

La décomposition canonique (cas décimal)

La décomposition canonique est le principe qui permet l'interprétation d'une écriture positionnelle.

Prenons comme exemple l'écriture 2357, qui correspond à la quantité deux-mille-trois-cent-cinquante-sept. Il existe un grand nombre de possibilités pour écrire cette quantité sous la forme d'une addition, par exemple $1642+715$, $1100+1210+47$ ou encore $1+1+1\dots$ (qui nécessite l'écriture de 2357 symboles 1 et 2356 symboles +).

Parmi toutes ces additions possibles, l'une d'entre elles joue un rôle particulier car elle permet d'identifier le rôle de chaque chiffre qui est employé dans l'écriture 2357 : c'est la décomposition canonique.

$$2357 = 2000 + 300 + 50 + 7.$$

Le nombre 2357 est bien composé de 2 milliers, 3 centaines, 5 dizaines et 7 unités.

Une autre écriture un peu plus élaborée est :

$$2 \times 10 \times 10 \times 10 + 3 \times 10 \times 10 + 5 \times 10 + 7.$$

On peut l'écrire en employant la notation des puissances :

$$2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 5 \times 10 + 7.$$

Remarque : on peut écrire 10^1 à la place de 10 et écrire à la place du 7 l'expression 7×1 ou 7×10^0 pour insister sur l'explicitation du rang de chaque chiffre.

La décomposition canonique est essentielle pour savoir interpréter une écriture décimale. Elle est également importante pour interpréter des écritures que l'on ne connaît que partiellement. Par exemple, si l'on parle d'un nombre dont l'écriture décimale est constituée de 3 chiffres, et que l'on sait que son chiffre des unités est 2 et son chiffres des centaines est 7, alors ce nombre peut s'écrire sous la forme $\overline{7d2}$.

Nous avons placé ici un chiffre d pour exprimer un certain chiffre des dizaines que nous ne connaissons pas. La quantité qui correspond à cette écriture est 7 centaines, d dizaines et 2 unités. On peut aussi l'exprimer sous la forme $7 \times 100 + d \times 10 + 2$ ou encore $702 + 10d$.

Il faut bien noter avec l'exemple précédent que l'on a besoin d'écrire une barre au-dessus des chiffres afin d'éviter les confusions avec la multiplication.

La notation $\overline{cdu}$ doit être comprise comme la multiplication des lettres c , d et u , alors que la notation $\overline{cdu}$ est l'écriture d'un nombre ayant c pour chiffre des centaines, d pour chiffre des dizaines et u pour chiffre des unités.

Nous n'avons exposé ici que le cas de la base dix. On pourrait énoncer le même principe pour toute base de numération positionnelle (pour tout entier au moins égal à deux).