du modèle $k-\varepsilon$ standard

Nous allons voir ici quelques exemples de possibilités pour améliorer le comportement du $k-\varepsilon$ standard. Il ne s'agit que d'exemples, il existe une très vaste littérature sur ce sujet.

3.5.1 La correction de Pope

Pope (1978) [38] propose une explication pour l'anomalie jet axi/jet plan : dans un jet axi, les tourbillons à grande échelle sont en gros *annulaires* et sont donc étirés par l'expansion du jet. Cet étirement accélère la cascade d'énergie vers les petites échelles, et donc la dissipation : il y a donc moins d'énergie turbulente que dans le cas du jet plan, et donc un plus faible taux d'expansion.

Pope propose alors un correctif à apporter à l'équation de ε , en remplaçant le coefficient $C_{\varepsilon 2}$ par

$$C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 3} \chi_p \quad \text{avec} \quad \chi_p = \frac{W_{ij} W_{jk} S_{ki}}{(\varepsilon/k)^3} \quad (3.46)$$

Le paramètre χ_p est nul en écoulement plan, et cette correction permet effectivement d'améliorer la prédiction du jet axisymétrique.

Cependant, c'est un exemple typique des problèmes que l'on rencontre en essayant de corriger un modèle pour un type d'écoulements particulier : le modèle corrigé donne globalement, si on considère une vaste gamme d'écoulements, des résultats moins bons que le k - ε standard.

3.5.2 Correction de l'anomalie aux points d'arrêt

Corriger cette anomalie, vue au § 3.4.2, étant d'importance capitale, de nombreuses corrections ont été proposées.

Correction de Kato et Launder

Comme nous l'avons déjà vu, Kato et Launder proposent d'écrire la production

$$P = 2\nu_t \sqrt{S_{ij} S_{ij}} \sqrt{W_{ij} W_{ij}} = 2\nu_t S W \quad (3.47)$$

Le problème est que les tensions de Reynolds étant calculées par la relation de Boussinesq, la production écrite ainsi n'est pas consistante avec la relation exacte $P = -\overline{u_i u_j} S_{ij}$ qui normalement donne $P = 2\nu_t S_{ij} S_{ij} = 2\nu_t S^2$. En quoi cela pose-t-il un problème ?

Si on écrit l'équation de transport de l'énergie cinétique moyenne $\frac{1}{2} U_i U_i$ à partir de l'équation de la vitesse moyenne, on voit apparaître le terme puits $-P = \overline{u_i u_j} S_{ij} = -2\nu_t S^2$: l'énergie cinétique est donc transférée du mouvement moyen vers la turbulence.

Dans le modèle de Kato et Launder, les deux termes de production sont différents : le modèle ne conserve pas l'énergie ! En fait, toute modification directe du terme de production est à proscrire. Les modifications doivent être faites sur la loi de comportement.

Contrainte de réalisabilité de Durbin

Durbin (1996) [10] a remarqué que l'anomalie aux points d'arrêt peut être reliée à un problème de réalisabilité. En effet, plaçons-nous dans les axes propres du tenseur des taux de déformation S_{ij} , qui est alors diagonal, avec pour composantes ses valeurs propres λ_1 , λ_2 et λ_3 . Dans cette base, les trois composantes diagonales du tenseur de Reynolds (*tensions normales*), données par la relation de Boussinesq, s'écrivent :

$$\forall \alpha, \quad \overline{u_\alpha^2} = -2C_\mu k T \lambda_\alpha + \frac{2}{3}k \quad (3.48)$$

où on a posé $T = k/\varepsilon$. La réalisabilité du tenseur de Reynolds impose notamment que les tensions normales soient positives, donc :

$$\forall \alpha, \quad T \leq \frac{1}{3C_\mu \lambda_\alpha} \quad (3.49)$$

Or, les deux relations suivantes :

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = S_{ij}S_{ij} \quad ; \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \quad (3.50)$$

impliquent que

$$\forall \alpha, \quad \lambda_\alpha \leq \sqrt{\frac{2}{3}S_{ij}S_{ij}} \quad (3.51)$$

Par conséquent, si on impose la contrainte suivante à l'échelle de temps T :

$$T \leq \frac{1}{C_\mu \sqrt{6} S} \quad (3.52)$$

On est sûr de satisfaire l'inégalité (3.49) et donc la condition de réalisabilité $\overline{u_\alpha^2} \geq 0$. On peut donc satisfaire cette contrainte en posant :

$$T = \min \left(\frac{k}{\varepsilon} ; \frac{1}{C_\mu \sqrt{6} S} \right) \quad (3.53)$$

et en évaluant la viscosité turbulente par $\nu_t = C_\mu k T$.

Cette limite supérieure imposée à l'échelle de temps de la turbulence permet de résoudre le problème de l'anomalie aux points d'arrêt. En effet, la production s'écrit alors :

$$P = \min \left(2C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} S^2 ; \frac{2}{\sqrt{6}} C_\mu k S \right) \quad (3.54)$$

Le second terme est linéaire en S : la forte surestimation de la production dans les zones de forte déformation plane est alors évitée (cf. figure du 3.4). Imposer une contrainte de réalisabilité peut donc avoir des effets surprenants. Contrairement à celle de Kato et Launder, cette correction du modèle k - ε ne viole pas la conservation de l'énergie.

Correction de Shih *et al.*

Shih *et al.* (1995) [39], par un raisonnement similaire sur la réalisabilité du tenseur de Reynolds, proposent non pas une limite supérieure pour l'échelle de temps, mais un coefficient C_μ variable, ce qui, en y regardant de plus près, revient à peu près au même. Le coefficient C_μ est un peu complexe, mais pour résumer, en situation de déformation plane, il se réduit à :

$$C_\mu = \frac{1}{A_0 + A_S \frac{k}{\varepsilon} S} \quad (3.55)$$

Lorsque la déformation est forte, le second terme du dénominateur devient prépondérant, et la production s'écrit alors :

$$P = \frac{2\sqrt{2}}{3} k S \quad (3.56)$$

ce qui est de la même forme que dans le cas de la correction de Durbin. Ce modèle est mentionné ici surtout parce qu'il est proposé par le code commercial Fluent, sous le nom de *modèle $k-\varepsilon$ réalisable*.

Le modèle $k-\varepsilon$ RNG

En appliquant à la turbulence la théorie du groupe de renormalisation (cf., par ex., Yakhot et Orszag, 1986 [51]), issue de la physique théorique, on peut arriver à retrouver les équations du modèle $k-\varepsilon$. Cette méthode est basée sur une coupure spectrale aux petites échelles de la turbulence, et sur des hypothèses simplificatrices concernant l'interaction entre les échelles de part et d'autre de la coupure. En réitérant le processus, on arrive à « remonter » jusqu'à la décomposition de Reynolds, en appliquant une formule de récurrence. Les équations qui en sont déduites sont exactement celles du $k-\varepsilon$ standard, mais les coefficients sont obtenus directement par la théorie. Malheureusement, il s'est avéré qu'avec ce jeu de coefficients, le modèle marchait très mal !

C'est pourquoi le modèle (*modèle RNG*, pour *Re-Normalization Group*) a été modifié par Yakhot *et al.* (1992) [52], en changeant les coefficients et surtout en introduisant un terme $(-R)$ dans l'équation de ε :

$$R = \frac{C_\mu \eta^3 (1 - \eta/\eta_0) \varepsilon^2}{1 + \beta \eta^3} \frac{1}{k} \quad (3.57)$$

avec $\eta = \sqrt{2} S k / \varepsilon$. L'ajout de ce terme est strictement équivalent à introduire un coefficient $C_{\varepsilon 1}$ variable de la forme :

$$C_{\varepsilon 1}^* = C_{\varepsilon 1} - \frac{\eta(1 - \eta/\eta_0)}{1 + \beta \eta^3} \quad (3.58)$$

Les autres coefficients sont :

$$C_\mu = 0,085 \quad ; \quad C_{\varepsilon 1} = 1,42 \quad ; \quad C_{\varepsilon 2} = 1,68 \quad ; \quad \sigma_k = 0,72 \quad ; \quad \sigma_\varepsilon = 0,72 \quad (3.59)$$

$$\eta_0 = 4,38 \quad ; \quad \beta = 0,012 \quad (3.60)$$

Ce modèle est souvent proposé dans les codes de calcul commerciaux et est assez populaire dans l'industrie, notamment parce qu'il semble corriger l'anomalie aux points d'arrêt.

Cependant, comme le remarque Laurence (2002) [23], l'amélioration des prédictions près des points d'arrêt est due au coefficient $C_{\varepsilon 1}$ variable, qui augmente fortement la dissipation dans ces régions : la surestimation de k est alors évitée en augmentant radicalement sa dissipation, au lieu de diminuer sa production. C'est donc par une compensation des erreurs que le modèle améliore les prédictions !

3.5.3 Le modèle k - ω de Wilcox

Reprenant la vieille idée de Kolmogorov d'utiliser comme seconde échelle la fréquence caractéristique des gros tourbillons $\omega = \varepsilon/k$, Wilcox (1988) [50] construit une équation de transport de ω sur le même modèle que celle de ε , et utilise une loi de comportement linéaire. Les équations du modèle sont alors :

$$\overline{u_i u_j} = -2 \nu_t S_{ij} + \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (3.61)$$

$$\nu_t = \frac{k}{\omega} \quad ; \quad P = 2 \nu_t S_{ij} S_{ij} \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = P - \beta' k \omega + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] \quad (3.63)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U_k \frac{\partial \omega}{\partial x_k} = \alpha \frac{\omega}{k} P - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right] \quad (3.64)$$

Avec les coefficients

$$\beta' = 0,09 \quad ; \quad \sigma_k = 2 \quad ; \quad \alpha = 5/9 \quad ; \quad \beta = 3/40 \quad ; \quad \sigma_\omega = 2 \quad (3.65)$$

Ce modèle présente quelques avantages comparé au modèle k - ε standard, mais aussi de gros inconvénients :

✓ **Avantages :**

- ↪ Il est intégrable jusqu'à la paroi. C'est un avantage considérable. Il est tout de même à noter que la variable ω tend vers l'infini aux parois. Il faut donc prendre des précautions numériques : la condition aux limites en paroi ne doit pas être appliquée à la paroi mais légèrement à l'intérieur du domaine (premier point de calcul situé en $y_1^+ \simeq 1$), de la manière suivante :

$$\omega(y_1) = \frac{6\nu}{\beta y_1^2} \quad (3.66)$$

qui est la solution analytique de l'équation de ω en proche paroi.

- ↪ Il donne de meilleurs résultats que le k - ε standard en situation de gradient de pression adverse : il prédit donc mieux la position des décollements.

↪ L'équation de ω est en fait indépendante de k , car son terme de production se réduit à

$$\alpha \frac{\omega}{k} P = 2\alpha S_{ij} S_{ij} \quad (3.67)$$

Cette propriété est très intéressante numériquement, car elle découple l'équation de ω de celle de k , ce qui est un facteur de robustesse numérique. On peut montrer que seules les puissances de ω possèdent cette propriété. Le choix de ω est alors optimal du point de vue numérique.

✓ **Inconvénients :**

- ↪ Dans les situations d'aérodynamique externe (par. ex., une aile d'avion), le modèle prédit un développement de la couche limite turbulente sensible au niveau de turbulence qui est présent à l'extérieur de la couche limite, qui est fixé en général arbitrairement par l'utilisateur. Ce modèle est donc inapplicable aux problèmes d'aérodynamique externe.
- ↪ Il surestime largement les taux d'expansion des jets (axisymétriques et plans). C'est pourquoi Wilcox a plus tard proposé l'introduction de termes correctifs semblables à celui de Pope vu précédemment (cf. Wilcox, 1998).

Ce modèle est donc peu appliqué tel quel : en revanche, il est très utilisé comme modèle de proche paroi, couplé au k - ε loin des parois (modèle SST, voir § 6.6).

Chapitre 4

Fermeture au second ordre

Nous avons décrit de nombreux inconvénients des modèles au premier ordre. Le passage à la modélisation au second ordre présente donc des avantages décisifs :

- ✓ Grâce à la résolution d'équations de transport pour les tensions de Reynolds, ces modèles reproduisent un effet mémoire de la turbulence : par exemple, en cas de changement brusque de la déformation moyenne, la turbulence réagit avec retard.
- ✓ En repoussant d'un ordre la modélisation, on gagne beaucoup en représentation de la physique : au lieu de supposer que les tensions de Reynolds ont un comportement déterminé (donné par la loi de comportement), on résout leurs équations de transport, qui contiennent les mécanismes physiques principaux qui pilotent l'évolution de la turbulence : production, redistribution, transport turbulent, diffusion visqueuse, dissipation.
- ✓ En particulier, les termes de production, qui suffisent à expliquer énormément de phénomènes, ne nécessitent aucune modélisation !

La modélisation au second ordre représente donc un « saut technologique » par rapport à la modélisation au premier ordre.

4.1 Équations de transport

Les équations de transport des tensions de Reynolds s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \underbrace{U_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k}}_{\mathcal{C}_{ij}} = & \underbrace{-\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}}_{P_{ij}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \overline{u_i} \frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \overline{u_j} \frac{\partial p}{\partial x_i}}_{\phi_{ij}^*} - \underbrace{2\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k}}_{\varepsilon_{ij}} \\ & + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_k \partial x_k}}_{D_{ij}^\nu} - \underbrace{\frac{\partial \overline{u_i u_j u_k}}{\partial x_k}}_{D_{ij}^T} \end{aligned} \quad (4.1)$$

$\mathcal{C}_{ij}$	Convection
P_{ij}	Production
ϕ_{ij}^*	Corrélation vitesse-gradient de pression ou terme de pression
ε_{ij}	Dissipation
D_{ij}^ν	Diffusion moléculaire ou visqueuse
D_{ij}^T	Transport turbulent ou corrélations triples

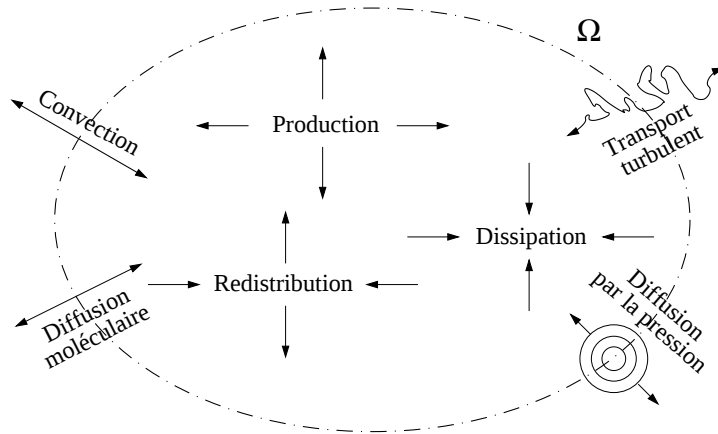
Seuls les termes de pression, de dissipation et de transport turbulent nécessitent une modélisation.

Très souvent, le terme de pression est décomposé en :

$$\phi_{ij} = \frac{1}{\rho} \overline{p \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} \longrightarrow \text{Corrélation pression-déformation ou terme de redistribution}$$

$$D_{ij}^p = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i p} \delta_{jk} + \overline{u_j p} \delta_{ik}) \longrightarrow \text{Diffusion par la pression}$$

Cette décomposition facilite l'interprétation du rôle des différents termes :



Attention, cette vision schématique ne doit pas faire oublier que :

- ✓ Les termes de production ne sont pas toujours positifs.
- ✓ Les différentes composantes de la production et de la dissipation ne sont pas égales.
- ✓ Les différents termes de transport à travers la surface de contrôle peuvent transporter l'énergie dans un sens ou dans l'autre, suivant les situations.
- ✓ Les termes D_{ij}^T et D_{ij}^p sont la plupart du temps appelés respectivement « diffusion turbulente » et « diffusion par la pression » parce que ce sont des termes de transport de forme analogue à celle du terme de diffusion moléculaire D_{ij}^ν , mais ils résultent en fait de mécanismes complètement différents (D_{ij}^T et D_{ij}^p résultent respectivement de l'effet moyen de la convection d'énergie par le mouvement fluctuant et de la puissance des forces de pression fluctuantes). Le terme de diffusion est par conséquent un abus de langage, qui peut cacher le fait que ces termes n'ont à priori aucune raison d'être purement diffusifs, même si, dans de nombreux cas, cela se vérifie.

4.2 Le terme de redistribution

Ce terme est certainement celui qui joue le rôle le plus important après la production : comme la production n'a pas besoin d'être modélisée, c'est essentiellement le terme de redistribution qui différencie les modèles.

4.2.1 Théorie de Chou (1945)

En prenant la divergence de l'équation de la vitesse fluctuante u_i , on obtient l'équation de Poisson suivante :

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_k} = -2\rho \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial U_l}{\partial x_k} - \rho \frac{\partial^2 (u_k u_l - \overline{u_k u_l})}{\partial x_k \partial x_l} \quad (4.2)$$

La théorie de Chou considère que l'on se place loin de toute paroi : on verra plus loin comment étendre cette théorie à la région de proche paroi. On considère donc que la turbulence est dans le domaine infini $\mathbb{R}^3$. En l'absence de paroi, la solution de l'équation de Poisson peut s'écrire de la manière suivante :

$$p(\mathbf{x}) = - \int_{\mathbb{R}^3} \left[-2\rho \frac{\partial u_k}{\partial x_l}(\mathbf{x}') \frac{\partial U_l}{\partial x_k}(\mathbf{x}') - \rho \frac{\partial^2 (u_k u_l - \overline{u_k u_l})}{\partial x_k \partial x_l}(\mathbf{x}') \right] \frac{1}{4\pi \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} dV(\mathbf{x}') \quad (4.3)$$

qui fait intervenir la fonction de Green $\frac{1}{4\pi \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|}$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ pour l'opérateur laplacien. Cette relation nous rappelle au passage que les équations de Navier–Stokes sont des équations intégro-différentielles. En particulier, elle montre que la pression fluctuante en un point donné dépend de la vitesse moyenne et de la vitesse fluctuante *dans l'ensemble du domaine* : la turbulence est donc *non-locale*. Le terme de redistribution peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} \phi_{ij}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\rho} \overline{p(\mathbf{x}) \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right]} \\ &= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial^2 u_k u_l}{\partial x_k \partial x_l}(\mathbf{x}') \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right] \frac{dV(\mathbf{x}')}{4\pi \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|}}_{\phi_{ij}^1} \\ &\quad + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3} 2 \frac{\partial U_l}{\partial x_k}(\mathbf{x}') \frac{\partial u_k}{\partial x_l}(\mathbf{x}') \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right] \frac{dV(\mathbf{x}')}{4\pi \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|}}_{\phi_{ij}^2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

On remarque que le premier terme, ϕ_{ij}^1 , est indépendant de la vitesse moyenne. Il ne réagit donc pas instantanément à une brusque variation des gradients de vitesse moyenne : c'est un terme d'interaction de la turbulence sur elle-même, donc il ne réagira que lorsque la turbulence aura déjà été modifiée par un autre terme. Pour cette raison, on l'appelle *terme lent*.

