

Corrections - constructions en géométrie

Note générale : pour la plupart des exercices, plusieurs méthodes de constructions sont possibles ; on indique dans ce qui suit une méthode valable.

Aide : pour construire une propriété demandée, on peut construire une figure élémentaire (triangle ou quadrilatère particulier) faisant apparaître la propriété en question.

Exercice 1

1. Pour construire une perpendiculaire à une droite (d) passant par un point A avec la règle et le compas : on choisit un écartement du compas de sorte qu'un arc de cercle centré en A intersecte la droite (d) en deux points B et C . On trace alors deux arcs de cercles de mêmes rayons centrés en B et C , ces arcs se rencontrent en un point D différent de A . Comme les points A et D sont à égale distance des points B et C , la droite (AD) est la médiatrice du segment $[BC]$, elle est perpendiculaire à la droite (d) .

On a en fait construit un losange, dont les diagonales sont portées par les droites perpendiculaires.

2. Pour construire une parallèle à une droite (d) passant par un point A avec la règle et le compas : soient B et C des points distincts de la droite (d) . On trace le cercle de centre A et de rayon BC , puis le cercle de centre C et de rayon AB . Ces deux cercles s'intersectent en deux points, l'un de ces deux points seulement permet d'obtenir un quadrilatère convexe (D) . La droite (AD) est parallèle à la droite (BC) .

On a en fait construit un parallélogramme pour faire apparaître les droites parallèles.

Exercice 2

Soit A le sommet de l'angle. On choisit un point B sur une demi-droite définissant l'angle. On trace le cercle de centre A et de rayon AB qui intersecte l'autre demi-droite en C . On trace les cercles de rayon AB , de centres B et C , qui s'intersectent en A et un autre point D . La droite (AD) est la bissectrice de l'angle donné. Comme dans l'exercice précédent, la bissectrice correspond en fait à la diagonale d'un losange.

Exercice 3

Pour obtenir des angles de 90° et 45° , on construit un angle droit puis sa bissectrice. Pour obtenir un angle de 60° , on construit un triangle équilatéral. Pour obtenir un angle de 30° , on construit la bissectrice d'un angle de 60° ; une autre possibilité est d'inscrire l'angle de 60° dans un angle droit pour obtenir un angle de 30° comme son complémentaire.

Exercice 4

Un programme de construction de l'hexagone régulier est le suivant :

1. on trace un cercle de rayon R ,
2. on choisit un point M_1 sur ce cercle,
3. on trace le cercle de centre M_1 et de rayon R qui intersecte le cercle initial en un point M_2 ,
4. on trace le cercle de centre M_2 et de rayon R qui intersecte le cercle initial en un point M_3 ,
5. on itère ce protocole de construction jusqu'à ce que l'on ait obtenu 6 points sur le cercle, qui sont les sommets de l'hexagone régulier (cette construction permet d'obtenir une rosace).

Une autre construction possible est de construire six triangles équilatéraux ayant un sommet commun.

Pour construire un octogone régulier, on peut construire un carré, puis on construit le cercle qui intercepte tous ses sommets, enfin on trace les médiatrices (il n'y en a que deux) des côtés du carré ; les points d'intersections de ces droites avec le cercle permettent d'obtenir les quatre sommets manquants pour définir l'octogone.

Exercice 5

1. On trace un segment de longueur 5 cm, puis sa médiatrice ainsi que le cercle dont ce segment est un diamètre.
2. On trace un segment de longueur 4 cm, puis sa médiatrice, et on reporte 3 cm de part et d'autre en partant du milieu du segment sur cette médiatrice.
3. On trace un segment $[AC]$ de longueur 4 cm. On construit deux cercles : celui de diamètre $[AC]$ et celui de centre A et de rayon 3 cm. L'un des points d'intersection est B, il ne reste plus qu'à construire D tel que ABCD soit un rectangle en utilisant une procédure déjà utilisée.
4. On trace un triangle dont les longueurs des cotés sont 4 cm, 8 cm et 9 cm, puis on trace les parallèles permettant de compléter la figure.
5. On trace un angle de 60° issu de A ; sur une demi-droite, on place le point B à 3 cm de A, puis on trace le cercle de centre B et de rayon 8 cm. Ce cercle intersecte l'autre demi-droite en D, il reste à construire le point C de sorte que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

Exercice 6

Dans un triangle contenant trois angles aigus (acutangle) , l'orthocentre se situe à l'intérieur du triangle. Dans un triangle contenant un angle obtus (obtusangle), l'orthocentre se situe à l'extérieur du triangle. Dans un triangle rectangle, l'orthocentre est le sommet opposé à l'hypoténuse.

