

Le système positionnel décimal

Le système de numération décimal est un cas particulier de système de numération positionnel.

Un système de numération positionnel est fondé sur le principe de groupement. Ainsi, lorsque l'on dispose d'une collection d'objets, on les regroupe par paquets. Chaque paquet doit avoir le même nombre d'objets, et il faut réaliser le maximum de paquets possibles.

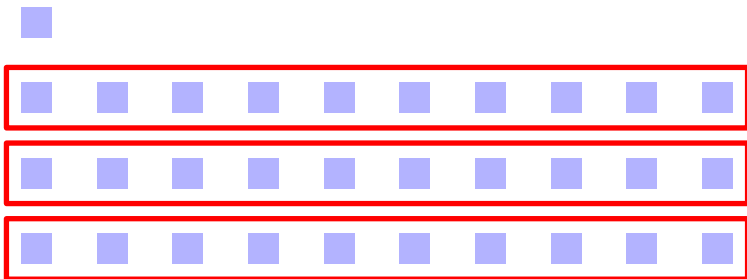
Dans le système décimal que nous utilisons couramment, nous regroupons les objets par dix.

Lorsque l'on a fini de constituer le maximum de paquets de dix, le nombre d'objets qui ne constituent pas un paquet peut être égal à n'importe quel entier plus petit que dix (si tous les objets sont dans un paquet, cela fait zéro, et il peut en rester au maximum neuf). C'est pour cela que nous disposons d'un symbole différent pour coder chacune de ces possibilités, soit au total dix chiffres.

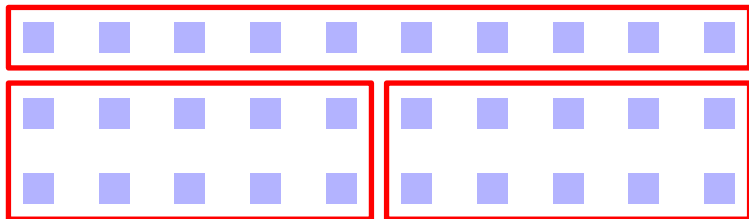
Voici un exemple : une collection contenant trente-et-un objets.



Si l'on effectue le maximum de groupements par dix sur cette collection, on forme trois paquets de dix et il reste un objet qui ne rentre pas dans un paquet.



La façon dont on regroupe les objets n'a pas d'influence sur ce résultat, on obtiendrait toujours trois paquets et un objet restant en changeant les regroupements effectués.

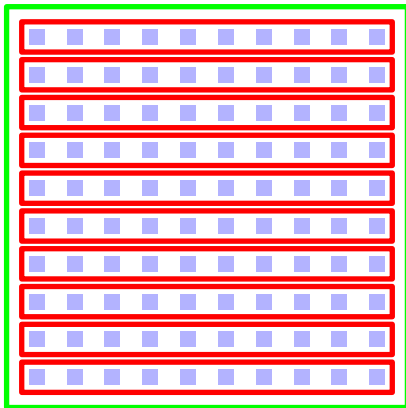


On écrit alors un chiffre 1 le plus à droite (par convention), ce qui signifie qu'il y a une unité, puis on place un chiffre 3 immédiatement à sa gauche pour signifier qu'il y a trois paquets de dix objets chacun.

Ainsi, l'écriture décimale de trente-et-un est 31.

On peut aussi prononcer cette quantité : trois dizaines et une unité.

Si la collection est constituée d'au moins cent objets, on peut former au moins dix paquets de dix objets. Dans ce cas, il faut regrouper les paquets de dix dans un "paquet de paquet". L'écriture obtenue comporte au moins trois chiffres.



Selon le nombre d'objets, le principe de groupement continue de s'appliquer ensuite aux paquets de paquets, puis aux paquets de paquets de paquets ... l'écriture obtenue peut être arbitrairement longue.

Par exemple, l'écriture décimale 2357, qui a pour écriture décimale lettrée deux-mille-trois-cent-cinquante-sept peut aussi être énoncée deux milliers et trois centaines et cinq dizaines et sept unités.

