

Figures géométriques planes

On s'intéresse ici à la géométrie du plan appelée géométrie euclidienne. Cette géométrie est axiomatique, ce qui signifie que sa construction ainsi que son étude reposent sur la donnée de propriétés admises (axiomes). On suppose en premier lieu que le plan est muni d'une distance qui permet de mesurer l'écart séparant deux éléments du plan, ou points, et on rajoutera d'autres axiomes lorsque l'on en aura besoin (par exemple, par un point passe une infinité de droites).

On note AB la distance entre les points A et B . La distance vérifie trois propriétés :

- $AB=0$ si et seulement si A et B sont confondus,
- $AB=BA$,
- pour tout point C , $AC+BC \geq AB$.

Cette dernière relation est appelée inégalité triangulaire.

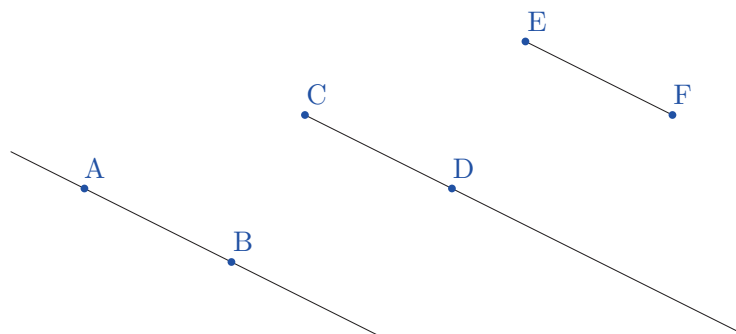
Segments, droites et demi-droites

Soient A et B deux points distincts. L'ensemble constitué des points C qui satisfont la relation $AC+CB=AB$ est appelé segment d'extrémités A et B et noté $[AB]$ ou $[BA]$. Sur un dessin, on peut indiquer par un symbole commun l'égalité des longueurs de deux segments.

Trois points distincts A , B et C sont dits alignés lorsque, ou bien A appartient au segment $[BC]$, ou bien B appartient au segment $[AC]$, ou bien C appartient au segment $[AB]$. On appelle droite passant par A et B l'ensemble des points C tels que A , B et C soient alignés, et on note cette droite (AB) ou (BA) . Si A , B et C sont trois points alignés, alors les notations (AB) , (AC) et (BC) désignent toutes la même droite passant par les points A , B et C . L'existence de ces droites est assurée par deux axiomes : par deux points distincts passe une unique droite et tout segment peut se prolonger en une droite.

Si un point n'appartient pas à une droite, il est dit extérieur à cette droite.

On appelle demi-droite issue de A et passant par B , et on note $[AB)$, l'ensemble des points C tels que B appartienne au segment $[AC]$ ou C appartienne au segment $[AB]$.



droite (AB) , demi-droite $[CD)$, segment $[EF]$

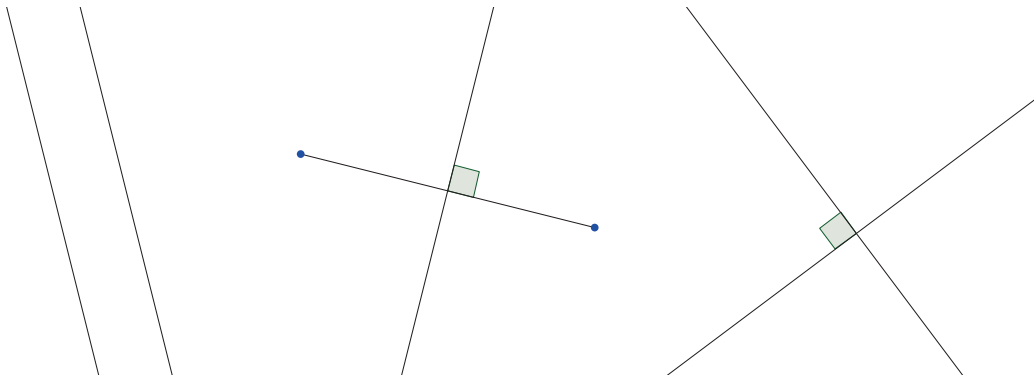
Droites parallèles, droites perpendiculaires

Deux droites Δ_1 et Δ_2 sont dites strictement parallèles lorsqu'elles n'ont aucun point en commun. Elles sont dites parallèles lorsqu'elles sont soit strictement parallèles, soit confondues ; on note alors $\Delta_1 \parallel \Delta_2$. Lorsque deux droites ne sont pas parallèles, elles sont dites sécantes ; dans ce cas, elles n'ont qu'un unique point en commun, leur point d'intersection.