Au contraire, le second terme, ϕ_{ij}^2 , dépend des gradients de vitesse moyenne, et réagit instantanément à leurs variations : on l'appelle donc *terme rapide*.

Hypothèse de quasi-homogénéité :

Dans le terme rapide ϕ_{ij}^2 , le gradient de vitesse moyenne est multiplié par une corrélation en 2 points entre gradients de vitesse fluctuante. Or, les corrélations en 2 points tendent vers zéro lorsque la séparation $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|$ augmente : il existe une échelle de longueur de corrélation qui caractérise la distance sur laquelle les corrélations en 2 points sont « non-nulles ». Si les gradients de vitesse moyenne varient lentement devant cette échelle de corrélation, on peut supposer que dans l'intégrale, les gradients de vitesse moyenne sont constants : c'est une hypothèse de *quasi-homogénéité*. Bradshaw *et al.* (1987) [3] ont montré, à partir de données de DNS, que dans un canal, cette hypothèse est tout à fait justifiée, *sauf dans la région de proche paroi*. Encore une fois, nous verrons plus loin comment les effets de proche paroi peuvent être pris en compte. L'hypothèse de quasi-homogénéité conduit donc à :

$$\phi_{ij}^2(\mathbf{x}) = \frac{\partial U_l}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \int_{\mathbf{R}^3} 2 \frac{\partial u_k}{\partial x_l}(\mathbf{x}') \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right] \frac{dV(\mathbf{x}')}{4\pi\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} \quad (4.5)$$

Hypothèse de localité

L'hypothèse de localité consiste à écrire formellement l'intégrale précédente sous la forme :

$$\phi_{ij}^2(\mathbf{x}) = [A_{ijml}(\mathbf{x}) + A_{jiml}(\mathbf{x})] \frac{\partial U_l}{\partial x_m}(\mathbf{x}) \quad (4.6)$$

et à supposer qu'on peut modéliser le tenseur d'ordre quatre A_{ijml} par une relation algébrique ne faisant intervenir que des quantités au point $\mathbf{x}$. De même pour le terme lent :

$$\phi_{ij}^1(\mathbf{x}) = B_{ij}(\mathbf{x}) \quad (4.7)$$

on supposera que le tenseur B_{ij} peut s'exprimer sous forme d'une relation algébrique ne faisant intervenir que des quantités au point $\mathbf{x}$. Il est manifeste, vu son équation, que le terme de redistribution est non-local. Cette hypothèse devra être remise en cause, notamment près des parois.

4.2.2 Modélisation du terme lent

Le terme lent $\Phi^1 = [\phi_{ij}^1]$, d'après son équation intégrale, dépend uniquement de l'état de la turbulence. On ne fera donc pas intervenir le champ moyen dans sa modélisation (la masse volumique non plus n'apparaît pas). On va donc chercher à le modéliser par une relation du type :

$$\Phi^1 = f(\mathbf{R}, V_1, V_2, V_3, \dots) \quad (4.8)$$

En expérience de turbulence homogène initialement anisotrope (cf. § 4.2.3), on peut identifier que son rôle est essentiellement de faire tendre la turbulence vers l'isotropie en redistribuant

l'énergie entre les composantes. En effet, la trace de ce terme est nulle, et donc il ne joue aucun rôle dans le bilan d'énergie turbulente k . En revanche, lorsque la turbulence est anisotrope, il a tendance à la ramener vers un état isotrope.

Il est donc plus naturel de transformer la relation précédente pour faire apparaître le tenseur d'anisotropie $\mathbf{b} = [b_{ij}]$:

$$\Phi^1 = g(\mathbf{b}, V_1, V_2, V_3, \dots) \quad (4.9)$$

Encore une fois, cette relation doit être valable quel que soit le système d'unité. Comme pour le cas des modèles au premier ordre, on va choisir comme unités des échelles turbulentes qui doivent donc apparaître comme variables d'état dans la relation :

$$\Phi^1 = g(\mathbf{b}, \ell, \tau) \quad (4.10)$$

Pour simplifier, on va anticiper et poser tout de suite :

$$\ell = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \quad ; \quad \tau = \frac{k}{\varepsilon} \quad (4.11)$$

On arrive alors à :

$$\frac{\Phi^1}{\varepsilon} = g(\mathbf{b}, 1, 1) \quad (4.12)$$

qui se simplifie en :

$$\frac{\Phi^1}{\varepsilon} = g(\mathbf{b}) \quad (4.13)$$

On peut montrer (cf. par ex. Lumley (1978) [24]) que la relation la plus générale de cette forme s'écrit :

$$\frac{\Phi^1}{\varepsilon} = \alpha(I, II, III) \mathbf{I} + \beta(I, II, III) \mathbf{b} + \gamma(I, II, III) \mathbf{b}^2 \quad (4.14)$$

où I , II et III sont les invariants principaux de $\mathbf{b}$. On voit ici de façon claire l'utilisation du théorème de Cayley–Hamilton, qui permet de faire disparaître de cette relation toutes les puissances de $\mathbf{b}$ supérieures à 2. Comme $\mathbf{b}$ est de trace nulle, ses invariants ont une expression simple :

$$I = 0 \quad ; \quad II = -\frac{\{\mathbf{b}^2\}}{2} \quad ; \quad III = \frac{\{\mathbf{b}^3\}}{3} \quad (4.15)$$

De manière à respecter la nullité de la trace de Φ^1 , on doit imposer la relation suivante :

$$\{\Phi^1\} = 3\alpha - 2\gamma II = 0 \quad (4.16)$$

La relation la plus générale s'écrit donc simplement

$$\Phi^1 = \beta(II, III) \varepsilon \mathbf{b} + \gamma(II, III) \varepsilon \left(\mathbf{b}^2 + \frac{2}{3} II \mathbf{I} \right) \quad (4.17)$$

Cette relation est (pour une fois) relativement simple : il est donc inutile de chercher à compliquer, puisque c'est la forme la plus générale !

Mais cela n'empêche pas de la simplifier :

- ✓ Si on pose dans cette relation $\gamma = 0$ et $\beta = cste = -C_1$, on obtient le modèle de Rotta. C'est le seul modèle linéaire.
- ✓ Si on pose $\gamma = 0$, mais qu'on conserve une variation de β en fonction des invariants, on obtient ce qu'on appelle un modèle *quasi-linéaire* : il est linéaire du point de vue tensoriel, mais les coefficients sont non-linéaires.
- ✓ On peut aussi conserver le terme non-linéaire et prendre des coefficients constants : ces modèles sont simplement dits *non-linéaires*.

De nombreuses variantes ont été proposées. On ne donne ici que quelques exemples.

Modèles quasi-linéaires

Nous avons vu que le modèle de Rotta n'est pas réalisable. Pour assurer la réalisabilité, il suffit de rendre le coefficient variable : Fu, Launder et Leschziner (1987) [11] proposent par exemple

$$C_1 = 1 + 3,1\sqrt{A_2A}. \quad (4.18)$$

ce qui revient dans la relation (4.17) à poser :

$$\beta(II, III) = -1 - 6,2\sqrt{\left(1 - \frac{9}{2}II + 9III\right)II} \quad ; \quad \gamma(II, III) = 0 \quad (4.19)$$

On voit que, même si la forme de (4.17) doit être respectée, cela laisse une certaine marge dans le choix de la forme des coefficients : c'est là que la comparaison avec des données expérimentales ou de DNS joue un rôle important.

Modèles non-linéaires à coefficients constants

Les expériences de retour à l'isotropie en turbulence homogène montrent que ϕ_{ij}^1 ne varie pas linéairement avec a_{ij} . Certains préfèrent d'ailleurs parler de *terme de résistance aux fortes anisotropies* plutôt que de *terme de retour à l'isotropie*. C'est pourquoi, par exemple, Speziale, Sarkar et Gatski (1991) [47] utilisent un modèle non-linéaire, en posant :

$$\beta = -3,4 \quad ; \quad \gamma = 4,2 \quad (4.20)$$

L'utilisation de coefficients constants fait que le modèle n'est pas réalisable.

Modèles non-linéaires

Les modèles pleinement non-linéaires sont peu utilisés. Ils restent encore confinés au domaine de la recherche. L'exemple le plus typique de modèle non-linéaire est celui de Craft et Launder (1996) [5]. La méthode suivie pour développer ce modèle est la suivante :

- ✓ Le point de départ est la relation générale (4.17), associée à la forme générale du terme rapide, que nous verrons plus loin.

- ✓ Les contraintes de réalisabilité sont largement utilisées : en particulier, le modèle est développé de manière à se comporter de manière satisfaisante dans les situations de turbulence à deux composantes (proche d'une paroi ou d'une surface libre). C'est pourquoi les auteurs l'ont appelé *modèle TCL*, pour Two-component Limit.
- ✓ Ce modèle est développé depuis une quinzaine d'année : il a été testé sur un grand nombre de cas, mais il a atteint un degré de sophistication et de complexité qui le rend très difficile à manipuler.

Voici la forme que prend son terme lent (exprimé en fonction des invariants « à l'anglaise ») :

$$\Phi^1 = -(C_1 + \sqrt{A}) \varepsilon \mathbf{a} - C_1 C'_1 \varepsilon \left(\mathbf{a}^2 - \frac{1}{3} A_2 \mathbf{I} \right) \quad (4.21)$$

avec :

$$C_1 = 3,1 f_A A_{2d} \quad ; \quad C'_1 = 1,1 \quad (4.22)$$

$$f_A = \begin{cases} A \left(\frac{0,05}{0,7} \right)^{1/2} & \text{si } A < 0,05 \\ \frac{A}{0,07^{1/2}} & \text{si } 0,05 < A < 0,7 \\ A & \text{si } A > 0,7 \end{cases} \quad (4.23)$$

$$A_2 = \{\mathbf{a}^2\} \quad ; \quad A_3 = \{\mathbf{a}^3\} \quad ; \quad A = 1 - \frac{9}{8} (A_2 - A_3) \quad ; \quad A_{2d} = \min(A_2; 0,5) \quad (4.24)$$

4.2.3 Modélisation du terme rapide

La théorie de Chou a montré que le terme rapide pouvait s'écrire sous la forme :

$$\phi_{ij}^2(\mathbf{x}) = [A_{ijml}(\mathbf{x}) + A_{jiml}(\mathbf{x})] \frac{\partial U_l}{\partial x_m}(\mathbf{x}) \quad (4.25)$$

Cette relation suggère qu'on cherche un modèle de ϕ_{ij}^2 comme une fonction du tenseur de Reynolds et des gradients de vitesse, cette fonction devant être linéaire par rapport aux gradients de vitesse. En appliquant la méthode générale déjà utilisée pour les modèles au premier ordre et le terme lent, on peut montrer (cf. Speziale *et al.* [47]) qu'un tel modèle est de la forme :

$$\Phi^2 = \beta_1 k \mathbf{S} + \beta_2 k \left(\mathbf{bS} + \mathbf{Sb} - \frac{2}{3} \{\mathbf{bS}\} \mathbf{I} \right) + \beta_3 k \left(\mathbf{b}^2 \mathbf{S} + \mathbf{Sb}^2 - \frac{2}{3} \{\mathbf{b}^2 \mathbf{S}\} \mathbf{I} \right) \quad (4.26)$$

$$+ \beta_4 k (\mathbf{bW} + \mathbf{Wb}) + \beta_5 k (\mathbf{b}^2 \mathbf{W} + \mathbf{Wb}^2) \quad (4.27)$$

Modèle de Speziale, Sarkar et Gatski (SSG)

En étudiant les solutions quand $t \rightarrow \infty$ des écoulements de turbulence homogène soumise à des déformations planes, Speziale, Sarkar et Gatski (1991) [47] montrent que la relation

précédente conduit aux mêmes solutions d'équilibre que la formulation quasi-linéaire :

$$\Phi^2 = -C_1^* P \mathbf{b} + \left(C_3 - C_3^* II^{1/2} \right) k \mathbf{S} + C_4 k \left(\mathbf{bS} + \mathbf{Sb} - \frac{2}{3} \{ \mathbf{bS} \} \mathbf{I} \right) + C_5 k (\mathbf{bW} + \mathbf{Wb}) \quad (4.28)$$

qu'ils utilisent en association au terme lent décrit au 4.2.2, qui s'écrit :

$$\Phi^1 = -C_1 \varepsilon \mathbf{b} + C_2 \varepsilon \left(\mathbf{b}^2 - \frac{1}{3} \{ \mathbf{b}^2 \} \mathbf{I} \right) \quad (4.29)$$

Le modèle du terme rapide a été ensuite calibré dans les situations suivantes :

- ✓ Phase initiale d'un écoulement de turbulence homogène initialement isotrope soumise à un cisaillement brusque : la théorie de la distorsion rapide (Crow, 1968 [7]) montre que, dans cette situation, $\Phi = \frac{4}{5} \mathbf{S}$, ce qui impose $C_3 = \frac{4}{5}$.
- ✓ État d'équilibre obtenu en turbulence homogène cisailée.
- ✓ Écoulement en rotation soumis à un cisaillement brusque (théorie de la distorsion rapide, Bertoglio, 1982).

Après ce processus de calibration, les coefficients sont :

$$C_1 = 3,4; C_2 = 4,2; C_1^* = 1,8; C_3 = 0,8; C_3^* = 1,3; C_4 = 1,25; C_5 = 0,4$$

Ce modèle est donc calibré pour reproduire correctement à la fois la phase initiale et l'état d'équilibre ($t \rightarrow 0$ et $t \rightarrow \infty$) en écoulement cisailé. De plus, il est calibré pour bien reproduire les effets de rotation.

Le terme lent, comme nous l'avons mentionné au 4.2.2, est calibré de manière à reproduire l'expérience de retour à l'isotropie d'une turbulence homogène anisotrope.

Quelques commentaires sur le modèle SSG :

- ✓ Il a été appliqué à de nombreux cas tests, avec un certain succès.
- ✓ En particulier, il est adapté aux écoulements en rotation.
- ✓ Il n'est pas valide en région de proche paroi : il nécessite donc l'utilisation de lois de paroi.
- ✓ C'est un des modèles les plus utilisés (avec le modèle Rotta+IP).
- ✓ Il est disponible dans certains codes industriels, en particulier Fluent.
- ✓ La non-linéarité du terme lent est souvent supprimée en prenant simplement $C_2 = 0$.

Le modèle Rotta+IP ou LRR

Dans un très célèbre article, Launder, Reece et Rodi (1975) [20] ont proposé d'associer le modèle suivant :

$$\phi_{ij}^2 = -C_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) \quad (4.30)$$

au modèle de Rotta :

$$\phi_{ij}^1 = -C_1 \varepsilon a_{ij} \quad (4.31)$$

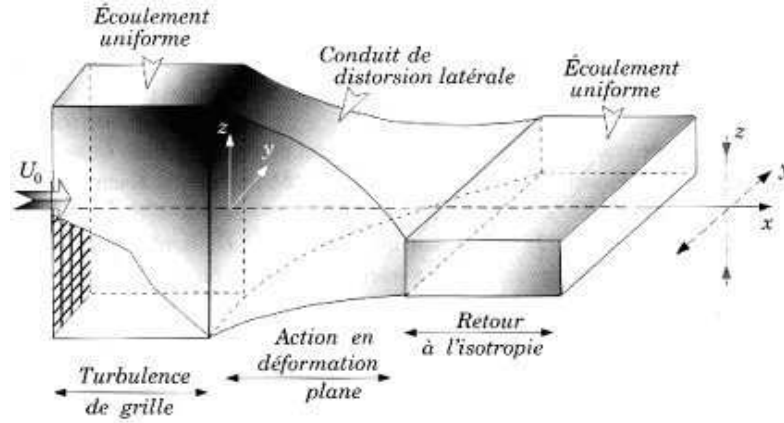


Fig. 28: Schéma de déformation plane transversale à la direction de l'écoulement.

FIG. 4.1 – Expérience de déformation plane appliquée à une turbulence homogène initialement isotrope, suivie d'un retour à l'isotropie. D'après Chassaing (2000).

P_{ij} étant le tenseur de production et $P = \frac{1}{2}P_{ii}$. Ce modèle est souvent tout simplement appelé *modèle Rotta+IP* ou encore *modèle LRR*.

Ce modèle du terme rapide (*modèle IP*, pour *Isotropization of Production*) a le mérite d'avoir une signification physique claire : il a tendance à rendre la production plus isotrope. Pour respecter la contrainte de Crow, on doit prendre $C_2 = \frac{3}{5}$. La constante C_1 est prise égale à 1,8 (calibration sur l'expérience de retour à l'isotropie).

