

Entiers naturels

Construction des entiers naturels

Les nombres entiers naturels (ou simplement entiers naturels) sont les éléments d'un ensemble abstrait qui permettent d'effectuer des actions de comptage sur des collections discrètes d'objets. Lorsque l'on considère des collections finies d'objets, on peut les classer selon un critère commun appelé *équipotence*. Plus précisément, on dit que deux ensembles sont *équipotents* lorsque l'on peut mettre les éléments de ces ensembles en correspondance un à un (on parle alors de *bijection*). Les entiers naturels sont alors des représentants de chaque classe d'équipotence parmi les collections finies. L'entier naturel que l'on peut ainsi associer à chaque ensemble fini est appelé *cardinal*.

De façon formelle, l'ensemble des entiers naturels peut être défini comme une collection organisée d'objets qui possède les propriétés suivantes :

- cette collection est non vide, elle contient un élément appelé zéro et noté 0,
- chaque élément de cette collection possède un unique successeur,
- lorsque deux éléments sont différents, leurs successeurs sont différents,
- le zéro n'est le successeur d'aucun élément,
- si un ensemble satisfait toutes les conditions précédentes, il contient l'ensemble des entiers naturels.

Grâce à ces axiomes, on peut retrouver d'autres propriétés de l'ensemble des entiers naturels ; on peut par exemple démontrer que tout entier naturel autre que zéro est le successeur d'un entier naturel ou qu'il n'existe qu'un nombre fini d'entiers entre deux entiers donnés. Cette construction de l'ensemble des entiers naturels est appelée *définition axiomatique des entiers naturels de Peano*. Elle permet d'établir une correspondance entre les premiers entiers naturels et une liste de mots désignant les successeurs successifs de 0 que l'on appelle *comptine numérique*. L'ensemble des entiers naturels est traditionnellement noté $\mathbb{N}$.

Il est également possible de définir l'ensemble des entiers naturels à partir de la notion d'ordre. Lorsque l'on considère l'ensemble des entiers naturels, on remarque que chaque entier se trouve à une position particulière qui peut être exprimée en fonction de la position d'autres entiers ("... est plus petit que ...", "... est plus grand que ...", "... se trouve à la ...-ème place"). Cette propriété de pouvoir positionner les entiers les uns par rapport aux autres est appelée *ordinalité*.

Systèmes de numération

La représentation des entiers repose sur le *principe de codage*. On choisit des symboles qui représentent toujours la même valeur, chaque symbole étant associé à une quantité différente. Souvent, les symboles codent les puissances d'un certain entier, mais ce n'est pas toujours le cas.

Une façon naturelle de coder un entier donné consiste à écrire un ensemble de symboles de sorte que la somme des valeurs de chaque symbole soit égale à cet entier. On parle alors de *système de numération d'addition*. Parmi ces systèmes, on trouve les systèmes égyptiens, grecs, romains et sumériens. Dans ces systèmes, plusieurs écritures peuvent correspondre à un même entier (on

choisit en pratique la plus économique). La place des symboles dans le codage ne joue aucun rôle, même si certaines écritures sont plus judicieuses que d'autres : en choisissant convenablement la place de chaque symbole, on peut faciliter l'ordre de lecture ainsi que l'indication de l'ordre de grandeur de la quantité écrite. Le codage peut être lu indifféremment de droite à gauche ou de gauche à droite. Un inconvénient de ce type de système est que si l'on doit écrire une très grande quantité, on va devoir écrire un grand nombre de symboles.

Un système de numération plus évolué est le *système de numération positionnel*. Ce système se fonde sur le *principe de groupement*. On commence par choisir un nombre entier b supérieur ou égal à 2, que l'on appelle *base (de numération)*. La base est perçue comme un cardinal ; on forme des paquets contenant tous b éléments, en réalisant le maximum possible de tels paquets. Il reste éventuellement des objets qui ne peuvent pas constituer un dernier paquet. Puis, s'il y a suffisamment de paquets, on recommence la manipulation en groupant les paquets en "paquets de paquets", et on renouvelle l'opération autant que nécessaire. On obtient un codage de l'entier initial en écrivant le plus à droite possible (par convention) le nombre d'éléments qui ne rentrent pas dans un paquet (les unités), puis immédiatement à sa gauche le nombre de paquets qui ne rentrent pas dans un paquet de paquets (les dizaines dans notre système décimal), et ainsi de suite.