On appelle médiatrice du segment $[AB]$ l'ensemble des points M tels que $AM=BM$ (i.e. les points à égale distance de A et de B). La médiatrice d'un segment est une droite qui partage le plan en deux demi-plans : l'ensemble des points qui sont plus proches de A que de B ($MA < MB$), et l'ensemble des points qui sont plus proches de B que de A ($MA > MB$). Le milieu du segment $[AB]$ est l'unique point qui appartient au segment $[AB]$ et qui se trouve sur sa médiatrice.

Soient Δ_1 et Δ_2 deux droites. S'il existe un segment $[AB]$ contenu dans la droite Δ_1 tel que la droite Δ_2 soit la médiatrice du segment $[AB]$, on dit que les droites Δ_1 et Δ_2 sont perpendiculaires et on note $\Delta_1 \perp \Delta_2$.

Pour vérifier la relation de perpendicularité entre deux droites, on utilise une équerre ; cet instrument permet également de construire une droite perpendiculaire à une autre. La relation de perpendicularité peut être signifiée sur une figure en dessinant un petit carré à l'intersection des droites.



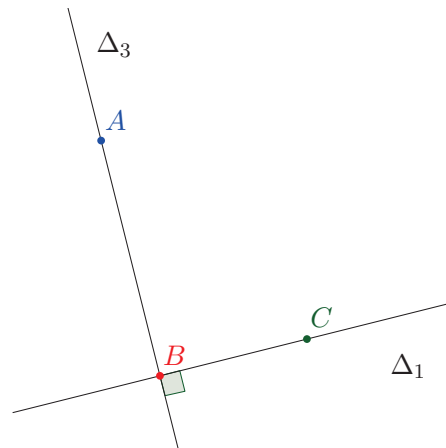
droites parallèles, médiatrice, droites perpendiculaires

Les propriétés suivantes sont satisfaites en géométrie euclidienne :

- pour toute droite Δ_1 et tout point A extérieur à Δ_1 , il existe une unique droite Δ_2 passant par A telle que $\Delta_2 \parallel \Delta_1$,
- pour toute droite Δ_1 et tout point A extérieur à Δ_1 , il existe une unique droite Δ_3 passant par A telle que $\Delta_3 \perp \Delta_1$,
- si trois droites Δ_4 , Δ_5 et Δ_6 vérifient $\Delta_4 \parallel \Delta_6$ et $\Delta_5 \parallel \Delta_6$, alors $\Delta_4 \parallel \Delta_5$,
- si trois droites Δ_4 , Δ_5 et Δ_7 satisfont $\Delta_4 \perp \Delta_7$ et $\Delta_5 \perp \Delta_7$, alors $\Delta_4 \parallel \Delta_5$.

La première de ces assertions est appelée cinquième axiome d'Euclide. Il existe des géométries, forcément non euclidiennes, qui ne satisfont pas cet axiome. Pour ne citer qu'un exemple, en assimilant la Terre à une sphère, on peut définir une géométrie sur la surface terrestre pour laquelle les droites sont les cercles centrés au centre de gravité de la Terre (dont font partie les méridiens, mais pas les parallèles) ; sur cette surface, il n'y a pas de parallèle à une droite passant par un point donné.

Grâce à la deuxième assertion, on peut définir la projection orthogonale du point A sur la droite Δ_1 comme le point d'intersection B entre les droites Δ_1 et Δ_3 . On a alors pour tout point C de la droite Δ_1 distinct de B la relation $AB < AC$. Cela permet de définir la distance entre le point A et la droite Δ_1 comme la distance AB.



projection orthogonale

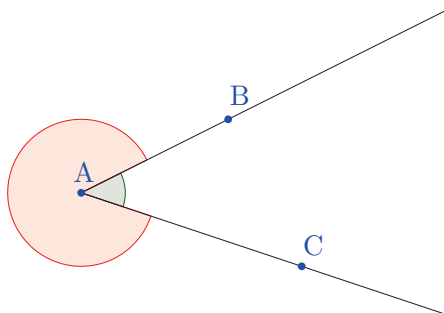
Angle

On appelle secteur angulaire la donnée de deux demi-droites issues d'un même point, par exemple $[AB)$ et $[AC)$. Le point A est alors appelé sommet du secteur angulaire et les deux demi-droites sont appelées cotés du secteur angulaire. On appelle angle la grandeur d'un secteur angulaire permettant de définir la proportion de plan que ce secteur occupe. On note un angle sous la forme $\widehat{BAC}$ lorsque A est son sommet et les demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ sont ses cotés. Deux secteurs angulaires ont même angle si et seulement s'ils sont superposables par déplacements (isométries).