Prenons l'exemple d'une expérience de turbulence homogène isotrope soumise à une déformation brusque, décrite sur la figure 4.1. En se plaçant loin des parois de la conduite et dans le repère qui suit l'écoulement, on est en présence d'une turbulence homogène (toutes les dérivées spatiales $\partial/\partial x_i = 0$ des quantités turbulentes (moments statistiques d'ordre ≥ 2) sont nulles) soumise à une déformation plane :

$$\left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & -D \end{bmatrix} \implies S_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & -D \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

où on a défini

$$D = \frac{\partial V}{\partial y} > 0 \quad (4.33)$$

Dans les sections avant et après le conduit de distorsion, la déformation est nulle ($\mathbf{S} = 0$).

Au moment $t = t_0$ où la turbulence que l'on suit dans son mouvement d'ensemble entre dans le conduit de distorsion, elle est isotrope et subit soudainement la déformation. Le terme ϕ_{ij}^1 donné par l'équation (4.31) est nul à cet instant, puisque la turbulence est isotrope. En revanche, puisque la déformation est soudainement non nulle, le terme ϕ_{ij}^2 donné par (4.30), qui dépend de la production et donc des gradients de vitesse, est activé.

Les équations de transport des tensions de Reynolds (4.1), dans lesquels tous les termes de transport sont nuls puisqu'on est en situation homogène, se réduisent à :

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} = P_{ij} + \phi_{ij} - \varepsilon_{ij} \quad (4.34)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial t} &= 0 + \frac{2}{\rho} p \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} - 2\nu \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_k} \\ \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial t} &= -\frac{4}{3} D k + \frac{2}{\rho} p \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} - 2\nu \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_k} \\ \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial t} &= \frac{4}{3} D k + \frac{2}{\rho} p \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} - 2\nu \frac{\partial \overline{w}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{w}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (4.35)$$

(on a utilisé ici le fait que la turbulence est isotrope à $t = t_0$, c'est-à-dire $\overline{u^2} = \overline{v^2} = \overline{w^2} = \frac{2}{3}k$).

Le modèle Rotta+IP donne alors, à $t = t_0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial t} &= 0 + 0 - \varepsilon_{11} \\ \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial t} &= -\frac{4}{3} D k + \frac{4}{3} C_2 D k - \varepsilon_{22} = -(1 - C_2) \frac{4}{3} D k - \varepsilon_{22} \\ \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial t} &= \frac{4}{3} D k - \frac{4}{3} C_2 D k - \varepsilon_{33} = (1 - C_2) \frac{4}{3} D k - \varepsilon_{33} \end{aligned} \quad (4.36)$$

On voit que le modèle IP est actif dès que la turbulence est soumise à la déformation. Il réagit instantanément : c'est donc bien un terme « rapide ». Il contrarie l'effet de la production qui tend à rendre la turbulence anisotrope, d'où son nom.

Le terme lent est nul à $t = t_0$, mais devient important plus tard, lorsque la turbulence est devenue anisotrope. Après le conduit de distorsion, seul le terme lent pourra être responsable du retour à l'isotropie, puisque $S_{ij} = 0$ et donc $\phi_{ij}^2 = 0$. C'est sur ce type d'expérience de retour à l'isotropie que le coefficient C_1 est calibré.

Le modèle Rotta+IP peut en fait être vu comme une simplification du modèle SSG : en effet, il suffit de prendre $C_1 = 3,6$; $C_2 = 0$; $C_1^* = 0$; $C_3 = 0,8$; $C_3^* = 0$; $C_4 = 1,2$; $C_5 = 1,2$ pour retrouver le modèle Rotta+IP. Ce modèle est complètement linéaire. Il est moins élaboré que le modèle SSG, ce qui ne garantit pas qu'il donnera toujours de moins bons résultats. C'est le modèle au second ordre le plus utilisé. Il est disponible dans certains codes de calcul industriels.

Autres modèles

D'autres modèles, plus complexes, existent : en particuliers, ils sont construits de manière à satisfaire les contraintes de réalisabilité (les modèles Rotta+IP et SSG ne sont pas réalisables). Ils seraient trop long de les exposer ici. Citons pour mémoire les modèles de :

✓ Shih et Lumley (1985) [40] ;

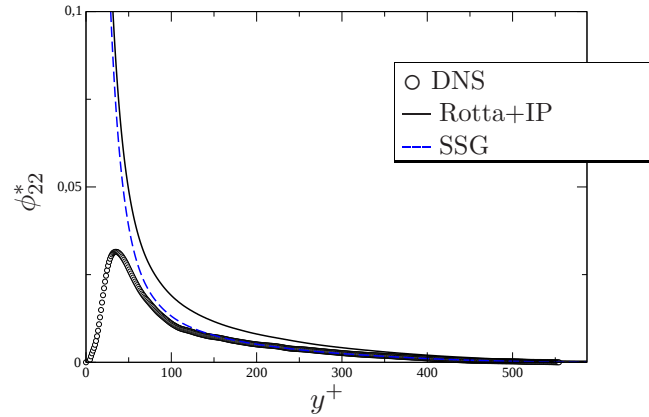


FIG. 4.2 – Test a priori des modèles Rotta+IP et SSG. Données de DNS de Moser *et al.* (1999) [35].

- ✓ Launder et Tselepidakis (1991) [22] ;
- ✓ Craft et Launder (1996) [5], modèle dit TCL, pour *Two-component limit* (voir son terme lent au 4.2.2).

Ces modèles sont très non-linéaires. Ils restent du domaine de la recherche et ne sont pas intégrés dans les codes industriels. Certains, notamment le modèle TCL, ont été testé avec succès sur de nombreux cas tests. Une très bonne revue des modèles au second ordre est donnée par Hanjalic (1994) [14].

4.2.4 Problèmes en proche paroi

Comme on peut le voir sur la figure 4.2, les modèles SSG et Rotta+IP ne sont pas valides en région de proche paroi. Nous verrons que ce problème peut être relié aux hypothèses utilisées (localité, quasi-homogénéité) qui doivent être remises en cause en proche paroi. Le modèle SSG donne cependant de bons résultats en zone log, contrairement au modèle Rotta+IP.

Termes dits « d'écho de paroi »

La figure 4.2 montre que le modèle Rotta+IP surestime la redistribution en zone log. Pour corriger ce défaut, Gibson et Launder (1978) [12], reprenant une idée de Shir (1973) [42], ont proposé d'inclure les termes suivants, actifs dans la zone log :

$$\phi_{ij}^{1p} = C_1^p \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_k u_m} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u_k u_i} n_k n_j - \frac{3}{2} \overline{u_k u_j} n_k n_i \right) f \left(\frac{L_T}{d} \right) \quad (4.37)$$

$$\phi_{ij}^{2p} = C_2^p \left(\phi_{km}^2 n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{ki}^2 n_k n_j - \frac{3}{2} \phi_{kj}^2 n_k n_i \right) f \left(\frac{L_T}{d} \right) \quad (4.38)$$

où $L_T = k^{3/2}/\varepsilon$ est l'échelle de longueur turbulente, d la distance du point à la paroi et $\mathbf{n}$ le vecteur unitaire normal à la paroi. f est choisi de telle manière que $f = 1$ dans la zone

logarithmique et $f = 0$ en écoulement libre. Ces termes permettent en effet de corriger le modèle dans la zone log. Ils sont très utilisés.

L'argumentation d'origine relie ces termes à l'écho de paroi (réflexion des fluctuations de pression sur la paroi) : c'est pourquoi ces termes sont appelés *termes d'écho de paroi*. En fait, cette argumentation est fautive (cf. Manceau *et al.*, 2001 [31]) : ces termes représentent en fait l'effet de blocage. Le nom de ces termes est donc très mal choisi.

4.3 Modélisation des termes de transport turbulent

Les deux termes de transport dus aux fluctuations turbulentes sont le terme de corrélations triples, ou diffusion turbulente :

$$D_{ij}^T = -\frac{\partial \overline{u_i u_j u_k}}{\partial x_k} \quad (4.39)$$

et le terme de diffusion par la pression

$$D_{ij}^p = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i p} \delta_{jk} + \overline{u_j p} \delta_{ik}) \quad (4.40)$$

Il est classique de considérer que ces deux termes ont des effets équivalents, de type diffusif, et de les modéliser ensemble, malgré les réserves apportées au § 4.1. On cherche alors à modéliser :

$$\overline{u_i u_j u_k} + \frac{1}{\rho} (\overline{u_i p} \delta_{jk} + \overline{u_j p} \delta_{ik}) \quad (4.41)$$

Historiquement, on a considéré que la diffusion par la pression était négligeable, et on s'est donc basé sur des mesures expérimentales de $\overline{u_i u_j u_k}$ et son équation exacte pour construire des modèles.

Modèle de Shir

Le modèle le plus simple, proposé par Shir (1973) [42] consiste à assimiler les corrélations triples à une simple diffusion des tensions de Reynolds par une viscosité turbulente (comme dans l'équation de k ou de ε), c'est-à-dire à faire une hypothèse de gradient :

$$\overline{u_i u_j u_k} = -C_s \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \quad (4.42)$$

Ce modèle peut être critiqué pour deux raisons :

- ✓ Il ne satisfait pas l'interchangeabilité des indices : i, j et k dans le membre de gauche jouent des rôles symétriques, pas dans le terme de droite. Le modèle n'est donc pas objectif, puisqu'il n'est pas invariant par échange des axes du repère. Cependant, les corrélations triples n'apparaissent dans les équations que par leurs gradients. On a alors :

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j u_k}}{\partial x_k} = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_s \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \right) \quad (4.43)$$

dans lequel k joue bien un rôle différent de ceux de i et j . L'objectivité est donc respectée pour les gradients de corrélations triples.

- ✓ Ce modèle est trop isotrope : lorsque la turbulence est anisotrope, il y a toutes les chances pour que le transport turbulent soit privilégié dans les directions où les fluctuations sont les plus fortes.

Ce modèle est parfois utilisé car il est le plus stable numériquement.

Modèle de Daly et Harlow

C'est parce qu'il est plus anisotrope que le modèle de Daly et Harlow (1970) [8] est beaucoup plus populaire. Il s'agit d'une hypothèse de gradient généralisée :

$$\overline{u_i u_j u_k} = -C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \quad (4.44)$$

Ce modèle ne respecte pas non plus l'interchangeabilité des indices des corrélations triples, mais il a l'avantage, par rapport au modèle précédent, d'être anisotrope. C'est de très loin le modèle le plus utilisé. Le coefficient préconisé par Daly et Harlow est $C_s = 0,22$, mais des valeurs entre 0,20 et 0,25 sont utilisées.

Modèle d'Hanjalić et Launder

À partir des équations exactes des corrélations triples et de quelques hypothèses qui permettent de les simplifier drastiquement, Hanjalić et Launder (1972) [16] ont proposé le modèle suivant :

$$\overline{u_i u_j u_k} = -C_s \frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{u_i u_l} \frac{\partial \overline{u_j u_k}}{\partial x_l} + \overline{u_j u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_k}}{\partial x_l} + \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \right) \quad (4.45)$$

Ce modèle est similaire à celui de Daly et Harlow, mais respecte en plus l'interchangeabilité des indices. Ce modèle marche un peu mieux que le modèle de Daly et Harlow, mais comme il contient 27 termes pour chaque tension de Reynolds au lieu de 9, il est souvent considéré que le gain en prédiction ne vaut pas l'effort numérique.

D'autres modèles, moins complexes (Mellor et Herring, 1973 [32]) ou plus complexes (Lumley, 1978 [24], Magnaudet, 1992 [25]) existent, mais sont très peu ou pas utilisés.

4.4 Modélisation du tenseur de dissipation

À grand nombre de Reynolds, la théorie de la cascade d'énergie de Kolmogorov montre que les petites échelles de l'écoulement sont relativement isotropes. La dissipation d'énergie cinétique

étant réalisée par les petites échelles, cela suggère d'écrire le tenseur de dissipation sous la forme isotrope, connue sous le nom de *modèle de Kolmogorov* :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij} \quad (4.46)$$

On a donc simplement besoin de résoudre une équation de transport pour ε , qui est en général tout à fait similaire à celle utilisée pour le modèle k - ε standard, sauf en ce qui concerne les termes de transport turbulent, dans lesquels une hypothèse de gradient généralisée est utilisée :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} \right) \quad (4.47)$$

L'isotropie des petites échelles n'est plus une hypothèse valide lorsque le nombre de Reynolds de la turbulence ν_t/ν est faible, en particulier en région de proche paroi. Nous verrons plus loin comment ce problème peut-être pris en compte. Enfin, comme pour les modèles au premier ordre, on peut utiliser une équation de transport pour une autre quantité que ε (en particulier, ω est souvent utilisé).

4.5 Conclusions sur les modèles au second ordre

Il est très difficile de donner des indications aussi précises que pour les modèles au premier ordre sur les performances relatives des modèles au second ordre. En effet, les modèles au second ordre ont été beaucoup moins largement utilisés, en particulier pour les applications industrielles : leur intégration dans des codes commerciaux est très récente.

Pour résumer, seuls les modèles suivant ont quitté le domaine de la recherche pour faire des incursions dans le domaine industriel :

- ✓ Modèle Rotta+IP
- ✓ Modèle SSG

Ces deux modèles sont basés sur les modèles de Daly et Harlow pour le transport turbulent et de Kolmogorov pour la dissipation. Pour les écoulements complexes, ils ont déjà montré leur supériorité par rapport aux modèles au premier ordre. Cependant, les développeurs de codes commerciaux ont encore du travail pour rendre ces modèles aussi stables numériquement que les modèles au premier ordre linéaires.

Chapitre 5

Les modèles algébriques explicites

Comme nous l'avons vu, les modèles au second ordre représentent beaucoup mieux la physique que ceux au premier ordre. En revanche, les modèles au premier ordre présentent des avantages au niveau de la simplicité et de la robustesse numérique. L'idéal, du point de vue industriel, serait de combiner les deux avantages, ou du moins de trouver un compromis entre les deux. La méthode que nous allons voir offre un tel compromis. Elle permet, moyennant quelques hypothèses, de développer formellement des modèles au premier ordre à partir de modèles au second ordre. Ces modèles s'appellent des modèles *algébriques explicites*.

5.1 Hypothèses de base de la modélisation algébrique

Des équations de transport des tensions de Reynolds :

$$\frac{d\overline{u_i u_j}}{dt} = P_{ij} + \underbrace{D_{ij}^\nu + D_{ij}^T + D_{ij}^p}_{D_{ij}} + \phi_{ij} - \varepsilon_{ij} \quad (5.1)$$

on peut déduire les équations de transport du tenseur d'anisotropie $b_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{2k} - \frac{1}{3}\delta_{ij}$:

$$\frac{db_{ij}}{dt} = \frac{1}{2k} \frac{d\overline{u_i u_j}}{dt} - \frac{\overline{u_i u_j}}{2k^2} \frac{dk}{dt} = \frac{1}{2k} \left(P_{ij} + D_{ij} + \phi_{ij} - \varepsilon_{ij} - \frac{\overline{u_i u_j}}{k} P - \frac{\overline{u_i u_j}}{k} D + \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \varepsilon \right) \quad (5.2)$$

On suppose que la tenseur d'anisotropie est *en équilibre*, c'est-à-dire qu'il se conserve sur une trajectoire :

$$\frac{db_{ij}}{dt} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial t} + U_k \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k} = 0 \quad (5.3)$$

Ceci est faux en général, mais est une bonne approximation dans beaucoup de cas (c'est exact en canal par exemple).

On suppose également que la diffusion totale (moléculaire, turbulente, par la pression) possède exactement la même anisotropie que le tenseur de Reynolds :

$$\frac{D_{ij}}{D} = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \quad (5.4)$$

Ceci est également faux dans l'absolu, mais constitue une approximation raisonnable, puisque la diffusion est essentiellement due à l'agitation turbulente.

Grâce à ces deux approximations, on obtient la relation purement algébrique suivante :

$$\left(P_{ij} - \frac{\overline{u_i u_j}}{k} P \right) + \phi_{ij} - \left(\varepsilon_{ij} - \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \varepsilon \right) = 0 \quad (5.5)$$

On peut donc, en théorie, utiliser un modèle au second ordre pour ϕ_{ij} et ε_{ij} , et obtenir une relation *algébrique* qui donne directement les tensions de Reynolds : on n'a plus besoin de résoudre d'équation différentielle. On appelle ce modèle un *modèle algébrique*.

Malheureusement, cette relation est *non-linéaire* : même en utilisant un modèle au second ordre linéaire, les tensions de Reynolds apparaissant dans P , le produit $\overline{u_i u_j} P$ est non-linéaire. On ne peut obtenir les tensions de Reynolds qu'en résolvant numériquement ce système non-linéaire, ce qui pose de gros problèmes numériques. On peut résoudre l'équation de manière *implicite* : à chaque itération du code, on utilise les valeurs des $\overline{u_i u_j}$ à l'itération précédente quand ça peut simplifier. Malheureusement, cette idée conduit également à de gros problèmes numériques, sauf si on utilise des pas de temps très petits.

5.2 Méthodologie algébrique explicite

Pour éviter ces problèmes numériques, on va chercher une solution analytique approchée de ce système. Pour simplifier, on va prendre ici l'exemple du modèle SSG. En introduisant ce modèle, et en écrivant la relation algébrique sous forme tensorielle, on a :

$$-\frac{1}{a_4} \mathbf{b} - a_3 \left(\mathbf{bS} + \mathbf{Sb} - \frac{2}{3} \{ \mathbf{bS} \} \mathbf{I} \right) + a_2 (\mathbf{bW} - \mathbf{Wb}) = a_1 \mathbf{S} \quad (5.6)$$

avec

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} C_3 \\ a_2 &= 1 - \frac{C_5}{2} \\ a_3 &= 1 - \frac{C_4}{2} \\ a_4 &= g\tau \\ \tau &= \frac{k}{\varepsilon} \\ g &= \left[\left(1 + \frac{C_1^*}{2} \right) \frac{P}{\varepsilon} - \left(\frac{13}{3} - \frac{C_1}{2} \right) + \frac{10}{3} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (5.7)$$

On a utilisé ici l'identité suivante :

$$\mathbf{P} = -\frac{4}{3}k\mathbf{S} - 2k(\mathbf{b}\mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{b}) + 2k(\mathbf{b}\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{b}) \quad (5.8)$$

On va exprimer le tenseur d'anisotropie dans une base tensorielle qui ne dépend que de l'écoulement moyen. Dans notre exemple, on va choisir de se limiter à une base à trois tenseurs :

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{S} \quad \mathbf{T}_2 = \mathbf{S}\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{S} \quad \mathbf{T}_3 = \mathbf{S}^2 - \frac{1}{3}\{\mathbf{S}^2\}\mathbf{I} \quad (5.9)$$

Dans cette base, le tenseur d'anisotropie s'exprime comme :

$$\mathbf{b} = \alpha_1\mathbf{T}_1 + \alpha_2\mathbf{T}_2 + \alpha_3\mathbf{T}_3 \quad (5.10)$$

où les α_i sont les coefficients de projection.

