

Correction des exercices sur les bases de numération : niveau 1

Exercice 1

En groupant vingt-trois objets par paquets de deux, on obtient l'écriture $\overline{10111}^{deux}$ (on constitue onze paquets de deux, puis cinq paquets de paquets de deux, puis deux paquets de paquets de paquets de deux, et lorsque les regroupements sont terminés, cela donne : un élément tout seul, un paquet de deux, un paquet de paquet de deux et un paquet de paquets de paquets de paquets de deux). En base trois (en groupant les objets par trois), on obtient l'écriture $\overline{212}^{trois}$; puis en groupant par douze, cela donne $\overline{1B}^{douze}$ (un paquet de douze et onze objets non regroupés).

Exercice 2

Les chiffres utilisés en base huit sont les chiffres décimaux de 0 jusqu'à 7. Ajoutons un : si le chiffre des unités n'est pas 7, il n'y a pas de nouveau paquet formé, donc le chiffre des unités augmente de 1 et les autres chiffres ne sont pas modifiés. Mais si le chiffre des unités est 7 avant l'ajout, on dispose maintenant du bon nombre d'objets pour réaliser un nouveau groupement. Le chiffre des unités devient 0 et c'est le chiffre immédiatement à sa gauche (qui compte les paquets) qui augmente d'une unité. L'opération peut éventuellement se renouveler avec le chiffre des paquets ; on parle dans ce cas de propagation de retenue. Les successeurs demandés sont ainsi dans l'ordre : 124, 210, 500, 671 et 1000.

Exercice 3

Les chiffres utilisés en base douze sont les chiffres décimaux de 0 jusqu'à 9, puis un chiffre A qui code la quantité dix et un chiffre B qui code la quantité onze. Le principe est identique à celui expliqué dans l'exercice précédent, il faut distinguer deux cas de figure : soit le chiffre des unités est le plus grand ou non. Si le chiffre des unités est B, cela signifie qu'en ajoutant une nouvelle unité, on dispose du bon nombre d'objets pour réaliser un nouveau groupement. Le chiffre des unités devient 0 et c'est le chiffre immédiatement à sa gauche qui augmente d'une unité, l'opération pouvant se renouveler aux rangs supérieurs. Les successeurs demandés sont ainsi dans l'ordre : 124, 23A, BA2, B01 et 1000.

Pour les prédécesseurs : si le chiffre des unités est un autre chiffre que 0, il est possible de retenir une unité au rang des unités sans modifier le reste de l'écriture du nombre. Sinon, il faut "casser" un paquet de douze, qui est alors interprété comme douze unités, et on retranche 1, ce qui laisse en unité le chiffre B (onze). Les prédécesseurs demandés sont dans l'ordre : 122, 238, BA0, ABB et BBA.

Exercice 4

1) Cette écriture correspond au nombre $3 \times 60 \times 60 \times 60 + 0 \times 60 \times 60 + 17 \times 60 + 48 = 649\,069$.

2) Pour obtenir l'écriture sexagésimale du nombre dont l'écriture décimale est 54 325 432, il faut itérer le procédé de groupement par 60, ce qui se traduit par un enchaînement de divisions par 60 ; les restes successifs produisent (de la droite vers la gauche) les chiffres de l'écriture recherchée.

Ainsi : $54\,325\,432 = 905\,423 \times 60 + 52$; $905\,423 = 15\,090 \times 60 + 23$; $15\,090 = 251 \times 60 + 30$ et $251 = 4 \times 60 + 11$.

L'écriture recherchée est (4) (11) (30) (23) (52).

Exercice 5

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	10
2	2	3	4	5	6	10	11
3	3	4	5	6	10	11	12
4	4	5	6	10	11	12	13
5	5	6	10	11	12	13	14
6	6	10	11	12	13	14	15

×	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	11	13	15
3	0	3	6	12	15	21	24
4	0	4	11	15	22	26	33
5	0	5	13	21	26	34	42
6	0	6	15	24	33	42	51

On peut reconnaître dans le tableau des additions toutes les décompositions des entiers de 0 à 6 sur des diagonales orientées dans le même sens. L'autre diagonale principale contient les doubles.

Dans le tableau des multiplications, pour constituer la dernière colonne (ou ligne), on peut écrire à partir de la première ligne dans l'ordre croissant tous les chiffres en position de "septaine", puis dans l'ordre décroissant tous les chiffres en position d'unité. On retrouve un principe connu pour la table de 9 du système décimal.