Les angles sont mesurables ; on peut exprimer leur mesure selon différentes unités. Nous ne considérerons ici qu'une unité de mesure, le degré, que l'on note $^\circ$, défini de sorte que la mesure maximale d'un angle en un point soit de 360° . L'instrument de mesure d'un angle est le rapporteur.

Remarque. En toute rigueur, on devrait parler de secteurs angulaires et d'angles au pluriel car les deux demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ définissent non pas un mais deux secteurs du plan.

Le plan euclidien possède la propriété d'être orientable ; on peut ainsi définir une orientation des angles du plan. Traditionnellement, on choisit le sens trigonométrique qui correspond au sens inverse des aiguilles d'une montre. Lorsque l'on a défini une orientation, on peut parler d'angle orienté. Définir une orientation est obligatoire lorsque l'on veut ajouter ou soustraire deux mesures d'angles. Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{CAB}$ sont égaux en tant qu'angles non orientés (car superposables), en revanche les angles orientés $\widehat{BAC}$ et $\widehat{CAB}$ sont distincts et leurs mesures sont opposées.

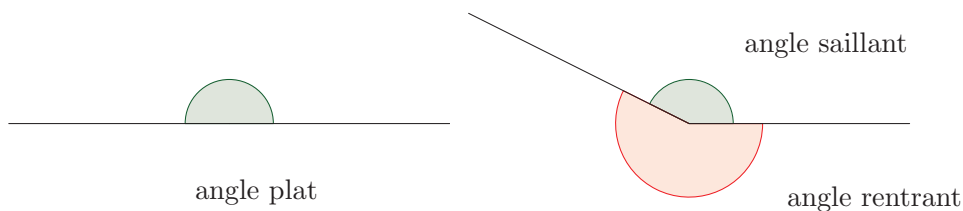


deux angles possibles

Caractérisation d'angles par rapport à leur mesure

Un angle de 180° est dit plat, un angle de 0° est dit nul. Un angle strictement supérieur à 180° est dit rentrant. Un angle strictement compris entre 0° et 180° est dit saillant.

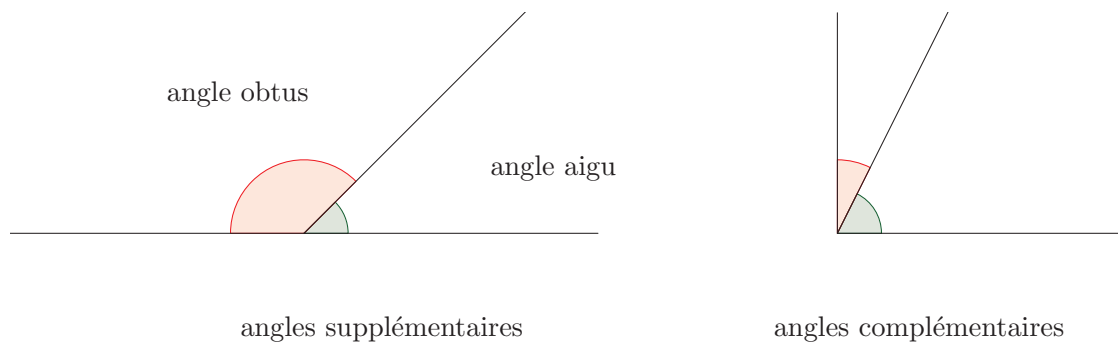
On a vu précédemment que la définition d'un angle permettait de considérer en réalité deux angles, et sauf cas particulier (angle nul, angle plat) l'un des deux est rentrant tandis que l'autre est saillant. Par abus, on identifie traditionnellement un angle à sa partie saillante.



Deux droites perpendiculaires définissent un angle 90° appelé angle droit.