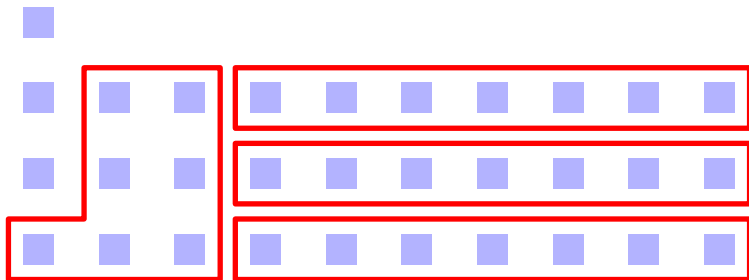
On peut aussi l'interpréter comme 7 unités et 5 dizaines et 3 dizaines de dizaines et 2 dizaines de dizaines de dizaines (mais il est peu pratique de le formuler ainsi).

Le système positionnel : cas général

Reprenons l'exemple de la collection de trente-et-un objets. Cette fois, au lieu de regrouper les objets par dix, nous allons les regrouper par sept.

Notons que nous avons maintenant besoin de coder des nombres d'objets qui sont plus petits que sept. Aussi, nous pouvons toujours utiliser les chiffres pour les quantités entre zéro et six, et nous n'avons plus besoin des chiffres 7, 8 et 9.

On obtient quatre paquets de sept et trois objets qui ne sont pas dans un paquet.



On écrit alors un chiffre 3 le plus à droite pour les trois objets, puis un chiffre 4 immédiatement à sa gauche pour les quatre paquets de sept objets.

Mais attention, si l'on écrit uniquement ces deux symboles, on risque de confondre avec l'écriture décimale 43. Aussi, il faut préciser que cette écriture fait référence à une autre base, en mentionnant le nombre d'objets par groupe dans l'écriture : c'est ce que l'on appelle la base du système de numération.

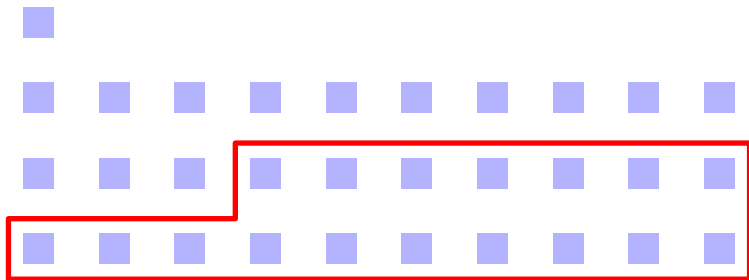
Voici des écritures possibles : $\overline{43}^{\text{sept}}$ ou $43_{(\text{sept})}$.

La quantité trente-et-un s'écrit 31 dans le système décimal et $\overline{43}^{\text{sept}}$ dans le système positionnel de base sept.

Si la base utilisée est plus petite que dix, alors on peut conserver les chiffres usuels (du système décimal). Mais que se passe-t-il si l'on utilise une base qui est plus grande que dix ?

Reprenons encore une fois l'exemple de notre collection de trente-et-un objets. Cette fois, regroupons les objets par paquets de dix-sept.

Cette fois, on ne peut former qu'un seul paquet ; il reste quatorze objets non regroupés. Il nous faut donc un symbole pour coder la quantité quatorze en position d'unité.



Dans ce cas, une fois que l'on a dépassé le neuf, on utilise les lettres majuscules dans l'ordre alphabétique. Ainsi, A code dix, B code onze, C code douze (cela suffit tant que la base de numération n'est pas trop grande, sinon il faudrait encore d'autres caractères après Z).

Comme la lettre qui code quatorze est E, on obtient une nouvelle écriture pour la quantité trente-et-un : $\overline{1E}^{\text{dix-sept}}$. On pourrait formuler cette quantité comme une dix-septaine et quatorze unités.