Exercice 7

1. Deux cas possibles (symétrie par rapport à l'axe (AB)).
2. Impossible, les distances ne satisfont pas l'inégalité triangulaire.
3. La figure obtenue est un segment $[BC]$ contenant le point A (on peut parler dans ce cas de triangle plat ; bien noter ici que les imprécisions de tracés peuvent avoir des conséquences importantes : si l'emplacement exact du point C n'est pas repéré, il pourrait être possible d'obtenir le tracé d'un triangle non plat, ou encore de ne pas pouvoir tracer le point C).
4. Deux cas possibles (symétrie par rapport à l'axe (AB)).
5. Deux cas possibles (symétrie par rapport à l'axe (AB)).
6. La seule connaissance des mesures d'angle détermine la forme du triangle, il existe une infinité de triangles semblables.
7. Impossible, la somme des angles du triangle ne vaut pas 180° .
8. Deux cas possibles (symétrie par rapport à l'axe (AB)).

Exercice 8

- a) Tout triangle (non plat) peut s'inscrire dans un cercle dont le centre est le centre du cercle circonscrit. Pour construire un polygone non régulier avec des sommets inscrits, on peut considérer un triangle non équilatéral.
- b) Un triangle dont les angles sont égaux est un triangle équilatéral, il est donc régulier. Un rectangle non carré est un polygone non régulier dont tous les angles sont égaux.
- c) Un triangle dont les côtés sont de même longueur est un triangle équilatéral, il est donc régulier. Pour construire un polygone non régulier avec des cotés ayant tous même longueur mais des sommets ne se trouvant pas sur un même cercle, on peut considérer un losange non carré.
- d) Comme mentionné, il faut 3 côtés dans le cas (a), il en faut 4 pour les cas (b) et (c).

Exercice 9

Soit $[AB]$ un segment. On trace une demi-droite issue de A autre que $[AB]$. Sur cette droite, on reporte sept fois une distance fixée à partir de A . En traçant sept parallèles, on obtient une partition du segment $[AB]$ en sept morceaux de mêmes longueurs.

Exercice 10

On peut exprimer 13 comme la somme de deux carrés : $13 = 2^2 + 3^2$, donc si l'on peut construire un triangle rectangle dont les deux côtés formant un angle droit sont de mesure 2 et 3, on obtient la longueur souhaitée.

Pour obtenir une longueur de $\sqrt{11}$, on peut utiliser le fait que 11 est la différence entre deux carrés : comme $11 = 6^2 - 5^2$, si l'on peut construire un triangle rectangle de sorte qu'un des côtés formant l'angle droit soit de longueur 5 et que l'hypoténuse soit de longueur 6, on obtient la longueur souhaitée (note : cette méthode fonctionne aussi dans le premier cas puisque $13 = 7^2 - 6^2$).

Exercice 11

a) On choisit trois points sur l'arc de cercle A , B et C . On forme les deux cordes $[AB]$ et $[AC]$. On construit les médiatrices de ces deux cordes. Par définition, le point d'intersection de ces médiatrices est à égale distance de A , B et C : c'est forcément le centre du cercle.

b) On peut tracer la perpendiculaire à la droite (d) passant par le centre du cercle ; cette droite intersecte le cercle en deux points B et C . On trace alors les perpendiculaires à la droite (BC) qui passent respectivement par B et par C ; elles sont parallèles à la droite (d) .

c) Appelons O le centre du cercle. Soit M l'un des points du cercle tel que la droite (AM) soit perpendiculaire à la droite (OM) . Alors le triangle AMO est rectangle en M , ce qui signifie que M se trouve sur le cercle de diamètre $[AO]$ (cette propriété est communément désignée comme la réciproque du théorème du triangle inscrit dans un cercle). Ainsi, M est l'un des deux points d'intersection entre le cercle donné et le cercle de diamètre $[OA]$.