La théorie des *bases d'intégrité* nous enseigne qu'il faudrait en fait dix tenseurs pour représenter $\mathbf{b}$ de manière exacte. Au chapitre sur les modèles au premier ordre, la loi de comportement la plus générale (3.7) contient dix tenseurs, plus le tenseur identité : ces tenseurs constituent une base d'intégrité. Utiliser une base à dix tenseurs est possible, mais complexe. On va donc se restreindre à 3. En effet, on sait que cela constitue une base pour un écoulement 2D. C'est donc un bon compromis.

On réalise alors une projection de Galerkin de l'équation algébrique (5.6) sur la base tensorielle, c'est-à-dire que :

✓ On introduit la décomposition $\mathbf{b} = \sum_{n=1}^3 \alpha_n \mathbf{T}_n$ dans la relation :

$$\sum_{n=1}^3 \alpha_n \left[-\frac{1}{a_4} \mathbf{T}_n - a_3 \left(\mathbf{T}_n \mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{T}_n - \frac{2}{3} \{\mathbf{T}_n \mathbf{S}\} \mathbf{I} \right) + a_2 (\mathbf{T}_n \mathbf{W} - \mathbf{W} \mathbf{T}_n) \right] = a_1 \mathbf{S} \quad (5.11)$$

✓ On projette cette relation sur chacun des tenseur $\mathbf{T}_m$ de la base tensorielle (on multiplie par $\mathbf{T}_m$ et on prend la trace). On obtient 3 relations ($m = 1, 2, 3$) :

$$\sum_{n=1}^3 \alpha_n \left[-\frac{1}{a_4} \{\mathbf{T}_n \mathbf{T}_m\} - a_3 \left(\{\mathbf{T}_n \mathbf{S} \mathbf{T}_m\} + \{\mathbf{S} \mathbf{T}_n \mathbf{T}_m\} \right) \right] \quad (5.12)$$

$$+ a_2 \left(\{\mathbf{T}_n \mathbf{W} \mathbf{T}_m\} - \{\mathbf{W} \mathbf{T}_n \mathbf{T}_m\} \right) \Big] = a_1 \{\mathbf{S} \mathbf{T}_m\} \quad (5.13)$$

Ces 3 relations peuvent se résumer sous forme matricielle :

$$\mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{Y} \quad \text{où} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

En inversant cette matrice analytiquement (avec un logiciel de calcul symbolique), on obtient une expression *explicite* des α_i , un peu complexe, de la forme :

$$\alpha_i = f_i(k, \varepsilon, P, \{\mathbf{S}^2\}, \{\mathbf{W}^2\}) \quad (5.15)$$

On retombe exactement sur un modèle au premier ordre quadratique sous la forme générale :

$$\mathbf{b} = \alpha_1 \mathbf{S} + \alpha_2 (\mathbf{S}\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{S}) + \alpha_3 \left(\mathbf{S}^2 - \frac{1}{3} \{\mathbf{S}^2\} \mathbf{I} \right) \quad (5.16)$$

dans lequel les coefficients sont des fonctions des invariants $\{\mathbf{S}^2\}$ et $\{\mathbf{W}^2\}$.

Cependant, la production P apparaît dans les α_i : comme $P = -2\alpha_1 k \{\mathbf{S}^2\}$, la relation pour α_1 est en fait non-linéaire (au moins cubique). α_1 ne peut donc pas être obtenu analytiquement : on doit résoudre l'équation algébrique non-linéaire au cours du calcul.

Cette méthode ne nécessite pas de calibration : en effet on connaît l'expression des α_i , qui découle directement du modèle au second ordre utilisé. D'autre part, la variation des coefficients en fonction des invariants permet de reproduire les mêmes mécanismes physiques que le modèle au second ordre sous-jacent (mais il y a les deux hypothèses de départ : équilibre du tenseur d'anisotropie et alignement de la diffusion sur le tenseur de Reynolds, et la projection sur une base tensorielle réduite est une approximation). En particulier, les mécanismes liés aux termes de production restent présents.

On voit que k et ε apparaissent dans les α_i : on va donc résoudre leurs équations. Il s'agit donc de modèles à deux équations.

Si on avait utilisé une base à un seul tenseur, $\mathbf{S}$, on serait retombé sur un modèle k - ε linéaire :

$$\mathbf{b} = -\frac{\nu_t}{k} \mathbf{S} \quad (5.17)$$

La différence essentielle réside alors dans le fait que ν_t est fonction des invariants, ce qui enrichi beaucoup le modèle.

On a finalement écrit un modèle à deux équations de transport (k et ε) qui possède des propriétés proches du modèle au second ordre de départ : on obtient un bon compromis entre représentation de la physique et robustesse numérique. C'est pourquoi ce type d'approche est un domaine de recherche très actif. Cependant, il est évident que si le modèle au second ordre de départ n'est pas valide en proche paroi, le modèle algébrique explicite qui en découle ne le sera pas non plus (il n'y a pas de miracles).

Chapitre 6

La région de proche paroi

Nous avons vu au fur et à mesure des chapitres précédents que les modèles n'étaient, pour la grande majorité, pas applicables dans les régions proches des parois. En effet, dans cette zone interviennent des phénomènes physiques particuliers qui font que les hypothèses sur lesquelles sont basés les modèles ne sont pas valables. Un traitement particulier de la région de proche paroi est donc nécessaire.

Ces effets sont de deux types :

✓ **Effets visqueux :**

- ↪ de très forts gradients de vitesse moyenne (adhérence à la paroi), impliquant un pic de production de turbulence ;
- ↪ un amortissement de toutes les composantes de la vitesse fluctuante ;
- ↪ un resserrement du spectre de la turbulence (disparition de la zone inertielle).

✓ **Effets non-visqueux :**

- ↪ Écho de paroi : on peut montrer mathématiquement qu'on peut représenter l'effet de la réflexion des fluctuations de pression sur les parois en considérant un écoulement miroir qui génère des fluctuations de pression qui viennent s'ajouter à celles générées par l'écoulement réel. Cet effet conduit à une augmentation des fluctuations de pression et donc à une augmentation de la redistribution. Dans une situation de type couche limite (écoulement parallèle à la paroi), la redistribution prend de l'énergie à la composante $\overline{u^2}$ pour la redonner à $\overline{v^2}$ et $\overline{w^2}$. L'effet d'écho de paroi tend à accroître ce phénomène.
- ↪ Effet de blocage : c'est une conséquence de l'incompressibilité sur les fluctuations de vitesse. Toute fluctuation en direction de la paroi génère une zone de surpression qui conduit à un amortissement sélectif de la fluctuation normale à la paroi. Ce blocage devient suffisamment fort à l'approche de la paroi que la composante $\overline{v^2}$ donne de l'énergie (essentiellement à $\overline{w^2}$) en dessous de $y^+ = 12$.

Les deux effets, schématisés sur la figure 6.1 sont non-locaux (la paroi est ressentie à distance par la turbulence). L'effet d'écho de paroi est négligeable devant l'effet de blocage.

Ces effets mettent en défaut :

- ✓ La quasi-homogénéité : Les gradients de vitesse moyenne imposent un pic de production turbulente aux alentours de $y^+ = 11$ et donc un pic d'énergie turbulente. La dissipation



FIG. 6.1 – Vue schématique des effets non-visqueux dus à la présence de la paroi. A gauche : effet d'écho de paroi. A droite : effet de blocage.

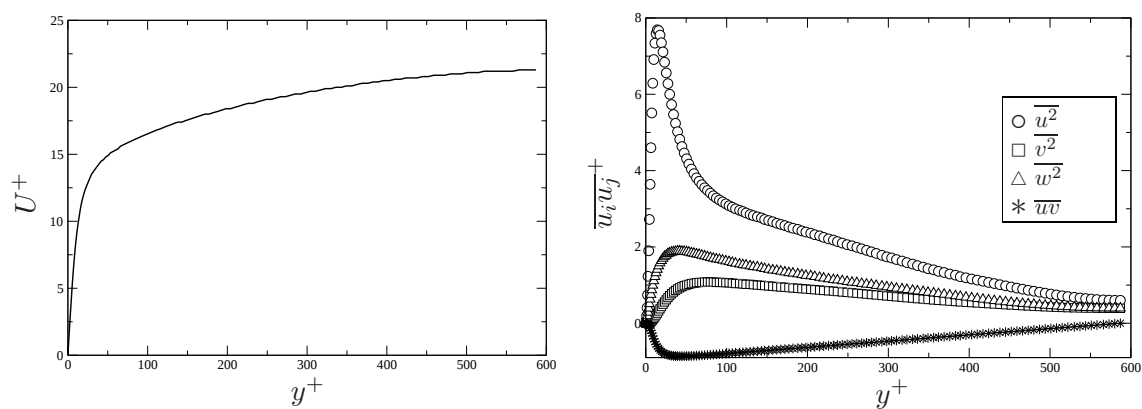


FIG. 6.2 – Données de DNS en canal à $Re_\tau = 590$ (Moser *et al.*, 1999 [35]).

visqueuse impose une chute brutale des tensions de Reynolds. On peut voir sur la figure 6.2 à quel point la turbulence est inhomogène en proche paroi.

- ✓ La localité : les effets non visqueux sont des effets non locaux (à cause d’eux, la turbulence sent à distance la présence de la paroi).
- ✓ L’hypothèse haut-Reynolds : l’absence de séparation entre les grandes et les petites échelles fait que la viscosité n’est plus négligeable.

Conséquences pour la modélisation

Les modèles de turbulence basés sur ces hypothèses ne sont donc plus applicables en région de proche paroi. On a alors le choix entre plusieurs méthodes :

- ✓ Ne pas résoudre la région de proche paroi. Il faut alors utiliser des *lois (ou fonctions) de parois*, qui sont des conditions aux limites appliquées à l’intérieur du fluide.
- ✓ Introduire des fonctions dépendant de la distance à la paroi ou du nombre de Reynolds turbulent Re_t pour « forcer » le modèle à mieux se comporter. C’est ce qu’on appelle les modèles bas-Reynolds.
- ✓ Résoudre des équations différentes dans la zone de proche paroi, conduisant à des modèles dits à *deux couches*.
- ✓ Revoir les hypothèses utilisées dans le développement des modèles, en particulier la localité. Nous verrons la méthode de la relaxation elliptique au § 6.7.
- ✓ Utiliser des modèles qui marchent en région de proche paroi, par exemple le modèle $k-\omega$ ou le modèle TCL.

6.1 Rappel : le comportement « universel » en proche paroi

Dans le cas d’un écoulement le long d’une plaque plane, à la limite des grands nombres de Reynolds, on peut montrer que les différentes grandeurs de l’écoulement suivent un comportement « universel » (résultat théorique de von Kármán, 1930 [49], et Millikan, 1938 [34])

6.1.1 Loi logarithmique et corollaires

Dans un canal, l’équilibre d’une tranche de fluide de la largeur $2h$ du canal requiert que la contrainte de frottement à la paroi $\tau_w = \mu \left. \frac{dU}{dy} \right|_0$ s’écrive :

$$\tau_w = -h \frac{dP}{dx} \quad (6.1)$$

Intégrons entre 0 et y l’équation de la quantité de mouvement suivant l’axe x :

$$0 = -\frac{y}{\rho} \frac{dP}{dx} - \overline{uv} + \nu \frac{dU}{dy} - \nu \left. \frac{dU}{dy} \right|_0 \quad (6.2)$$

En utilisant (6.1) et en introduisant la vitesse de frottement définie par $\tau_w = \rho u_\tau^2$, (6.2) devient :

$$-\overline{uv} + \nu \frac{dU}{dy} = u_\tau^2 \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (6.3)$$

Si on adimensionne cette équation par u_τ et h , on obtient, en introduisant $\eta = y/h$:

$$-\frac{\overline{uv}}{u_\tau^2} + \frac{1}{Re_\tau} \frac{dU/u_\tau}{d\eta} = 1 - \eta \quad (6.4)$$

Lorsque le nombre de Reynolds de frottement Re_τ est grand, le terme visqueux disparaît.

Or, à la paroi, les termes visqueux sont prépondérants : (6.4) n'est donc pas utilisable près des parois. Il faut alors choisir une autre échelle de longueur de manière à ce que le terme visqueux ne disparaisse pas aux grands nombres de Reynolds. Cette échelle est ν/u_τ , car (6.3) prend alors la forme :

$$-\frac{\overline{uv}}{u_\tau^2} + \frac{dU/u_\tau}{dy^+} = 1 - \frac{y^+}{Re_\tau} \quad (6.5)$$

où $y^+ = yu_\tau/\nu$.

Les équations (6.4) et (6.5) sont équivalentes tant que le nombre de Reynolds reste fini. Mais quand $Re_\tau \rightarrow \infty$, (6.4) devient :

$$-\frac{\overline{uv}}{u_\tau^2} = 1 - \eta \quad (6.6)$$

La zone de validité de (6.6), dans laquelle l'écoulement est indépendant de la viscosité, est appelée *zone centrale*.

Dans la limite $Re_\tau \rightarrow \infty$, (6.5) devient :

$$-\frac{\overline{uv}}{u_\tau^2} + \frac{dU/u_\tau}{dy^+} = 1 \quad (6.7)$$

Cette équation n'est valable que dans la région où $\eta \rightarrow 0$, qui est appelée *zone de paroi*. L'écoulement y est indépendant de la largeur du canal. Dans cette zone, la contrainte de cisaillement totale, somme de la contrainte turbulente et de la contrainte visqueuse, est donc constante.

Zone de paroi

(6.7) suggère qu'il existe une relation entre U , y , u_τ et ν (mais pas h), de la forme :

$$\mathcal{F}(U, y, u_\tau, \nu) = 0 \quad (6.8)$$

En adimensionnant cette relation par u_τ et ν , on obtient :

$$\mathcal{F}(U^+, y^+, 1, 1) = 0 \quad (6.9)$$

Le théorème des fonctions implicites donne finalement :

$$U^+ = f(y^+) \quad (6.10)$$

Dans la sous-couche visqueuse, le premier terme de (6.7) est négligeable, car les effets visqueux sont dominants. On a alors :

$$U^+ = y^+ \quad (6.11)$$

Zone centrale

(6.6) suggère que l'écoulement soit indépendant de la viscosité. Il est plus commode, ici, d'écrire une relation impliquant la dérivée de la vitesse :

$$\mathcal{H}(\mathrm{d}U/\mathrm{d}y, y, u_\tau, h) = 0 \quad (6.12)$$

Après adimensionalisation par u_τ et h , on a :

$$\mathcal{H}(\mathrm{d}U^+/\mathrm{d}\eta, \eta, 1, 1) = 0 \quad (6.13)$$

ce qui donne :

$$\frac{\mathrm{d}U^+}{\mathrm{d}\eta} = h(\eta) \quad (6.14)$$

ou encore, en introduisant H , la primitive de h :

$$\frac{\mathrm{d}U^+}{\mathrm{d}\eta} = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\eta} \quad (6.15)$$

En intégrant (6.15) depuis le centre du canal, on obtient la *loi de défaut de vitesse* :

$$\frac{U - U_m}{u_\tau} = H(\eta) \quad (6.16)$$

où U_m est la vitesse au centre du canal.

Loi logarithmique

Quand $Re_\tau \rightarrow \infty$, on peut supposer qu'il existe une région dans laquelle $y^+ \rightarrow \infty$ et $\eta \rightarrow 0$ sont valables simultanément, d'où :

$$\frac{u_\tau^2}{\nu} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y^+} = \frac{u_\tau}{h} \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\eta} \quad (6.17)$$

ce qui donne

$$y^+ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y^+} = \eta \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\eta} \quad (6.18)$$

Dans cette égalité, le membre de gauche ne dépend que de y^+ , tandis que le membre de droite ne dépend que de η . Les deux membres sont par conséquent constants. La constante est notée $1/\kappa$, κ étant appelée *constante de von Kármán*. L'expérience montre que $\kappa \simeq 0,41$.

On en déduit la *loi logarithmique* :

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + C \quad (6.19)$$

La zone de validité de cette loi, correspondant à $y^+ \rightarrow \infty$ et $\eta \rightarrow 0$ est appelée *zone logarithmique*.

Dans cette zone, (6.6) et (6.7) donnent toutes deux :

$$-\overline{uv} = u_\tau^2 \quad (6.20)$$

La contrainte de cisaillement turbulente est donc constante. Ce résultat suggère que dans cette région, les tensions de Reynolds sont constantes, ce qui implique que le transport turbulent est nul : on dit alors que la turbulence est en équilibre local. L'équation de transport de k se réduit alors à $P = \varepsilon$. Comme $P = -\overline{uv} dU/dy$, les équations (6.19) et (6.20) montrent qu'on a également dans cette zone :

$$\varepsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa y} \quad (6.21)$$

Résumé

- ✓ Dans la sous-couche visqueuse : $\frac{U}{u_\tau} = \frac{yu_\tau}{\nu}$
- ✓ Dans la zone log :

$$\frac{U}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{yu_\tau}{\nu} + C \quad ; \quad \varepsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa y} \quad ; \quad \overline{uv} = -u_\tau^2 \quad ; \quad \overline{u_i u_j} = \text{cste}$$

Validité de ce comportement « universel »

Ces lois ont été obtenues avec des hypothèses très fortes :

- ✓ écoulement sur plaque plane (canal ou couche limite) ;
- ✓ nombre de Reynolds très grand ;
- ✓ pas de gradient de pression externe.