Niveau 2

Orléans-Tours 1993

- 1) On effectue des divisions itérées sur 144 avec 12 pour quotient. On obtient : $144 = 1 \times 12 \times 12 + 0 \times 12 + 0$. Cette décomposition correspond à l'écriture $\overline{100}^{\text{douze}}$.
- 2) L'écriture $\overline{1000}$ en base douze correspond au nombre $12^3 = 1728$, écrit en base dix.
- 3) a est le codage de dix (10) en base douze ; b est le codage de onze (11) en base douze.
 $\overline{ab}^{\text{douze}} = 10 \times 12 + 11 = 131$. Le produit $a \times b$ correspond à $10 \times 11 = 110$ en base dix.

Montpellier 1993

1. On peut utiliser deux méthodes : soit on détermine l'écriture du nombre en base dix puis on convertit l'écriture en base trois (méthode correcte mais longue), sinon on reconnaît directement une décomposition additive en base trois. On obtient dans les deux cas $823 = \overline{1010111}^{\text{trois}}$.
2. On obtient $823 = \overline{1114}^{\text{neuf}}$, par exemple en réalisant des divisions itérées par 9.
3. On obtient $\overline{14321}^{\text{cinq}}$, par exemple en réalisant le calcul en base dix puis en convertissant, ou bien directement par lecture du calcul, en utilisant le fait que le nombre 5 s'écrit 10 en base cinq.
4. Même chose que question 1 : ou bien on effectue les calculs en base dix et on convertit, ou alors on reconnaît une identité remarquable : $(4^3 + 1)(4^3 - 1) = 4^6 - 1 = 16^3 - 1 = \text{FFF}$.

Montpellier 1994

On doit résoudre une équation et vérifier si les solutions sont compatibles avec les écritures.

1. L'énoncé fournit la relation $a^2 + a + 3 = 2a + 1 + 3a + 2$, soit $a^2 = 4a$ après simplifications. Cette équation admet deux solutions : 0 et 4. Mais une base de numération doit être un entier au moins égal à 2 (et même au moins 4 ici, puisqu'on utilise le chiffre 3). L'entier 4 est ainsi une base compatible avec cette opération.
2. L'équation est ici $2b + 6 + b + 2 = 4b + 3$, soit après simplifications $b = 5$. Mais comme on utilise le chiffre 6, il n'existe pas de base compatible avec l'opération.

Montpellier 1995

1. Pour $\overline{11}^n$, les valeurs successives sont : 3, 4, 5, 6 ; pour $\overline{111}^n$, les valeurs successives sont : 7, 13, 21, 31.
2. Il faut résoudre $n^2 + n + 1 = 73$, soit $n^2 + n = 72$. Comme $n^2 + n = n(n + 1)$, on cherche deux entiers consécutifs dont le produit vaut 72. Ainsi, $n = 8$ puisque $8 \times 9 = 72$.
3. Comme $(n + 1)^2 - (n^2 + n + 1) = n$, on obtient $n = 5$ après simplification.
4. Non car l'équation $(n + 1)^2 - (n^2 + n + 1) = n$ est satisfaite pour toute valeur de n .

Montpellier 1997

- 1) 2) En base huit, le plus grand nombre qui s'écrit avec deux chiffres est $\overline{77}$, qui correspond à la quantité $7 \times 8 + 7 = 63$. En base douze, ce nombre est $\overline{BB}$ qui correspond à $11 \times 12 + 11 = 143$ (en désignant par B la lettre qui code la quantité onze).
- 3) a) Le plus grand chiffre en base b a pour valeur $b - 1$. Si l'on compte $b - 1$ unités et $b - 1$ paquets de b éléments, cela fait en tout $b \times (b - 1) + b - 1 = b^2 - b + b - 1 = b^2 - 1$ éléments.
Une autre façon de parvenir à ce résultat est de remarquer que le plus grand nombre qui s'écrit avec 2 chiffres précède immédiatement le plus petit qui s'écrit avec trois chiffres. Le plus petit entier qui s'écrit avec trois chiffres est $\overline{100}$, qui représente un paquet de b paquets contenant chacun b éléments, soit en tout b^2 éléments. Ainsi, la quantité recherchée est $b^2 - 1$.
- b) Il faut résoudre l'inéquation $n^2 - 1 \leq 224$ (si cette inéquation n'est pas satisfaite, alors 224 s'écrit au moins avec trois chiffres puisque 224 est supérieur ou égal à n^2 et n^2 s'écrit $\overline{100}^n$). On obtient $n \leq 15$; pour $n = 15$, on a exactement $224 = \overline{EE}^{\text{quinze}}$.