

Résolution algébrique de problèmes

Une *proposition* est une phrase ou un énoncé qui possède une valeur de vérité (elle est soit vraie, soit fausse) indépendante de tout paramètre extérieur. Par exemple, "il existe un entier à la fois pair et impair" est une proposition fausse, "tout entier est soit pair, soit impair" est une proposition vraie, tandis que "tous mes vœux de bonheur !", "le chiffre 5 est le plus grand" ou encore "il pleut" ne sont pas des propositions.

Certaines expressions mathématiques contiennent des termes qui peuvent prendre différentes valeurs. On appelle ces termes *inconnues*, *variables* ou encore *indéterminées*. Une *équation* est un énoncé mathématique exprimant une égalité entre deux expressions mathématiques constituées d'une ou plusieurs variable(s), qui devient une proposition en attribuant une valeur à chaque inconnue. Par exemple " $x+3=8$ " est une équation : tant que l'on ne sait pas ce qu'est x , on ne peut pas dire si cette équation est vraie ou fausse, mais dès que l'on attribue à x une valeur on pourra déterminer si l'équation est juste ou non.

Résoudre une équation signifie calculer l'ensemble des valeurs que l'on peut attribuer aux inconnues de sorte que l'énoncé mathématique soit vrai. Il faut faire attention aux ensembles dans lesquels évoluent les inconnues ; lorsque ce n'est pas précisé, elles sont supposées réelles (autrement dit, toute solution est acceptée). Toutefois, l'énoncé d'un problème qui nécessite la résolution d'une ou plusieurs équation(s) peut imposer des contraintes qui n'apparaissent plus lorsque l'on manipule des équations. Par exemple, lorsque l'on calcule des âges, on s'attend en général à obtenir des valeurs entières, et si l'on calcule des longueurs, elles doivent être positives.

Techniques de résolution

Lorsque l'on est confronté à un problème en mathématiques, il y a principalement quatre tâches à effectuer :

- en premier, il faut identifier en fonction de l'énoncé quelles sont les données du problème. Les valeurs de certaines de ces données pourront être directement lues dans l'énoncé ; les autres sont des inconnues auxquelles il faut donner un nom (chaque nouvelle inconnue est représentée par une lettre jusqu'alors inutilisée).
- puis, il faut traduire en termes mathématiques les relations qui sont exprimées dans l'énoncé en utilisant les inconnues précédemment introduites.
- vient alors la phase de résolution technique où l'on ne manipule plus que des quantités mathématiques sorties du contexte du problème.
- enfin, il faut vérifier la cohérence du résultat avec la nature attendue de celui-ci. On formule alors en guise de conclusion une phrase qui exprime la réponse.

Lors du deuxième point, on est amené à écrire un *système d'équations* ; c'est l'ensemble des équations qui doivent être simultanément vraies. Une fois que ce système d'équations est connu, on essaie d'obtenir une égalité dans laquelle l'un des deux membres de l'égalité est uniquement constitué d'une inconnue absente de l'autre membre. Autrement dit, il faut tenter d'obtenir une égalité de la forme " $x =$ quelque chose qui ne dépend pas de x ". On dit que l'on a *isolé* l'inconnue x . Afin d'y parvenir, de nombreuses règles peuvent être utilisées, parmi lesquelles :

- ajout d'une quantité commune : si deux expressions sont égales, on peut leur ajouter ou leur soustraire une même quantité,
- multiplication par une quantité commune : si deux expressions sont égales, on peut les multiplier ou les diviser par une même quantité non nulle,
- utilisation de la factorisation : un produit de plusieurs termes est nul si et seulement si au moins l'un des termes de ce produit est nul,
- élévation au carré : si deux expressions sont égales, leurs carrés sont égaux (très utile pour éliminer les racines carrées).

On peut alors appliquer une technique appelée *technique de substitution*. Concrètement, on met de côté l'équation qui a servi à isoler x , puis on remplace dans toutes les autres équations chaque occurrence de x par le fameux "quelque chose qui ne dépend pas de x ". En procédant ainsi, on obtient un nouveau système d'équations qui contient une équation de moins et une inconnue de moins. On continue à isoler les inconnues jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une seule équation avec une seule inconnue. On détermine alors la valeur de cette inconnue, puis on réinjecte cette valeur dans les autres équations pour déterminer toutes les valeurs recherchées.

Analyse d'un exemple

"Paul a trois enfants. L'ainé a quatre ans de plus que la cadette. La cadette a quatre ans de plus que le benjamin. Le benjamin a la moitié de l'âge de l'ainé. Déterminer les âges des enfants".

- Il y a trois inconnues dans ce problème : l'âge du fils aîné, l'âge de la cadette et l'âge du benjamin. Nommons respectivement ces inconnues x , y et z .
- "L'ainé a quatre ans de plus que la cadette" se traduit par la relation $x = 4 + y$. "La cadette a quatre ans de plus que le benjamin" se traduit par la relation $y = 4 + z$. "Le benjamin a la moitié de l'âge de l'ainé" se traduit par la relation $z = \frac{x}{2}$.
- Il faut résoudre le système constitué des équations $x = 4 + y$, $y = 4 + z$ et $z = \frac{x}{2}$. Comme $x = 4 + y$, on applique la technique de substitution en remplaçant x par $4 + y$ dans les deux dernières équations. Le système devient : $x = 4 + y$ (on ne touche pas à cette équation), $y = 4 + z$ et $z = \frac{4 + y}{2}$ (on a obtenu ici une "nouvelle" équation). Comme $y = 4 + z$, on applique de nouveau la technique de substitution en remplaçant y par $4 + z$ dans la dernière équation. Le système devient : $x = 4 + y$, $y = 4 + z$ et $z = \frac{4 + (4 + z)}{2}$, soit $z = \frac{8 + z}{2}$. En multipliant par 2 les deux membres de la dernière équation, on obtient $2z = 8 + z$, soit $z = 8$. Maintenant il ne reste plus qu'à "remonter" en utilisant les équations qui ont servi pour appliquer la technique de substitution ; puisque $y = 4 + z$, on en déduit $y = 4 + 8 = 12$, et enfin $x = 4 + y$ donc $x = 4 + 12 = 16$.
- On vérifie alors que ces quantités sont cohérentes avec l'énoncé. Ici, on s'attend à ce que les âges soient des entiers naturels, ce qui est bien le cas. On conclut donc par la formulation correspondant à l'unique solution possible : "les âges des enfants sont 16, 12 et 8 ans".