Ce sont des hypothèses très strictes, qui ne s'appliquent *jamais*.

Cependant, les conclusions obtenues sont fondamentales : le profil de vitesse adimensionné, les tensions de Reynolds et la dissipation, après adimensionalisation par la vitesse de frottement et la viscosité, ont un comportement qui ne dépend plus du nombre de Reynolds : on a donc une certaine « universalité ».

Dans les écoulements réels (nombre de Reynolds $\neq \infty$, parois courbes, gradients de pression, tridimensionalité, décollements, ...) on devra considérer :

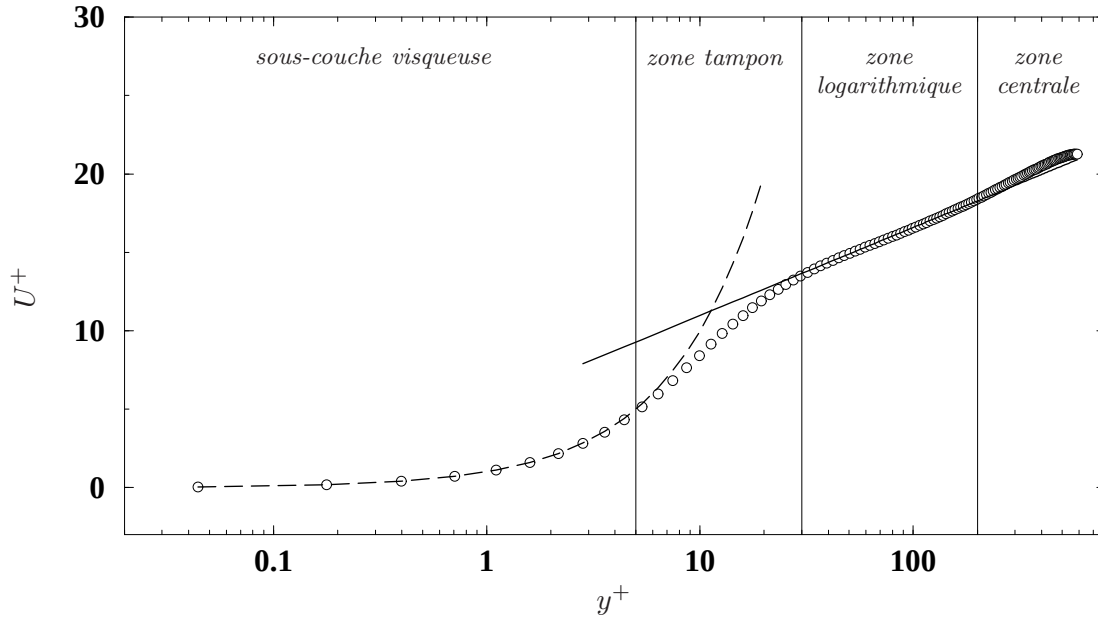


FIG. 6.3 – DNS de Moser *et al.* [35] à $Re_\tau = 590$. $\circ$ U donné par la DNS ; --- profil linéaire $U^+ = y^+$; — profil logarithmique $U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + 5,4$.

- ✓ soit que le comportement « universel » est perturbé ;
- ✓ soit qu'il est totalement modifié (aux points de décollement, par exemple).

6.1.2 Développements de Taylor à la paroi

Le développement de Taylor à la paroi ($y \rightarrow 0$) des vitesses moyennes et fluctuantes s'écrit :

$$\begin{cases} U = \mathcal{A}_1 y + \mathcal{A}_2 y^2 + O(y^3) \\ u = a_1 y + a_2 y^2 + O(y^3) \\ v = b_2 y^2 + O(y^3) \\ w = c_1 y + c_2 y^2 + O(y^3) \\ p = p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + O(y^3) \end{cases} \quad (6.22)$$

Où on a appliqué :

$$\begin{cases} U(0) = 0 & \text{Adhérence à la paroi} \\ u_i(0) & \text{Adhérence à la paroi} \\ \frac{\partial v}{\partial y}(0) = 0 & \text{Incompressibilité (blocage)} \end{cases} \quad (6.23)$$

Ces relations ne sont valables que *très près* de la paroi (typiquement, jusqu'à $y^+ \simeq 5$, c'est-à-dire dans la sous-couche visqueuse).

On en déduit le comportement des tensions de Reynolds :

$$\begin{cases} \overline{u^2} = \overline{a_1^2} y^2 + 2\overline{a_1 a_2} y^3 + O(y^4) \\ \overline{v^2} = \overline{b_2^2} y^4 + 2\overline{b_2 b_3} y^5 + O(y^6) \\ \overline{w^2} = \overline{c_1^2} y^2 + 2\overline{c_1 c_2} y^3 + O(y^4) \\ \overline{uv} = \overline{a_1 b_2} y^3 + (\overline{a_2 b_2} + \overline{a_1 b_3}) y^4 + O(y^5) \\ \overline{uw} = \overline{a_1 c_1} y^2 + (\overline{a_2 c_1} + \overline{a_1 c_2}) y^3 + O(y^4) \\ \overline{vw} = \overline{c_1 b_2} y^3 + (\overline{c_2 b_2} + \overline{c_1 b_3}) y^4 + O(y^5) \end{cases} \quad (6.24)$$

Et pour k :

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} = \frac{1}{2} (\overline{a_1^2} + \overline{c_1^2}) y^2 + (\overline{a_1 a_2} + \overline{c_1 c_2}) y^3 + O(y^4) \quad (6.25)$$

On peut en tirer des conclusions très importantes :

- ✓ La turbulence décroît comme y^2 .
- ✓ Les composantes impliquant 1 fois v décroissent comme y^3 ($\overline{uv}$ et $\overline{vw}$).
- ✓ La composante $\overline{v^2}$ décroît comme y^4 .

La turbulence à la paroi tend donc vers un état très anisotrope, dit à *deux composantes*, c'est-à-dire que $\overline{v^2} \ll \overline{u^2}$ et $\overline{v^2} \ll \overline{w^2}$.

6.2 Notions de « haut-Reynolds » et « bas-Reynolds »

On fait souvent référence aux modèles « haut-Reynolds » ou « bas-Reynolds ». Cela ne fait aucunement référence au nombre de Reynolds *global* de l'écoulement :

$$Re = \frac{U_{\text{ref}} L_{\text{ref}}}{\nu} \quad (6.26)$$

mais au nombre de Reynolds turbulent :

$$Re_t = \frac{\nu_t}{\nu} \quad (6.27)$$

qui est *local* : il varie au sein de l'écoulement, et notamment, tend vers 0 à la paroi. Cela signifie que :

- ✓ près de la paroi, il y a une *zone bas-Reynolds* ;
- ✓ mais il peut y avoir des zones bas-Reynolds ailleurs que près de la paroi.

Il y a eu historiquement une confusion de vocabulaire, qui persiste encore aujourd'hui : On appelle le plus souvent *modèle bas-Reynolds* un modèle qui est capable de reproduire la zone de proche paroi (c'est-à-dire , qui est intégrable jusqu'à la paroi). On appelle *modèle haut-Reynolds* un modèle qui n'est pas intégrable jusqu'à la paroi, pour lequel on doit utiliser des lois de paroi.

6.3 Les lois de paroi

Le profil universel de vitesse en proche paroi montre que, pour résoudre l'équation de la vitesse moyenne jusqu'à la paroi, il faut placer le premier point de calcul en $y^+ \simeq 1$, puisque $\frac{\partial U^+}{\partial y^+} = 1$.

Cette condition est *très stricte* : par exemple, pour un écoulement à Reynolds 10^6 , d'échelle caractéristique de l'ordre du mètre, la position $y^+ = 1$ correspond environ à $y = 20 \mu\text{m}$. Par le passé, il était impossible de satisfaire cette condition. Aujourd'hui, la puissance des ordinateurs permet le plus souvent de le faire, mais dans un processus industriel, cela reste assez coûteux en temps de calcul. C'est pourquoi, très souvent, des lois de paroi sont utilisées :

- ✓ On utilise un modèle haut-Reynolds (k - ε standard, k - ε RNG, ..., Rotta+IP, SSG, ...).
- ✓ On place le premier point de calcul en zone logarithmique.
- ✓ On n'utilise plus les conditions aux limites exactes ($U = 0$, $k = 0$, $\overline{u_i u_j} = 0$, ...), mais des lois de paroi, basées sur les lois « universelles » obtenues en zone log.

On se base sur les relations suivantes, appliquées *au premier point de calcul* :

$$\frac{U}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y u_\tau}{\nu} + C \quad (6.28)$$

(avec, en général $\kappa = 0,41$ et $C \simeq 5,1$),

$$\varepsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa y} \quad (6.29)$$

Pour un modèle au premier ordre de type k - ε , on utilisera :

$$k = \alpha u_\tau^2 \quad (6.30)$$

avec $\alpha \simeq 3,33$ (donnée expérimentale : c'est en fait le $C_\mu^{-1/2}$ du processus de calibration), tandis que pour un modèle au second ordre, on utilisera :

$$\overline{uv} = -u_\tau^2 \quad (6.31)$$

et pour les autres composantes,

$$\overline{u_i u_j} \propto u_\tau^2 \quad (6.32)$$

où le coefficient de proportionnalité dépend de la composante (il n'y a pas valeur universelle, chaque code utilise des valeurs différentes).

Attention : ces relations sont données pour une paroi située en $y = 0$. Si la paroi est orientée différemment, il faut faire un changement de repère.

Détermination de u_τ

On voit que les relations précédentes font apparaître une inconnue : u_τ . Il n'y a pas de méthode universelle pour résoudre cette question : c'est pourquoi deux codes peuvent souvent donner des résultats différents. Deux exemples de méthodes courantes (appliquées ici aux k - ε , et facilement extensible aux autres modèles), sont souvent utilisées en volumes finis :

- ✓ Méthode itérative :
 - ↪ On utilise dans (6.28) la valeur de U au premier point de calcul *obtenue à l'itération précédente*.
 - ↪ On résout alors l'équation (6.28) par une méthode itérative (type Newton) pour obtenir la valeur de u_τ .

↪ On utilise ce u_τ dans une condition aux limites de Neumann à la paroi pour la vitesse (en volumes finis, c'est ce dont on a besoin) :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\tau_w}{\mu} = \frac{u_\tau^2}{\nu} \quad (6.33)$$

↪ On utilise ce u_τ dans les conditions de Dirichlet $\varepsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa y}$ et $k = C_\mu^{-1/2} u_\tau^2$.

✓ Méthode à deux échelles

↪ On obtient une évaluation de u_τ par :

$$u_k^2 = C_\mu^{1/2} k \quad (6.34)$$

avec k au premier point de calcul à l'itération précédente.

↪ On peut alors utiliser la relation :

$$\frac{U}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y u_k}{\nu} + C \quad (6.35)$$

pour déterminer u_τ .

↪ On utilise ce u_τ dans une condition aux limites de Neumann pour la vitesse :

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\tau_w}{\mu} \quad (6.36)$$

où τ_w peut être évalué par ρu_τ^2 ou $\rho u_\tau u_k$.

↪ On utilise ce u_k dans la condition de Dirichlet $\varepsilon = u_k^3 / \kappa y$.

↪ On utilise alors pour k une condition de Neumann homogène : $\frac{\partial k}{\partial y} = 0$.

La méthode à deux échelles présente l'avantage d'être plus robuste : aux points d'arrêt, de décollement, de recollement, on a $U = 0$. Dans ce cas, la méthode itérative donne $u_\tau \simeq 0$, ce qui donne $\tau_w \simeq 0$, ce qui est correct, mais aussi $k \simeq 0$ et $\varepsilon \simeq 0$, ce qui est évidemment incorrect, puisque la turbulence n'a aucune raison de disparaître aux points de décollements. En revanche, la méthode à deux échelles ne fixe pas k et ε , mais impose toujours $u_\tau = 0$ et donc $\tau_w = 0$.

Avantages des lois de paroi

- ✓ Elles donnent de bons résultats lorsque la situation est proche des conditions idéales (très haut Reynolds, écoulement parallèle à la paroi, faible courbure des parois, *etc.*).
- ✓ Elles permettent des économies substantielles en nombre de mailles.
- ✓ Elles facilitent la construction du maillage (mailles moins aplaties près de la paroi).
- ✓ Elles sont robustes : même si leur champ d'application est en théorie très limité, on peut les utiliser tout le temps (ce qui ne garantit pas la qualité des résultats, bien sûr).

Inconvénients des lois de paroi

- ✓ Les relations ne s'appliquent en théorie pas : aux points d'arrêt, de décollement, de recollement, dans les zones de recirculation, quand la couche limite subit un gradient de pression, quand la paroi est courbe, quand l'écoulement est 3D, *etc.*
- ✓ Il faut bien maîtriser la position du premier point de calcul : il doit être situé dans la zone log, c'est-à-dire entre $y^+ = 30$ et environ $1/10^e$ de l'épaisseur de la couche limite : on peut donc souvent évaluer à l'avance la taille des mailles adéquate, mais il faut toujours vérifier a posteriori (en calculant u_τ à partir des résultats).

Il existe des lois de parois qui :

- ✓ prennent en compte l'influence d'un gradient de pression ;
- ✓ ou assurent un comportement à peu près correct même si le premier point de calcul est en dessous de $y^+ = 30$.

6.4 Modèles bas-Reynolds

Pour éviter l'utilisation des lois de parois, il faut intégrer les modèles jusqu'à la paroi. Pour cela, il faut corriger leur mauvais comportement dans la zone de proche paroi. La manière la plus simple (mais aussi la plus hasardeuse) est de « forcer » un modèle à reproduire des données (expérimentales ou de DNS) en introduisant des *fonctions d'amortissement*. Par exemple, pour corriger le k - ε standard, on introduit souvent une fonction f_μ dans la viscosité turbulente :

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (6.37)$$

Lam & Bremhorst (1981) [19], proposent par exemple :

$$f_\mu = \left[1 - \exp \left(-0,0165 \frac{\sqrt{k}y}{\nu} \right) \right]^2 \left(1 + \frac{20,5}{Re_t} \right) \quad (6.38)$$

qui permet de corriger la prédiction de $\overline{uv}$ en canal, comme le montre la figure 6.4. On remarque que cette fonction dépend à la fois de la distance à la paroi et du nombre de Reynolds turbulent. Certains modèles ne dépendent que de l'un ou de l'autre :

- ✓ La dépendance en $Re_y = \sqrt{k}y/\nu$ rend l'amortissement actif uniquement dans la zone de paroi.
- ✓ La dépendance en Re_t rend l'amortissement actif dans toutes les zones bas-Reynolds, y-compris en proche paroi.

Il existe un grand nombre de modèles de ce type (pour une liste, cf. par exemple Chassaing, 2000). Des fonctions d'amortissement sont également nécessaires dans l'équation de ε (fonctions venant alors en facteur de $C_{\varepsilon 1}$ et $C_{\varepsilon 2}$).

Pour les modèles au second ordre, des fonctions d'amortissement peuvent être introduites pour modifier le terme de redistribution, dans l'équation de ε et dans le modèle du tenseur de

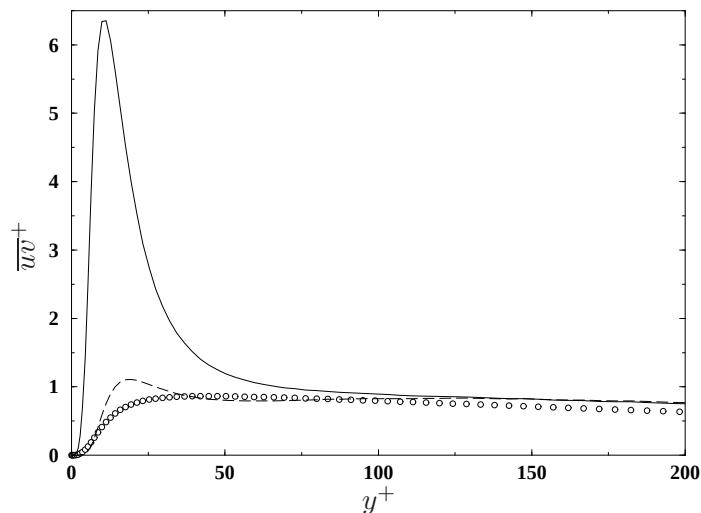


FIG. 6.4 – Test a priori en canal. $\circ$ $\overline{uv}$ donné par la DNS. — $\overline{uv}$ donné par la relation de Boussinesq. --- $\overline{uv}$ donné par la relation de Lam & Bremhorst (6.38).

dissipation ε_{ij} (par ex., modèle de Shima, 1988 [41]). Pour le tenseur de dissipation, en particulier, il est nécessaire de prendre en compte *l'anisotropie* de la dissipation : à haut Reynolds turbulent Re_t , il est légitime, comme on l'a vu au § 4.4, de supposer que les échelles dissipatives sont isotropes, dans la mesure où la séparation d'échelle est suffisante entre les structures énergétiques, en général anisotropes, et les structures dissipatives. En effet, les interactions non-linéaires qui sont à l'origine de la cascade énergétique, ont tendance à assurer un « brouillage » de la directionalité des structures, qui fait que la turbulence est de plus en plus isotrope au fur et à mesure de la cascade. En revanche, lorsque le nombre de Reynolds turbulent Re_t est faible, la séparation d'échelle est insuffisante et les structures dissipatives héritent en partie de l'anisotropie des grandes. C'est pourquoi le modèle le plus répandu consiste à relier de manière linéaire l'anisotropie du tenseur de dissipation (petites échelles) à l'anisotropie du tenseur de Reynolds (grandes échelles) sous la forme :

$$d_{ij} = f_\varepsilon b_{ij} \quad (6.39)$$

où f_ε est une fonction qui vaut un à bas-Reynolds (en particulier près de la paroi) et zéro à haut-Reynolds. L'anisotropie de la dissipation étant définie par

$$d_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{2\varepsilon} - \frac{1}{3}\delta_{ij} \quad (6.40)$$

on retrouve bien le modèle de Kolmogorov (4.46) à haut Reynolds, où $d_{ij} \rightarrow 0$.