Un angle strictement compris entre 0° et 90° est dit aigu. Un angle strictement compris entre 90° et 180° est dit obtus.

Deux angles sont dits complémentaires lorsque leur somme est égale à 90° . Deux angles sont dits supplémentaires lorsque leur somme est égale à 180° .

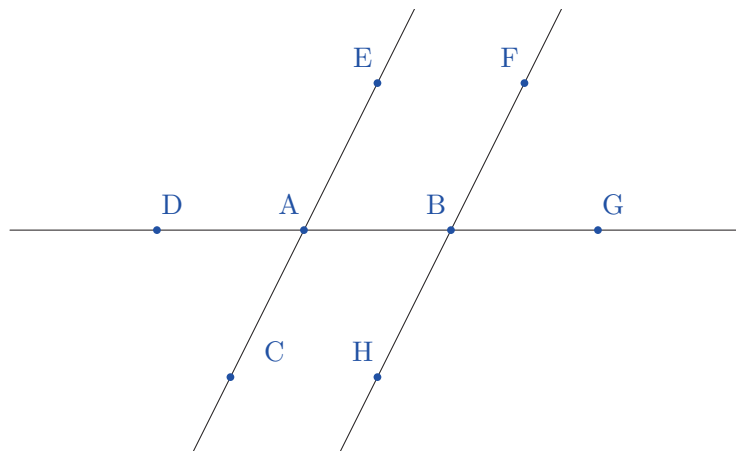


Caractérisation de paires d'angles particulières

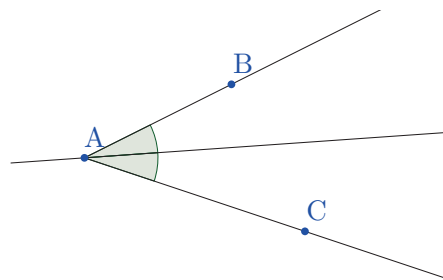
On peut identifier sur la figure suivante de nombreuses relations entre angles :

- les angles $\widehat{DAE}$ et $\widehat{ABF}$ sont dits angles correspondants,
- les angles $\widehat{EAB}$ et $\widehat{HBA}$ sont dits angles alternes internes,
- les angles $\widehat{CAD}$ et $\widehat{FBG}$ sont dits angles alternes externes,
- les angles $\widehat{DAE}$ et $\widehat{BAC}$ sont dits opposés.

Deux angles qui sont correspondants, opposés, alternes internes ou alternes externes ont même mesure.



Soit $\widehat{BAC}$ un angle. Il existe un point D (non unique) tel que les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{CAD}$ aient même mesure. On montre alors que tous les points D vérifiant cette propriété sont alignés et définissent (avec le point A) une droite appelée bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. La bissectrice d'un angle peut être tracée en utilisant le rapporteur ou le compas ; elle correspond à l'ensemble des points qui sont équidistants des cotés de l'angle.



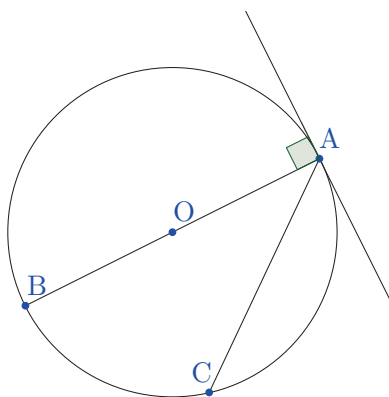
bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$

Cercle

Soient O et A deux points distincts. On appelle cercle de centre O et de rayon OA l'ensemble des points M tels que $OM=OA$. On appelle disque de centre O et de rayon OA l'ensemble des points N tels que $ON \leq OA$. Le disque de centre O et de rayon OA est la région du plan délimitée par le cercle de centre O et de rayon OA qui contient le point O . On appelle diamètre du cercle tout segment $[AB]$ tel que A et B soient des points distincts du cercle de sorte que A , B et O soient alignés ; dans ce cas O est le milieu du segment $[AB]$. L'outil permettant de tracer un cercle est le compas.

Soit Γ un cercle et soient A et B deux points du cercle. Il existe deux morceaux distincts constitués chacun de points du cercle compris entre A et B . On appelle arc chacun de ces deux morceaux. Si AB n'est pas un diamètre du cercle Γ , les deux arcs sont de longueurs différentes, il y en a un "petit" et un "grand". Sans orientation, les notations $\widehat{AB}$ et $\widehat{BA}$ ne permettent pas de reconnaître quel arc elles désignent, tandis qu'une orientation permet de les distinguer. Le segment $[AB]$ est dit corde du cercle Γ .