Dans ce système, les symboles dont on a besoin pour coder toute quantité sont les entiers compris entre zéro et une unité de moins que la base de numération. Bien noter qu'il est ici nécessaire de pouvoir coder l'absence de quantité, ce qui est inutile pour un système de numération d'addition.

Il existe également des systèmes de numération hybrides, qui mélangent des caractéristiques des deux systèmes précédents. On retrouve dans cette catégorie le système chinois, ainsi que notre numération orale. Les symboles expriment principalement une quantité ou un type de grandeur s'appliquant à un autre symbole. Un système de numération peut aussi contenir des règles "exotiques" qui ne facilitent pas la tâche aux élèves (soixante-dix, vingt-et-un, quatre-vingts).

En France, nous utilisons dans la vie courante principalement trois systèmes de numération avec une base commune, la base dix (ces systèmes sont dits *décimaux*) :

- l'écriture chiffrée, qui est un système positionnel ; les symboles sont les chiffres de 0 à 9,
- l'écriture lettrée, qui est hybride, avec des mots : "un", "deux", "dix", "cent", etc.
- le système oral qui est aussi un système hybride.

Toutefois, nous manipulons plus ou moins consciemment des systèmes hybrides bien plus complexes (mesure du temps ; systèmes monétaire et métrique anglais).

propriété du système de numération	additif	positionnel
besoin d'exprimer l'absence de quantité	non	oui
sens de lecture important	non	oui
unicité des écritures	non	oui
nombre prédéfini de symboles différents	non	oui
importance de la place des symboles	non	oui
croissance des écritures	non	oui

Décomposition canonique des entiers

Le principe d'écriture des nombres dans un système de numération positionnel est le suivant.

Proposition. Tout entier naturel N peut s'écrire comme une suite de chiffres $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ de sorte que l'on ait $N = 10^n \times a_n + 10^{n-1} \times a_{n-1} + \dots + 10 \times a_1 + a_0$. Cette suite de chiffres s'appelle la *décomposition canonique* de N en base dix. Les chiffres $a_0, a_1, \dots$ désignent respectivement le chiffre des unités, le chiffre des dizaines, etc. du nombre N .

Notons que ce résultat n'est pas spécifique à la base dix et pourrait être adapté à d'autres bases de numération.

Lorsque l'on ne connaît pas la valeur de certains chiffres constituant l'écriture d'un entier n , on écrit sa décomposition canonique en faisant figurer une barre au dessus de cette écriture. Par exemple, si un entier est constitué de a centaines, b dizaines et c unités, alors sa décomposition canonique en base dix s'écrit $\overline{abc}$. On ajoute cette barre afin de ne pas confondre avec l'écriture abc qui peut aussi désigner le produit des trois entiers a, b et c .

Remarque. On vient de voir au passage la distinction existant entre chiffre et nombre. Dans le langage courant, le mot chiffre est fréquemment utilisé pour désigner une quantité ou une proportion. Toutefois, ce mot possède une signification mathématique bien précise qui ne correspond pas à cet emploi.

L'ensemble des chiffres désigne l'ensemble des symboles nécessaires pour représenter un entier dans un système de numération donné. Les chiffres sont les briques élémentaires (symboles) qui servent à représenter les nombres sous forme d'écritures. Par défaut, on entend par nombre un entier naturel, du moins à l'école élémentaire (à un niveau plus avancé, on pourra désigner par nombre toute quantité numérique exprimable : nombre rationnel, nombre réel, nombre complexe, etc.).

De même, le chiffre des dizaines d'un nombre ne correspond pas en général à son nombre de dizaines. Pour l'entier 148, le chiffre des dizaines est 4 ; il se lit directement dans l'écriture du nombre. En revanche, le nombre de dizaines de 148 est 14 ; c'est le nombre de paquets de dix que l'on peut faire avec 148 éléments, qui se lit dans l'écriture du nombre en le tronquant au rang approprié.