Ces modèles utilisant des fonctions d'amortissement, qu'elles dépendent de Re_y , de Re_t ou des deux, sont appelés **modèles bas-Reynolds**. Cette approche permet de s'affranchir de l'utilisation des lois de paroi. Elle requiert en contrepartie un premier point de calcul en $y^+ \simeq 1$. De plus, les fonctions d'amortissement sont non-linéaires (exponentielles) et conduisent parfois à des difficultés numériques.

Elle sont surtout très empiriques et adaptées à un type d'écoulement particulier (écoulement de couche limite). Elles manquent par conséquent d'universalité, mais cependant beaucoup moins que les lois de paroi.

6.5 Modèles à deux couches

La modélisation dite à *deux couches* divise l'écoulement en 2 régions : la région de proche paroi et le reste du domaine. Dans le reste du domaine, les équations du modèle de base sont résolues (par ex., le $k-\varepsilon$ standard). Dans la zone de proche paroi, un modèle à 1 équation est utilisé : l'équation de k est résolue, mais ε est obtenu par une relation algébrique.

Par exemple, le modèle de Norris et Reynolds (1975) s'écrit

$$\varepsilon = \frac{k^{3/2}}{\ell} \left(1 + \frac{5,3}{Re_y} \right) \quad (6.41)$$

avec ℓ donné par

$$\ell = \kappa C_\mu^{-3/4} y \quad (6.42)$$

Une fonction d'amortissement est également utilisée pour la viscosité turbulente :

$$f_\mu = 1 - \exp \left(-\frac{Re_y}{50,5} \right) \quad (6.43)$$

Un test doit permettre de dire dans quelle zone on est : par exemple, pour ce modèle, on peut fixer la limite à $f_\mu = 0,95$, qui se situe dans la zone log.

Ces modèles nécessitent un premier point de calcul en $y^+ \simeq 1$. Ils s'avèrent en général plus stables numériquement que les modèles bas-Reynolds. Cependant, ils contiennent plus d'empirisme que les modèles bas-Reynolds, puisqu'ils nécessitent la prescription de ℓ . Cette approche est également applicable aux modèles au second ordre.

6.6 Modèle SST

Pour développer le modèle SST (Menter, 1994) [33], Menter est parti des remarques suivantes :

- ✓ le modèle $k-\varepsilon$ standard ne marche pas en proche paroi ;
- ✓ le modèle $k-\omega$ marche bien en proche paroi, mais est sensible au niveau de turbulence extérieur ;
- ✓ un modèle « mixte » conjuguerait tous les avantages.

L'idée est donc d'écrire un jeu d'équation qui tende vers le $k-\omega$ en proche paroi et vers le $k-\varepsilon$ loin des parois. La transition entre les deux modèles est réalisée grâce à des fonctions assez complexes qui dépendent de la distance à la paroi. Le principe est simple, mais l'écriture est complexe.

Ce modèle a été appliqué avec succès dans beaucoup de configurations. C'est actuellement le modèle préféré des industriels de l'aéronautique. Cependant, c'est un modèle au premier ordre linéaire, donc il souffre des défauts de ces modèles, mais tire parti des bonnes propriétés du $k-\omega$ en proche paroi.

6.7 La relaxation elliptique

Partant du constat que l'essentiel des problèmes en proche parois venaient des hypothèses de la théorie de Chou (localité, quasi-homogénéité), Durbin, en 1991 [9], a proposé une théorie différente. Nous avons vu que le terme de redistribution s'écrivait sous forme intégrale :

$$\phi_{ij}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^3} \overline{\nabla^2 p(\mathbf{x}') \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right]} \frac{dV(\mathbf{x}')}{4\pi \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} \quad (6.44)$$

L'hypothèse de base de Durbin est que les corrélations en deux points ont une décroissance exponentielle avec la distance r entre les deux points :

$$\overline{\nabla^2 p(\mathbf{x}') \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right]} = \overline{\nabla^2 p(\mathbf{x}') \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}') + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}') \right]} \exp\left(-\frac{r}{L}\right) \quad (6.45)$$

En utilisant cette hypothèse, on peut montrer que (6.44) est la solution de l'équation différentielle : ■

$$\phi_{ij} - L^2 \nabla^2 \phi_{ij} = -\frac{L^2}{\rho} \overline{\nabla^2 p(\mathbf{x}) \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right]} \quad (6.46)$$

Loin des parois, en situation quasi-homogène, $L^2 \nabla^2 \phi_{ij}$ tend vers zéro, donc l'équation se réduit à :

$$\phi_{ij} = -\frac{L^2}{\rho} \overline{\nabla^2 p(\mathbf{x}) \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right]} \quad (6.47)$$

Comme on est alors dans une région où les hypothèses de Chou s'appliquent, on peut considérer que, loin des parois, les modèles classiques (Rotta+IP, SSG, *etc.*) s'appliquent. Le second membre de (6.47) peut donc être modélisé par un modèle classique ϕ_{ij}^h . On en déduit que l'équation différentielle s'écrit simplement :

$$\phi_{ij} - L^2 \nabla^2 \phi_{ij} = \phi_{ij}^h \quad (6.48)$$

Cette équation est connue sous le nom d'*équation de relaxation elliptique*.

On voit donc que :

- ✓ ϕ_{ij} n'est pas donné par une relation algébrique, mais par une équation différentielle (une par composante, en fait).
- ✓ On peut l'utiliser avec n'importe quel modèle quasi-homogène ϕ_{ij}^h (Rotta+IP, SSG, *etc.*).
- ✓ On n'a pas utilisé les hypothèses de localité et de quasi-homogénéité : seul le second membre ϕ_{ij}^h les utilisent, mais il ne joue un rôle que loin de la paroi.

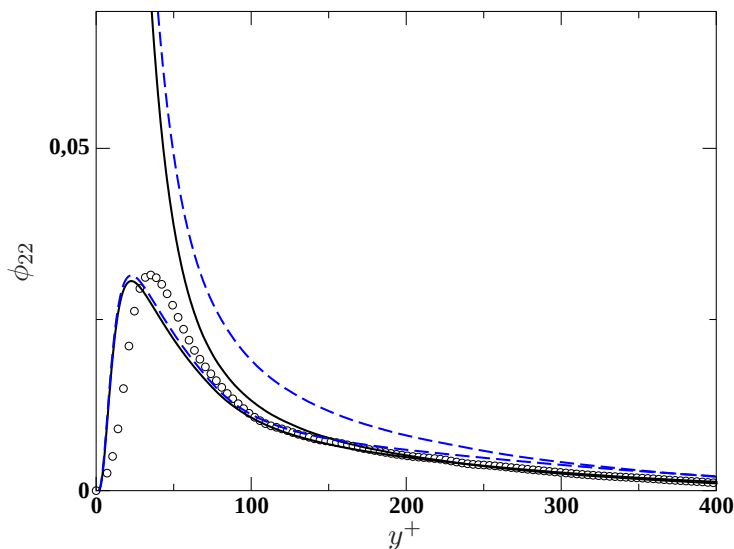


FIG. 6.5 – Test à priori de l’effet de la relaxation elliptique sur les modèles : comparaison du terme de redistribution ϕ_{22}^h (modèles quasi-homogènes seuls) et ϕ_{22} obtenus par l’équation (6.48) utilisant avec les mêmes modèles ϕ_{22}^h comme terme source. --- Rotta+IP ; — SSG. DNS en canal à $Re_\tau = 590$ de Moser *et al.*(1999) [35].

Cette méthode permet de corriger le comportement des modèles quasi-homogènes dans la région de proche paroi, comme on peut le voir sur la figure 6.5. En reproduisant de manière fidèle la redistribution en proche paroi, on reproduit très bien l’effet de blocage (effet non-local) et on retrouve ainsi la limite à deux composantes de la turbulence.

Cependant, la méthode présente des inconvénients notables :

- ✓ On ajoute 6 équations à résoudre, conduisant à un modèle à 13 équations.
- ✓ Le modèle est instable numériquement, à cause des conditions aux limites que l’on doit appliquer aux équations de relaxation elliptique pour satisfaire les comportements asymptotiques en proche paroi.

C’est pourquoi ce modèle est resté du domaine de la recherche.

Cependant, des modèles simplifiés utilisables en situation industrielle ont été développés :

- ✓ Le modèle à pondération elliptique (Elliptic-Blending Reynolds-stress model, EB-RSM), (Manceau et Hanjalić, 2002 [30, 28]), utilisant une seule équation différentielle supplémentaire (modèle à 8 équations) et numériquement stable.
- ✓ Le modèle algébrique explicite dérivé du modèle à pondération elliptique, le modèle $k-\varepsilon-\alpha$ (Manceau, 2003 [26]).
- ✓ Le modèle $\overline{v^2}-f$, proposé par Durbin en 1991 [9], disponible pour la plupart des codes commerciaux.

Le modèle $\overline{v^2}-f$ est une simplification drastique du modèle au second ordre de Durbin utilisant la relaxation elliptique. Il consiste à remplacer la viscosité turbulente

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (6.49)$$

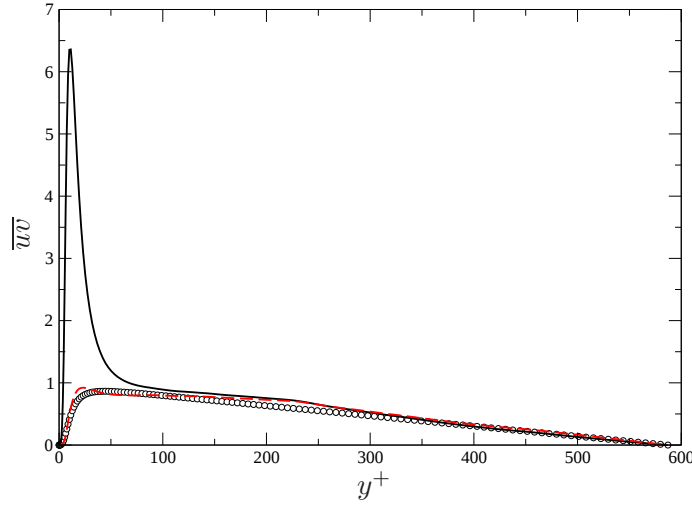


FIG. 6.6 – Test a priori de $\overline{uv}$ donné par : — Viscosité turbulente standard; --- Viscosité turbulente du modèle $\overline{v^2}$ - f . Données de DNS de Moser *et al.* (1999) [35] : canal à $Re_\tau = 590$.

par

$$\nu_t = C_\mu \frac{\overline{v^2} k}{\varepsilon} \quad (6.50)$$

L'échelle $\overline{v^2}$ (la composante du tenseur de Reynolds normale à la paroi) est en fait la bonne échelle à utiliser. Il suffit d'écrire la forme du modèle de Daly et Harlow en canal pour s'en convaincre : la seule composante non nulle de la diffusion turbulente s'écrit

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j v}}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial y} \left(\underbrace{C_s \overline{v^2} \frac{k}{\varepsilon}}_{\nu_i} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial y} \right) \quad (6.51)$$

La figure 6.6 montre l'effet spectaculaire de ce changement d'échelle sur la prédiction de $\overline{uv}$.

Les équations pour $\overline{v^2}$ et pour son terme de redistribution f_{22} (appelé simplement f) sont identiques à celles obtenues en canal (c'est-à-dire qu'on ne considère dans le modèle que la composante normale à la paroi). Ces équations valables en canal sont alors considérées comme valables dans toute configuration : cette hypothèse est assez osée, mais il s'est avéré que le modèle donne de très bons résultats dans de nombreux cas.

Le modèle $\overline{v^2}$ - f complet s'écrit :

$$\frac{dk}{dt} = P - \varepsilon + \nabla \cdot ((\nu + \nu_t) \nabla k) \quad (6.52)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{C'_{\varepsilon_1} P - C_{\varepsilon_2} \varepsilon}{T} + \nabla \cdot \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right) \quad (6.53)$$

$$\frac{d\overline{v^2}}{dt} = k f - \frac{\overline{v^2}}{k} \varepsilon + \nabla \cdot \left((\nu + \nu_t) \nabla \overline{v^2} \right) \quad (6.54)$$

$$f - L^2 \nabla^2 f = (C_1 - 1) \frac{(2/3 - \overline{v^2}/k)}{T} + C_2 \frac{P}{k} \quad (6.55)$$

$$\nu_t = C_\mu \overline{v^2} T \quad ; \quad P = 2\nu_t S_{ij} S_{ij} \quad (6.56)$$

$$L = C_L \max \left(\frac{k^{3/2}}{\varepsilon} ; C_\eta \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \right) \quad ; \quad T = \max \left(\frac{k}{\varepsilon} ; 6 \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2} \right) \quad (6.57)$$

Chapitre 7

Modélisation thermique

Dans les chapitres précédents, on a considéré qu'il n'y avait pas de variations de température : le but du présent chapitre est de s'intéresser aux modifications à apporter aux modèles lorsqu'il y en a.

7.1 Équations instantanées

Si on revient aux équations de Navier–Stokes, toujours dans le cas d'un fluide Newtonien incompressible, on a :

✓ Conservation de la masse (continuité) :

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \frac{\partial \rho^* u_i^*}{\partial x_i} = 0 \quad (7.1)$$

✓ Conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \rho^* u_i^*}{\partial t} + \frac{\partial \rho^* u_i^* u_j^*}{\partial x_j} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \right) \right] + \rho^* g_i \quad (7.2)$$

✓ Conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial \rho^* C_v T^*}{\partial t} + \frac{\partial \rho^* C_v u_i^* T^*}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T^*}{\partial x_i} \right) \quad (7.3)$$

En supposant que les écarts de température ne sont pas trop grands, on peut appliquer **l'approximation de Boussinesq**, qui suppose que :

- ✓ μ , k et C_v sont indépendants de la température ;
- ✓ La masse volumique varie linéairement en fonction de la température :

$$\rho^* = \rho_0^* - \beta \rho_0^* (T^* - T_0^*) \quad \text{avec } \beta = -\frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial \rho^*}{\partial T} \quad (\text{coefficient de compressibilité isobare}) \quad (7.4)$$

On ne garde que le terme d'ordre 0 dans les équations ($\rho^* = \rho_0^*$) sauf pour le terme de flottabilité :

$$\rho^* g_i = \rho_0^* g_i - \rho_0^* g_i \beta (T^* - T_0) \quad (7.5)$$

car il est essentiel pour reproduire l'effet des variations de température sur l'écoulement.

On obtient alors les équations suivantes :

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} = 0 \quad (7.6)$$

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t} + \frac{\partial u_i^* u_j^*}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p^{**}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j \partial x_j} - \beta g_i (T^* - T_0) \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t} + \frac{\partial u_i^* T^*}{\partial x_i} = \alpha \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_i \partial x_i} \quad (7.8)$$

On remarquera qu'on a de nouveau « absorbé » la pression hydrostatique dans p^{**} :

$$p^{**} = p^* - \rho_0 g_j x_i \delta_{ij} \quad (7.9)$$

7.2 Décomposition de Reynolds

En introduisant la décomposition de Reynolds, avec $T^* = T + \theta$, on arrive alors à :

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (7.10)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} - \beta g_i (T - T_0) \quad (7.11)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{\partial \overline{u_i \theta}}{\partial x_j} \quad (7.12)$$

On voit donc apparaître, par rapport au cas sans thermique, trois nouvelles inconnues : les flux thermiques turbulents $\overline{u_i \theta}$.

Les flux thermiques turbulents jouent le même rôle pour la température moyenne que les tensions de Reynolds pour la vitesse moyenne : ils augmentent le transport d'énergie interne (alors qu'il s'agissait de quantité de mouvement pour les tensions de Reynolds). On a comme pour les $\overline{u_i u_j}$ le choix de la modélisation au premier ou au second ordre.

La modélisation des flux thermiques a reçu beaucoup moins d'attention que la modélisation des tensions de Reynolds. La raison essentielle est qu'il est très difficile de les mesurer. Il a donc fallu attendre les années 80 pour pouvoir les connaître dans quelques cas grâce à la DNS. On va entrer beaucoup moins dans les détails que pour les tensions de Reynolds. Pour une revue complète, consulter par exemple l'article d'Hanjalić [15].

7.3 La convection forcée

Un type d'écoulement thermique simplifié est le cas de la convection forcée : par définition, on considère qu'on est en convection forcée si la thermique n'a pas d'influence sur la dynamique, c'est-à-dire si on peut négliger le terme $\beta g_i (T - T_0)$ dans l'équation de la vitesse moyenne. Cela dépend, comme d'habitude, d'un rapport entre échelles de temps caractéristiques :

✓ Échelle de temps des phénomènes de flottabilité s'écrit :

$$\tau_{\text{flott}} = \frac{U_{\text{ref}}}{\beta g \Delta T} \quad (7.13)$$

✓ Échelle de temps des phénomènes convectifs : $\tau_{\text{conv}} = \frac{L}{U_{\text{ref}}}$

✓ Le rapport des deux s'appelle *nombre de Richardson* :

$$Ri = \frac{\tau_{\text{conv}}}{\tau_{\text{flott}}} = \frac{\beta g \Delta T L}{U_{\text{ref}}^2} \quad (7.14)$$

✓ Lorsque le nombre de Richardson est petit devant un ($Ri \ll 1$), on peut considérer qu'on est en convection forcée.

Dans ce cas, la thermique n'ayant pas d'influence sur la dynamique, on n'a pas besoin de modifier la modélisation des tensions de Reynolds.

De la même manière que pour les tensions de Reynolds, on peut alors chercher à modéliser les flux thermiques turbulents par une relation algébrique (modèle au premier ordre). Les modèles les plus répandus sont décrits ci-dessous.