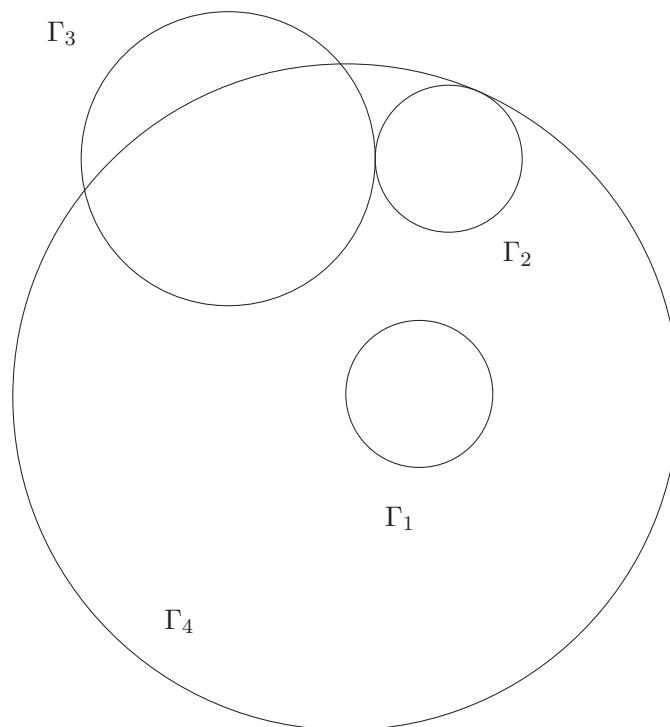
Une droite est dite sécante à un cercle lorsque l'intersection de la droite et du cercle est constituée de deux points. Une droite est dite tangente à un cercle lorsque l'intersection de la droite et du cercle est constituée d'un seul point. Une tangente à un cercle est perpendiculaire à la droite passant par le centre du cercle et le point d'intersection entre la tangente et le cercle.



cercle de diamètre $[AB]$ avec tangente en A et corde $[AC]$

Soient deux cercles Γ et Γ' , de centres respectifs O et O' et de rayons respectifs R et R' , avec $R \geq R'$. Trois cas de figure peuvent se produire pour décrire la position relative des cercles :

- Les cercles s'intersectent en deux points ; on les dit sécants. Ce cas de figure se produit lorsque $R - R' < OO' < R + R'$.
- Les cercles s'intersectent en un unique point : on les dit tangents, intérieurement si $OO' = R - R'$ ou extérieurement si $OO' = R + R'$.
- Les cercles ne s'intersectent pas : on les dit extérieurs si $OO' > R + R'$, et on dit que Γ' est intérieur à Γ si $OO' < R - R'$.



les cercles Γ_1 et Γ_2 sont extérieurs ; Γ_1 est intérieur à Γ_4 ; Γ_2 et Γ_3 sont tangents extérieurement ; Γ_2 et Γ_4 sont tangents intérieurement ; Γ_3 et Γ_4 sont sécants

Triangles

On note deux propriétés fondamentales dans un triangle.

- Une propriété métrique : la longueur d'un côté est toujours comprise entre la différence et la somme des longueurs des deux autres côtés (c'est l'inégalité triangulaire).
- Une propriété angulaire : la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° .

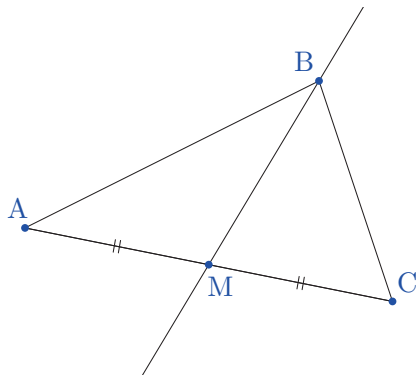
Triangles particuliers

Soient A, B et C trois points distincts. Le triangle ABC est dit isocèle en A lorsque $AB=AC$, ou, ce qui est équivalent, lorsque les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$ sont de même mesure. Dans ce cas, le sommet A est appelé sommet principal du triangle, et le côté [BC] est appelé base du triangle. Le triangle ABC est dit équilatéral lorsque $AB=AC=BC$. Un triangle qui n'est isocèle en aucun sommet est dit scalène (ou irrégulier). Les triangles scalènes sont exactement ceux qui ont trois angles distincts. Le triangle ABC est dit rectangle en A lorsque $\widehat{BAC}$ est un angle droit. Dans ce cas, le côté [BC] est appelé hypoténuse.