7.3.1 Hypothèse de simple gradient (*Simple Gradient Diffusion Hypothesis, SGDH*)

On écrit simplement les flux thermique turbulent de la manière suivante :

$$\overline{u_i \theta} = -\alpha_t \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (7.15)$$

où la diffusivité turbulente est reliée directement à la viscosité turbulente :

$$\alpha_t = \nu_t / \sigma_t. \quad (7.16)$$

C'est l'analogue de l'hypothèse de Boussinesq pour les tensions de Reynolds (à la différence qu'on a ici un vecteur, et non un tenseur). Cela correspond à la loi de Fourier pour la diffusion moléculaire. σ_t est le nombre de Prandtl turbulent. Il peut être pris constant (en général, $\sigma_t = 0,9$ ou 1) ou calculé en utilisant une corrélation expérimentale, par exemple, la modélisation de Kays et Crawford [18] :

$$\sigma_t = \frac{1}{0,5882 + 0,228(\nu_t/\nu) - 0,0441(\nu_t/\nu)^2 [1 - \exp(-5,165/(\nu_t/\nu))]} \quad (7.17)$$

Cela suppose un lien direct entre la diffusivité turbulente et la viscosité turbulente, c'est-à-dire une similitude entre les échelles de longueur et de temps thermiques et dynamiques.

Modèles $k-\varepsilon-\overline{\theta^2}-\varepsilon_\theta$

Pour s'affranchir de cette hypothèse restrictive, on peut définir le rapport des échelles de temps $R = \tau_\theta/\tau$, où $\tau = k/\varepsilon$ et $\tau_\theta = k_\theta/\varepsilon_\theta$. Ici, k_θ est, par analogie à la dynamique, la demi-variance de température $k_\theta = \overline{\theta^2}/2$ et ε_θ son taux de dissipation. On peut utiliser directement τ_θ pour évaluer la diffusivité turbulente par :

$$\alpha_t = k\tau_\theta \quad (7.18)$$

mais la plupart des auteurs suggèrent l'utilisation d'une échelle de temps composite τ_m , fonction à la fois de τ_θ et de τ . Par exemple, Nagano, Tagawa et Tsuji (1991) suggèrent la relation suivante :

$$\tau_m = \frac{k}{\varepsilon} \left[(2R)^2 + 3,4(2R)^{1/2} \left(\frac{\nu_t}{\nu} \right)^{-3/4} \right] \quad (7.19)$$

On voit alors que pour calculer le rapport d'échelles de temps R , on a besoin d'avoir k_θ et ε_θ . On doit alors résoudre des équations de transport supplémentaires pour ces deux variables : on aboutit alors souvent à un modèle à 4 équations : $k-\varepsilon-k_\theta-\varepsilon_\theta$, où, ce qui est la même chose $k-\varepsilon-\overline{\theta^2}-\varepsilon_\theta$.

On écrit alors l'équation de transport exacte de $\overline{\theta^2}$:

$$\frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial t} + U_k \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_k} = \underbrace{-2\overline{\theta u_k} \frac{\partial T}{\partial x_k}}_{P_\theta} - \underbrace{2\alpha \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k}}_{\varepsilon_\theta} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\alpha \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_k} \right)}_{D_\theta^\alpha} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(-\overline{u_k \theta^2} \right)}_{D_\theta^t} \quad (7.20)$$

dans laquelle on reconnaît, comme d'habitude, un terme de production P_θ , un terme de dissipation ε_θ , un terme de diffusion moléculaire D_θ^α et un terme de transport turbulent D_θ^t . On modélise par exemple D_θ^t par une diffusivité turbulente :

$$D_\theta^t = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\alpha_t \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_k} \right) \quad (7.21)$$

Pour ε_θ , on résout une équation de transport analogue à celle utilisée pour ε , mais l'analyse de son équation exacte suggère de faire intervenir à la fois des termes de production et de dissipation thermique et dynamique :

$$\frac{D\varepsilon_\theta}{Dt} = C_{P1} \frac{\varepsilon_\theta}{\overline{\theta^2}} P_\theta + C_{P2} \frac{\varepsilon_\theta}{k} P - C_{D1} \frac{\varepsilon_\theta^2}{\overline{\theta^2}} - C_{D2} \frac{\varepsilon_\theta}{k} \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\alpha + \frac{\alpha_t}{\sigma_\theta} \right) \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial x_j} \right] \quad (7.22)$$

7.3.2 Hypothèse de gradient généralisé (*Generalized Gradient Diffusion Hypothesis, GGDH*)

Le modèle SGDH est un modèle de diffusivité isotrope. De manière analogue au modèle de Daly-Harlow pour les corrélations triples $\overline{u_i u_j u_k}$, on peut utiliser la formulation *anisotrope*,

$$\overline{u_i \theta} = -C_\theta \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_i u_j} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (7.23)$$

Dans ce modèle, on a besoin des $\overline{u_i u_j}$, donc elle est typiquement associée à des modèles au second ordre. On peut également, comme pour le modèle SGDH, utiliser à la place de l'échelle de temps dynamique k/ε l'échelle de temps thermique τ_θ ou une échelle composite, en résolvant alors des équations de transport supplémentaires pour $\overline{\theta^2}$ et ε_θ .

7.3.3 Modèles au second ordre

On peut évidemment aussi utiliser un modèle au second ordre, en résolvant des équations de transport pour les $\overline{u_i \theta}$. On va détailler ce cas dans la suite, pour la convection mixte ou naturelle.

7.4 Convection mixte ou naturelle

Lorsque le nombre de Richardson n'est pas petit devant un, on ne peut plus négliger l'influence de la flottabilité sur la dynamique. Lorsque le nombre de Richardson est très grand devant un, on parle de convection naturelle (le moteur de l'écoulement est purement thermique). Dans les cas intermédiaires entre convection forcée et convection naturelle, on parle de convection mixte.

Pour comprendre l'influence de la thermique sur la dynamique, il est nécessaire d'écrire les équations de transport exactes des tensions de Reynolds :

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = P_{ij} + D_{ij}^\nu + D_{ij}^T + \phi_{ij} + D_{ij}^p - \varepsilon_{ij} + G_{ij} \quad (7.24)$$

On voit donc apparaître, par rapport au cas sans thermique, un terme de production par la flottabilité :

$$G_{ij} = -\beta (\overline{u_i \theta} g_j + \overline{u_j \theta} g_i) \quad (7.25)$$

qui se réduit dans l'équation de l'énergie turbulente k à :

$$G = -\beta \overline{u_i \theta} g_i \quad (7.26)$$

Cependant, la flottabilité a également une influence indirecte sur certains termes, dont il faut tenir compte pour leur modélisation :

- ✓ La redistribution ϕ_{ij} est modifiée : en effet, l'analyse de Chou (voir partie 4.2.1) est modifiée par le fait que l'équation de la vitesse instantanée fait apparaître la flottabilité :

$$\phi_{ij} = \phi_{ij}^1 + \phi_{ij}^2 + \phi_{ij}^3 \quad (7.27)$$

via le terme noté ϕ_{ij}^3 , qui s'écrit :

$$\phi_{ij}^3 = \int_{\mathbf{R}^3} \beta g_k \frac{\partial \theta}{\partial x_k}(\mathbf{x}') \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right] \frac{dV(\mathbf{x}')}{4\pi \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|} \quad (7.28)$$

Ce terme est absolument similaire au terme rapide. En utilisant la même hypothèse de quasi-homogénéité, on peut construire un modèle équivalent au modèle IP :

$$\phi_{ij}^3 = -C_3 \left(G_{ij} - \frac{2}{3} G \delta_{ij} \right) \quad (7.29)$$

- ✓ Le terme de dissipation ε_{ij} subit également une modification, qui peut être étudiée en écrivant l'équation exacte de la dissipation, qui fait apparaître, comme pour les équations des $\overline{u_i u_j}$, des termes dûs à la flottabilité.

La plupart du temps, on ne modifie pas directement la modélisation de ε_{ij} , mais seulement l'équation de transport de ε , dans laquelle on voit apparaître le terme de production de ε par la flottabilité :

$$G_\varepsilon = -2\beta g_i \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \quad (7.30)$$

De la même manière que dans le cas sans thermique (cf. § 3.3), où on modélise la production de ε en fonction de la production d'énergie turbulente :

$$P_\varepsilon = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P \quad (7.31)$$

on modélise généralement le terme de production de ε par flottabilité en fonction de son équivalent dans l'équation de k .

$$G_\varepsilon = C_{\varepsilon 3} \frac{\varepsilon}{k} G \quad (7.32)$$

Exemple : canal vertical différentiellement chauffé

Ce cas, décrit sur la figure 7.1 est le cas le plus simple d'écoulement entièrement piloté par la thermique. Les équations de la vitesse moyenne et de la température moyenne se simplifient de la manière suivante :

$$0 = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial \overline{uw}}{\partial z} + \beta g (T - T_0) \quad (7.33)$$

$$0 = \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{\partial \overline{w\theta}}{\partial z} \quad (7.34)$$

On voit que :

- ✓ Comme en canal classique (écoulement généré par le gradient de pression), seule la composante de cisaillement du tenseur de Reynolds influe sur la vitesse moyenne ($\overline{uw}$ pour un canal classique). On peut voir sur la figure 7.2 l'équilibre entre les termes de flottabilité, de diffusion moléculaire et de transport turbulent. Le terme de flottabilité joue dans cet écoulement le rôle moteur que jouait le gradient de pression dans l'écoulement de canal classique (écoulement de Poiseuille plan).
- ✓ Seule la composante $\overline{w\theta}$ influe sur le profil de température moyenne.

Les équations des tensions de Reynolds se réduisent à :

$$\frac{d\overline{u^2}}{dt} = 0 = -2\overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} + 2\beta g \overline{u\theta} + D_{11}^\nu + D_{11}^T + \phi_{11} + D_{11}^p - \varepsilon_{11} \quad (7.35)$$

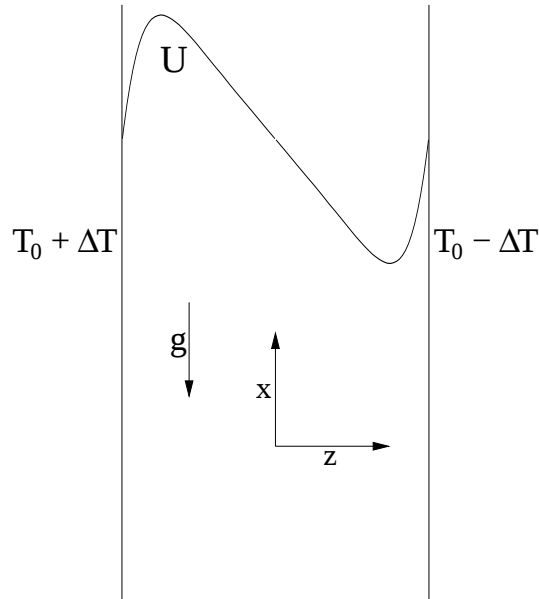


FIG. 7.1 – Écoulement entre deux plaques infinies, séparée d'une distance h , généré par la différence de température entre les deux parois : $\partial/\partial t = 0$; $\partial/\partial x = 0$; $\partial/\partial y = 0$ $V = 0$; $W = 0$.

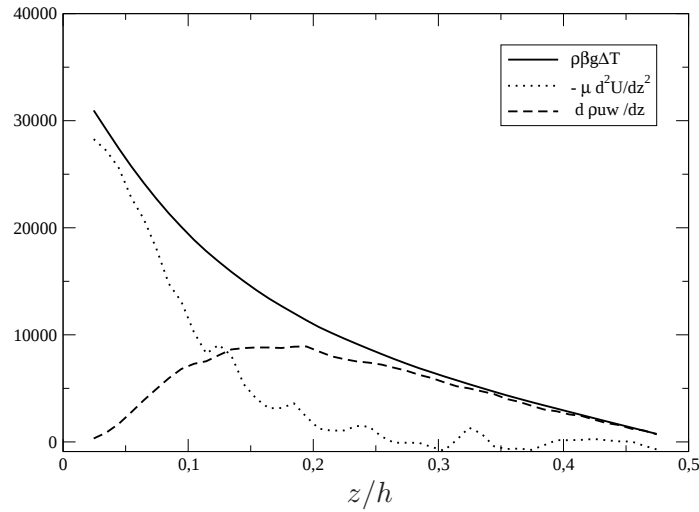


FIG. 7.2 – Bilan de quantité de mouvement en canal vertical différentiellement chauffé. Équilibre flottabilité/diffusion moléculaire/transport turbulent. DNS de Boudjemadi *et al.* [2]

$$\frac{d\overline{v^2}}{dt} = 0 = 0 + 0 + D_{22}^\nu + D_{22}^T + \phi_{22} + D_{22}^p - \varepsilon_{22} \quad (7.36)$$

$$\frac{d\overline{w^2}}{dt} = 0 = 0 + 0 + D_{33}^\nu + D_{33}^T + \phi_{33} + D_{33}^p - \varepsilon_{33} \quad (7.37)$$

$$\frac{d\overline{uw}}{dt} = 0 = -\overline{w^2} \frac{\partial U}{\partial z} + \beta g \overline{w\theta} + D_{11}^\nu + D_{11}^T + \phi_{11} + D_{11}^p - \varepsilon_{11} \quad (7.38)$$

On voit donc que les fluctuations de température interagissent avec les fluctuations de vitesse pour créer (ou supprimer) de la turbulence dans les directions privilégiées, alignées avec la verticale. Attention, nous allons voir que le signe des $\overline{u_i\theta}$ dépend très fortement de la stratification thermique (ici nulle). On va avoir des effets différents sur la turbulence : atténuation des fluctuations dans la direction verticale en cas de stratification stable, augmentation dans le cas inverse.

La turbulence crée donc de l'agitation thermique, qui elle-même interagit avec la turbulence, en modifiant la répartition entre les composantes. On a là un effet complexe, qui typiquement sera beaucoup mieux pris en compte par la modélisation au second ordre.

7.5 Équations de transport des flux thermiques turbulents

De la même manière que pour les tensions de Reynolds, on peut écrire l'équation de transport exacte des flux thermiques turbulents :

$$\frac{\partial \overline{u_i\theta}}{\partial t} + U_k \frac{\partial \overline{u_i\theta}}{\partial x_k} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} (-\overline{u_i u_k \theta})}_{D_{\theta i}^t} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{\rho} \overline{p \theta \delta_{ik}} \right)}_{D_{\theta i}^p} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \overline{\theta \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} + \alpha \overline{u_i \frac{\partial \theta}{\partial x_k}} \right)}_{D_{\theta i}^\nu} \quad (7.39)$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{\rho} \overline{p \frac{\partial \theta}{\partial x_i}}}_{\phi_{\theta i}} - \underbrace{\beta g_i \overline{\theta^2}}_{G_{\theta i}} - \underbrace{\left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial T}{\partial x_k} + \overline{u_k \theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right)}_{P_{\theta i}} - \underbrace{(\nu + \alpha) \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial \theta}{\partial x_k}}}_{\varepsilon_{\theta i}} \quad (7.40)$$

Tous les termes nous sont déjà familiers, car ils sont similaires à ceux apparaissant dans les équations des tensions de Reynolds :

- ✓ transport turbulent $D_{\theta i}^t$;
- ✓ diffusion par la pression $D_{\theta i}^p$;
- ✓ diffusion moléculaire $D_{\theta i}^\nu$;
- ✓ corrélation pression–gradient de température fluctuante, appelé ici *terme de brouillage* $\phi_{\theta i}$;
- ✓ production $P_{\theta i}$ et $G_{\theta i}$;
- ✓ dissipation $\varepsilon_{\theta i}$.

Il y a cependant des différences importantes :

- ✓ La production $P_{\theta i}$ ne résulte plus de l'interaction : *turbulence/gradient de vitesse moyenne* mais d'une somme de l'interaction *turbulence/gradient de température moyenne* et de l'interaction *flux thermiques turbulents/gradient de vitesse moyenne*.

- ✓ La production $G_{\theta i}$ fait apparaître la variance de la température $\overline{\theta^2}$.
- ✓ La diffusion moléculaire doit être modélisée, sauf dans le cas où $\nu = \alpha$, c'est-à-dire quand $Pr = 1$, car elle s'écrit alors $\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial u_i \theta}{\partial x_k} \right)$.

Exemples illustrant le rôle des termes de production

Canal vertical différentiellement chauffé

Dans ce cas, les termes de production des flux thermiques turbulents s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 P_{\theta 1} &= -\overline{uw} \frac{\partial T}{\partial z} - \overline{w\theta} \frac{\partial U}{\partial z} & G_{\theta 1} &= \beta g \overline{\theta^2} \\
 P_{\theta 2} &= 0 & G_{\theta 2} &= 0 \\
 P_{\theta 3} &= -\overline{w^2} \frac{\partial T}{\partial z} & G_{\theta 3} &= 0
 \end{aligned} \tag{7.41}$$

On voit que :

- ✓ La direction verticale est encore une direction privilégiée de production de flux thermiques turbulents.
- ✓ $\overline{w\theta}$, qui est la seule composante qui influe sur la température moyenne (cf. précédemment), est uniquement produite par interaction turbulence/gradient de température. Cela justifie que les modélisations SGDH, et surtout GGDH, puisse fonctionner, bien que très simplifiées : le flux d'énergie allant de la paroi chaude vers la paroi froide suit le sens du gradient de température moyenne et son intensité est pilotée par la turbulence.
- ✓ Il n'y a pas de production de $\overline{v\theta}$: cette composante est uniquement alimentée par le brouillage.