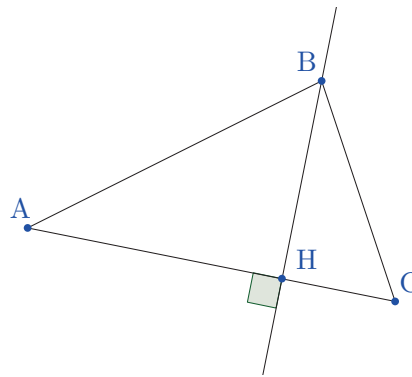
Droites remarquables d'un triangle

Soit ABC un triangle. Le côté opposé à un sommet est le côté qui n'admet pas ce sommet comme extrémité. On appelle médiane issue d'un point la droite passant par ce point et par le milieu du côté opposé. On appelle hauteur issue d'un point la droite passant par ce point qui est perpendiculaire à la droite contenant le côté opposé. On appelle pied de la hauteur le point d'intersection entre la hauteur issue d'un point et le côté opposé.

En pratique, on effectue souvent la confusion entre la hauteur issue d'un sommet et la distance qui sépare ce sommet de son côté opposé, en particulier dans les formules de calcul d'aires.



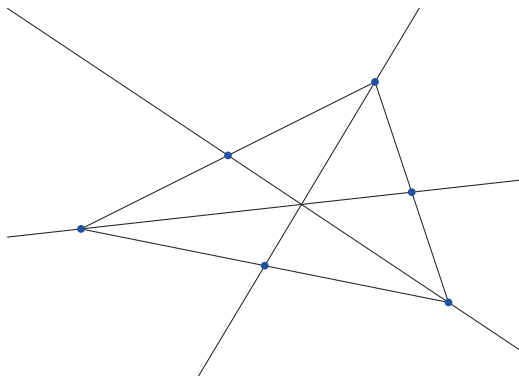
médiane du triangle ABC issue du sommet B



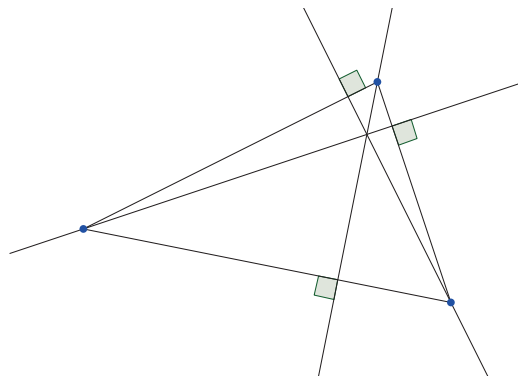
hauteur du triangle ABC issue du sommet B

Propriétés remarquables d'un triangle

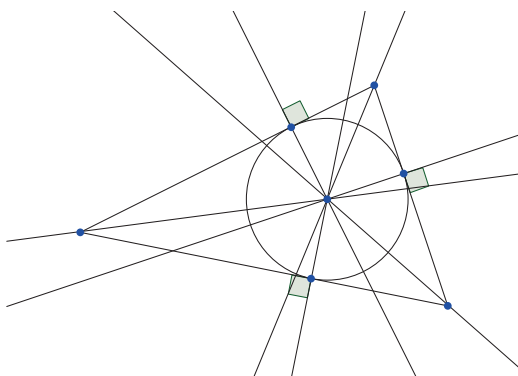
- Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes (i.e. elles se croisent en un même point) au centre du cercle circonscrit au triangle. Le cercle circonscrit au triangle est le plus petit cercle contenant le triangle.
- Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes au centre du cercle inscrit au triangle. Le cercle inscrit au triangle est le plus grand cercle contenu dans le triangle.
- Les trois médianes d'un triangle sont concourantes au centre de gravité du triangle (ou encore isobarycentre). Si I est le milieu de [BC] et G le centre de gravité du triangle, on a la relation $AI = 3GI$ (qui équivaut à la relation $AG = \frac{2}{3}AI$). Ainsi, la distance entre G et un sommet est égale au double de la distance entre G et le milieu du côté opposé de ce sommet.
- Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en l'orthocentre du triangle.