Canal stratifié

Ce cas correspond à un canal classique (écoulement de Poiseuille plan) auquel s'ajoute une différence de température entre les deux parois. Dans ce cas, les termes de production des flux thermiques turbulents s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 P_{\theta 1} &= -\overline{uw} \frac{\partial T}{\partial z} - \overline{w\theta} \frac{\partial U}{\partial z} & G_{\theta 1} &= 0 \\
 P_{\theta 2} &= 0 & G_{\theta 2} &= 0 \\
 P_{\theta 3} &= -\overline{w^2} \frac{\partial T}{\partial z} & G_{\theta 3} &= \beta g \overline{\theta^2}
 \end{aligned} \tag{7.42}$$

Quant aux termes de production des tensions de Reynolds, il s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 P_{11} &= -2\overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} & G_{11} &= 0 \\
 P_{22} &= 0 & G_{22} &= 0 \\
 P_{33} &= 0 & G_{33} &= 2\beta g \overline{w\theta} \\
 P_{13} &= -\overline{w^2} \frac{\partial U}{\partial z} & G_{13} &= \beta g \overline{u\theta}
 \end{aligned} \tag{7.43}$$

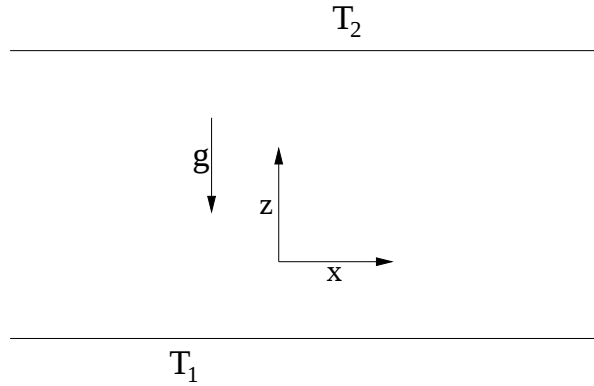


FIG. 7.3 – Écoulement entre deux plaques infinies, séparée d'une distance h , généré par un gradient de pression $\partial P/\partial x$, avec une différence de température entre les deux parois : $\partial/\partial t = 0$; $\partial/\partial x = 0$; $\partial/\partial y = 0$; $V = 0$; $W = 0$

Deux cas de figure se présentent :

Stratification instable : $T_1 > T_2$. Le gradient de température négatif produit un $\overline{w\theta}$ positif, qui lui-même entre en jeu dans la production de $\overline{w^2}$. Une stratification instable intensifie donc les fluctuations verticales.

Stratification stable : $T_1 < T_2$. Le gradient de température positif produit un $\overline{w\theta}$ négatif, qui entraîne une production négative de $\overline{w^2}$. Une stratification stable amortit donc les fluctuations verticales.

Cette analyse sur un cas simple montre comment une stratification thermique influe sur l'anisotropie de la turbulence.

Écoulement de Rayleigh-Bénard

Dans le cas particulier où il n'y a pas de gradient de pression ($\partial P/\partial x = 0$) et $T_1 > T_2$, le cas précédent est connu sous le nom d'écoulement de Rayleigh-Bénard. Cet écoulement est uniquement créé par les effets de flottabilité. Le profil de température s'établit sous la forme donnée par la figure 7.4 : on voit que le gradient de température est nul au centre. En écrivant les termes de production donnés pour le cas précédent dans la zone $\partial T/\partial z = 0$, on voit que le terme $\beta g \overline{\theta^2}$ est essentiel : sans lui, on aurait $\overline{w\theta} = 0$, et on sous-estimerait largement le transport vertical d'énergie.

7.6 Modélisation des termes inconnus

7.6.1 Terme de brouillage

Comme pour le terme de redistribution en dynamique, ce terme est le plus important à modéliser. On va ici ne présenter que le modèle le plus simple, mais on peut faire beaucoup plus sophistiqué ! On peut notamment appliquer la méthode basée sur les formulations générales de relations tensorielles.

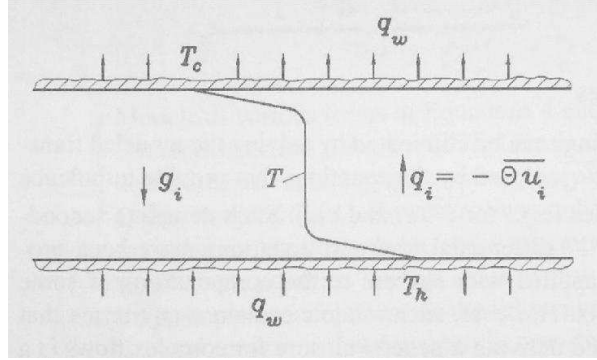


FIG. 7.4 – Profil de température en écoulement de Rayleigh-Bénard. D’après Hanjalić [15].

Une analyse similaire à celle de Chou pour le terme de redistribution montre qu’on peut également séparer $\phi_{\theta i}$ en trois termes :

- ✓ Terme lent : de manière similaire au modèle de Rotta, Monin (1965) a proposé

$$\phi_{\theta i}^1 = -C_{\theta 1} \frac{1}{\tau} \overline{u_i \theta} \quad (7.44)$$

où τ est l’échelle de temps dynamique k/ε . Mais on peut aussi utiliser une échelle de temps composite (cf. discussion précédente sur le modèle SGDH).

- ✓ Terme rapide : on peut montrer analytiquement (moyennant une hypothèse de quasi-homogénéité) que ce terme peut être déduit du modèle de ϕ_{ij}^3 . Si on utilise le modèle $\phi_{ij}^3 = -C_3 \left(G_{ij} - \frac{2}{3} G \delta_{ij} \right)$, on obtient pour $\phi_{\theta i}^2$ le modèle d’Owen (1973) :

$$\phi_{\theta i}^2 = C_{\theta 2} \overline{u_k \theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \quad (7.45)$$

- ✓ Terme de flottabilité : comme pour la dynamique, on utilise le plus souvent un modèle d’isotropisation de la production par flottabilité (Owen, 1973) :

$$\phi_{\theta i}^3 = C_{\theta 3} \beta g_i \overline{\theta^2} \quad (7.46)$$

7.6.2 Termes de transport turbulent

Encore une fois, on adopte un modèle similaire à celui de Daly-Harlow utilisé pour la dynamique (Wyngaard et Coté, 1974), pour représenter à la fois les corrélations triples et la diffusion par la pression :

$$D_{\theta i}^t + D_{\theta i}^p = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_{\theta} \frac{1}{\tau} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i \theta}}{\partial x_l} \right) \quad (7.47)$$

7.6.3 Termes de diffusion moléculaire

Le modèle suivant est couramment utilisé :

$$D_{\theta i}^t = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\nu + \alpha}{2} \frac{\partial \overline{\theta u_i}}{\partial x_k} \right) \quad (7.48)$$

qui a au moins le mérite de redonner le terme exact lorsque $\nu = \alpha$.

7.7 Remarques sur la région de proche paroi

Les mêmes difficultés se posent en proche paroi pour la modélisation thermique que pour la modélisation dynamique. En ne s'étendra pas sur ce sujet dans ce cours, cependant, il est à noter que, pour obtenir de bonnes prédictions en proche paroi, et notamment les échanges thermiques paroi–fluide, il est nécessaire (et parfois suffisant) de bien reproduire la dynamique en proche paroi, et en particulier la limite à deux composantes de la turbulence (ce sont les fluctuations normales à la paroi qui assurent le transport turbulent d'énergie).

En particulier, l'utilisation de lois de paroi est très mal adaptée. Il faut écrire également des lois de parois thermiques (pour la température moyenne, et selon les modèles, pour $\overline{\theta^2}$, ε_θ , $\overline{u_i\theta}$). De plus, l'« universalité » des lois de paroi dynamiques est mise en défaut lorsque la thermique a une influence. Malgré de nombreux travaux, il n'y a pas encore de lois de paroi donnant satisfaction en thermique.

L'extension des modèles en proche paroi est un sujet actif de recherche. On peut aller aussi loin qu'en dynamique pour la sophistication des modèles (modèle TCL, relaxation elliptique, *etc.*)

Bibliographie

Voici une liste, non exhaustive, d'ouvrages que le lecteur pourra consulter pour approfondir le sujet de la modélisation et des méthodes numériques associées.

- Chassaing, P. – *Turbulence en mécanique des fluides. Analyse du phénomène en vue de sa modélisation à l'usage de l'ingénieur* – Toulouse, France, Cépaduès-Éditions, 2000, *Collection Polytech*.
- Pope, S. – *Turbulent Flows* – Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000.
- Ferziger, J. H. et Perić, M. – *Computational methods for fluid dynamics* – Springer, 1996.
- Bailly, Ch., Comte-Bellot, G. – *Turbulence* – CNRS éditions, Paris, 2003.
- Durbin, P. A. et Pettersson Reif, B. A. – *Statistical Theory and Modeling for Turbulent Flows* – John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, UK, 2001.
- Viollet, P.-L. , Chabard, J.-P. , Esposito, P. et Laurence, D. – *Mécanique des fluides appliquée* – Presses de l'École nationale des ponts et chaussées, Paris, 1998.
- Wilcox, D. C. – *Turbulence Modeling for CFD* – DCW industries, Inc., La Cañada, California, 1998, second édition.
- Schiestel, R. – Les écoulements turbulents, modélisation et simulation. *Hermès, Paris*, 1998.
- Piquet, J. – *Turbulent Flows. Models and physics* – Springer-Verlag, Berlin, 2001, revised 2nd édition.

Références

- [1] S. R. Ahmed, R. Ramm, and G. Faltin. Some salient features of the time-averaged ground vehicle wake. SAE technical Paper Series 840300, 1984.
- [2] R. Boudjemadi, V. Maupu, D. Laurence, and P. Le Quéré. Budgets of turbulent stresses and fluxes in a vertical slot natural convection flow at Rayleigh $Ra = 10^5$ and $5.4 \cdot 10^5$. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 18(1):70–79, 1997.
- [3] P. Bradshaw, N. N. Mansour, and U. Piomelli. On local approximations of the pressure-strain term in turbulence models. In *Proc. of the Summer Program*, pages 159–164. Center for Turbulence Research, Stanford University, CA, USA, 1987.
- [4] S. Béharelle, J. Delville, and J.-P. Bonnet. On the three-dimensional evolution of a wake subjected to cross-shear. In *Proc. 11th Symp. Turb. Shear Flows, Grenoble, France*, 1997.
- [5] T. J. Craft and B. E. Launder. A Reynolds stress closure designed for complex geometries. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 17(3):245–254, 1996.
- [6] T. J. Craft, B. E. Launder, and K. Suga. Development and application of a cubic eddy-viscosity model of turbulence. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 17(2):108–115, 1996.
- [7] S. C. Crow. Viscoelastic properties of fine-grained incompressible turbulence. *J. Fluid Mech.*, 33:1–20, 1968.
- [8] B. J. Daly and F. H. Harlow. Transport equations in turbulence. *Phys. Fluids*, 13:2634–2649, 1970.
- [9] P. A. Durbin. Near-wall turbulence closure modeling without “damping functions”. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 3:1–13, 1991.
- [10] P. A. Durbin. On the k -3 stagnation point anomaly. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 17(1):89–90, 1996.
- [11] S. Fu, B. E. Launder, and M. A. Leschziner. Modelling strongly swirling recirculating jet flow with Reynolds-stress transport closures. In *Proc. Sixth Symp. Turb. Shear Flows, Toulouse, France*, 17–6, 1987.
- [12] M. M. Gibson and B. E. Launder. Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 86(3):491–511, 1978.

- [13] K. Hanjalic. *Two-dimensional asymmetric turbulent flow in ducts*. PhD thesis, University of London, 1970.
- [14] K. Hanjalić. Advanced turbulence closure models: a view of current status and future prospects. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 15(3):178–203, 1994.
- [15] K. Hanjalić. One-point closure models for buoyancy-driven turbulent flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 34:321–347, 2002.
- [16] K. Hanjalić and B. E. Launder. A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows. *J. Fluid Mech.*, 52:609–638, 1972.
- [17] F. H. Harlow and P. I. Nakayama. Transport of turbulence energy decay rate. Report LA-3854, Los Alamos Sci. Lab., univ. of California, 1968.
- [18] W. M. Kays and M. E. Crawford. *Convective heat and mass transfer*. Third Edition, Mc Graw-Hill, New-York, 1993.
- [19] C. K. G. Lam and K. Bremhorst. A modified form of the k - ε model for predicting wall turbulence. *J. Fluids Engng.*, 103:456–460, 1981.
- [20] B. E. Launder, G. J. Reece, and W. Rodi. Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. *J. Fluid Mech.*, 68(3):537–566, 1975.
- [21] B. E. Launder and D. B. Spalding. The numerical computation of turbulent flows. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 3(2):269–289, 1974.
- [22] B. E. Launder and D. P. Tselepidakis. Directions in second-moment modelling of near-wall turbulence. In *29th Aerospace Sciences Meeting*, AIAA 91-0219, pages 1–10, 1991.
- [23] D. Laurence. Turbulence modelling. In *Proc. second QNET-CFD Workshop, Luzern, Switzerland*, 2002.
- [24] J. L. Lumley. Computational modeling of turbulent flows. In *Advances in Applied Mechanics*, volume 18, pages 123–175. Academic Press, 1978.
- [25] J. Magnaudet. The modelling of inhomogeneous turbulence in the absence of mean velocity gradient. In *Proc. Fourth Eur. Turb. Conf.*, 1992.
- [26] R. Manceau. Accounting for wall-induced Reynolds stress anisotropy in explicit algebraic stress models. In *Proc. 3rd Symp. Turb. Shear Flow Phenomena, Sendai, Japan*, 2003.
- [27] R. Manceau. Computation of the flow around a simplified car using the rescaled $\overline{v^2}$ - f model. In *Proc. Symp. Separated and Complex Flows VI, ASME 2003 Fluids Engineering Summer Meeting, Honolulu, Hawaii*, 2003.
- [28] R. Manceau. An improved version of the Elliptic Blending Model. Application to non-rotating and rotating channel flows. In *Proc. 4th Int. Symp. Turb. Shear Flow Phenomena, Williamsburg, VA, USA*, 2005.
- [29] R. Manceau, J.-P. Bonnet, M. A. Leschziner, and F. Menter, editors. *Proc. 10th ERCOFTAC (SIG-15)/IAHR/QNET-CFD Workshop on Refined Turbulence Modelling*. Laboratoire d’études aérodynamiques, UMR CNRS 6609, Université de Poitiers, France, 2002.

- [30] R. Manceau and K. Hanjalić. Elliptic blending model: A new near-wall Reynolds-stress turbulence closure. *Phys. Fluids*, 14(2):744–754, 2002.
- [31] R. Manceau, M. Wang, and D. Laurence. Inhomogeneity and anisotropy effects on the redistribution term in Reynolds-averaged Navier–Stokes modelling. *J. Fluid Mech.*, 438:307–338, 2001.
- [32] G. L. Mellor and H. J. Herring. A survey of the mean turbulent field closure models. *AIAA J.*, 11(5):590, 1973.
- [33] F. R. Menter. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA J.*, 32(8):1598–1605, 1994.
- [34] C. M. Millikan. A critical discussion of turbulent flows in channels and circular tubes. In *Proc. Fifth Intl Congress Appl. Mech.*, pages 386–392, 1938.
- [35] R. D. Moser, J. Kim, and N. N. Mansour. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$. *Phys. Fluids*, 11(4):943–945, 1999.
- [36] D. Naot, A. Shavit, and M. Wolfshtein. Two-point correlation model and the redistribution of Reynolds stresses. *Phys. Fluids*, 16:738–743, 1973.
- [37] S. B. Pope. A more general effective viscosity hypothesis. *J. Fluid Mech.*, 72:331–340, 1975.
- [38] S. B. Pope. An explanation of the turbulent round-jet/plane-jet anomaly. *AIAA J.*, 16(3):279–281, 1978.
- [39] T.-H. Shih, W. W. Liou, A. Shabbir, Z. Yang, and J. Zhu. A new $k-\varepsilon$ eddy-viscosity model for high Reynolds number turbulent flows. Model development and validation. *Computers & Fluids*, 24(3):227–238, 1995.
- [40] T.-H. Shih and J. L. Lumley. Modelling of pressure correlation terms in Reynolds stress and scalar flux equations. Technical Report FDA-85-3, Sibley School of Mech. and Aerospace Engng., Cornell University, Ithaca, NY, 1985.
- [41] N. Shima. A Reynolds-stress model for near-wall and low-Reynolds-number regions. *J. Fluids Engng.*, 110:38–44, 1988.
- [42] C. C. Shir. A preliminary numerical study of atmospheric turbulent flows in the idealized planetary boundary layer. *J. Atmos. Sci.*, 30:1327–1339, 1973.
- [43] P. R. Spalart. Strategies for turbulence modelling and simulations. In *Proc. Fourth Intl Symp. Eng. Turb. Modelling and Measurements, Ajaccio, Corsica, France*, pages 3–17, 1999.
- [44] P. R. Spalart and S. R. Allmaras. One-equation turbulence model for aerodynamic flows. *La Recherche Aérospatiale*, 1:5–21, 1994.
- [45] A. J. M. Spencer. Theory of invariants. In A. C. Eringen, editor, *Continuum Physics*, volume 1. Academic Press, New York, 1971.

- [46] C. G. Speziale. Analytical methods for the development of Reynolds-stress closures in turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 23:107–157, 1991.
- [47] C. G. Speziale, S. Sarkar, and T. B. Gatski. Modeling the pressure-strain correlation of turbulence: an invariant dynamical system approach. *J. Fluid Mech.*, 227:245–272, 1991.
- [48] L. Temmerman and M. A. Leschziner. Large eddy simulation of separated flow in a stream-wise periodic channel constriction. *Proc. 2nd Int. Symp. Turb. Shear Flow Phenomena, Stockholm, Sweden*, 2001.
- [49] T. von Kármán. Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz. *Nachr. Ges. Wiss.*, page 68, 1930.
- [50] D. C. Wilcox. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA J.*, 26(11):1299–1310, 1988.
- [51] V. Yakhot and S. A. Orszag. Renormalization group analysis of turbulence. 1. Basic theory. *J. Scientif. Computing*, 1(1):3–51, 1986.
- [52] V. Yakhot, S. A. Orszag, S. Thangam, T. B. Gatski, and C. G. Speziale. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 4(7):1510–1520, 1992.