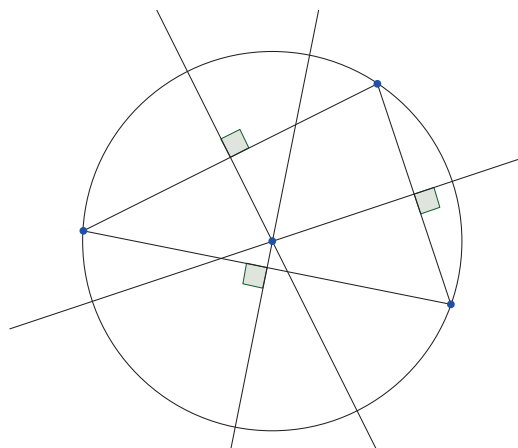
centre de gravité du triangle



orthocentre du triangle



cercle inscrit au triangle



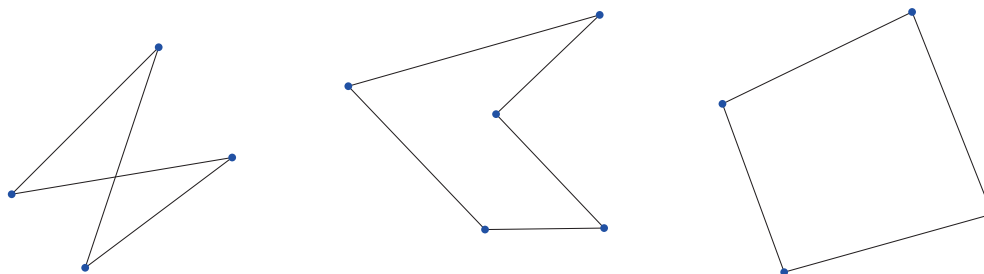
cercle circonscrit au triangle

Lorsqu'un triangle n'est pas équilatéral, son orthocentre, son centre du cercle circonscrit et son centre de gravité sont alignés et définissent une droite appelée droite d'Euler du triangle.

Polygones

Un polygone est la donnée d'une liste finie de segments, de sorte que toute extrémité de l'un des segments appartienne à exactement deux segments. Les segments qui constituent un polygone sont ses cotés, et les extrémités de ces cotés sont les sommets du polygone. Deux cotés sont dits consécutifs s'ils ont une extrémité en commun.

Un polygone est une figure fermée qui partage le plan en au moins deux régions, un extérieur et au moins un intérieur. Un polygone est dit croisé si deux de ses cotés se coupent ; lorsqu'il n'est pas croisé, il y a un extérieur et un intérieur. Un polygone non croisé est convexe lorsque, en prenant deux points sur le polygone, le segment ayant pour extrémités ces points se situe à l'intérieur. Lorsqu'un polygone n'est pas convexe, il est dit concave. Un polygone est dit régulier lorsque ses sommets sont inscriptibles dans un cercle et que ses cotés sont tous de même longueur.



polygone croisé, concave, convexe

Certains polygones ont une dénomination particulière en fonction de leur nombre de cotés (liste non exhaustive) :

3	4	5	6	8	10	12
triangle	quadrilatère	pentagone	hexagone	octogone	décagone	dodécagone

Quadrilatères

Dans un quadrilatère, deux cotés qui ne sont pas consécutifs sont dits opposés. Les deux segments que l'on peut former à partir des sommets du quadrilatère et qui ne sont pas des cotés sont appelés diagonales du quadrilatère. La somme des angles d'un quadrilatère convexe est égale à 360° .

Quadrilatères particuliers.

- Si deux droites contenant deux cotés opposés sont parallèles, le quadrilatère est appelé trapèze.
- Un trapèze dont au moins l'un des angles est droit est appelé trapèze rectangle.
- Un trapèze possédant un axe de symétrie est appelé trapèze isocèle.
- Si les droites contenant les cotés opposés sont parallèles, le quadrilatère est appelé parallélogramme.
- Si toutes les longueurs des cotés sont égales, le quadrilatère est appelé losange.
- Si tous les angles d'un quadrilatère sont droits, le quadrilatère est appelé rectangle.
- Un quadrilatère qui est à la fois un rectangle et un losange est appelé carré.