

Nombres rationnels et décimaux

Dans certaines situations de divisibilité, le résultat fait apparaître un reste qui interdit la possibilité d'un partage équitable en quantités entières. Pour remédier à ce problème, il faut donc utiliser un autre type de quantité que les nombres entiers ; à cet effet, on introduit les nombres rationnels.

Définition

Soient a un entier relatif et b un entier relatif non nul. On appelle nombre rationnel la quantité x vérifiant l'équation $a = b \times x$. On note alors $x = \frac{a}{b}$ et on dit que $\frac{a}{b}$ est une écriture fractionnaire de x ; dans cette écriture, a est le numérateur et b est le dénominateur. L'ensemble des nombres rationnels est traditionnellement noté $\mathbb{Q}$.

Propriétés des nombres rationnels

L'ensemble des nombres rationnels contient l'ensemble des entiers relatifs, puisque tout entier relatif n peut se mettre sous la forme $\frac{n}{1}$.

Soit $\frac{a}{b}$ une écriture fractionnaire de x . Si a et b sont tous les deux multiples d'un même entier non nul d , on peut écrire $a = a' \times d$ et $b = b' \times d$. Comme $a = b \times x$, on obtient $a' \times d = b' \times d \times x$. On peut alors simplifier par d et on obtient $a' = b' \times x$. Ainsi $\frac{a'}{b'}$ est une autre écriture fractionnaire de la même quantité x .

On peut également multiplier le numérateur et le dénominateur d'une fraction par une quantité commune non nulle, de sorte à obtenir une nouvelle écriture fractionnaire. Plus précisément, tout nombre rationnel x possède une infinité d'écritures fractionnaires et une unique écriture fractionnaire dite irréductible : c'est celle pour laquelle le numérateur et le dénominateur ont un plus grand commun diviseur égal à 1 (et avec un dénominateur positif par convention). Toutes les écritures fractionnaires du rationnel x dont l'écriture fractionnaire irréductible est $\frac{a}{b}$ sont de la forme $\frac{ka}{kb}$, avec k un entier relatif non nul.

Une conséquence de ce résultat est que la somme, la différence, le produit ou le quotient de deux nombres rationnels est encore un nombre rationnel (sous réserve que l'on ne divise pas par 0). En effet, on peut effectuer l'addition de nombres rationnels ayant un dénominateur commun : si $x = \frac{a}{d}$ et $y = \frac{b}{d}$, alors par définition $a = x \times d$ et $b = y \times d$, donc $a + b = x \times d + y \times d = (x + y) \times d$, ce qui revient à dire que $\frac{a + b}{d}$ est une écriture fractionnaire de $x + y$. De plus, on peut toujours s'arranger pour que, deux fractions étant données, on obtienne deux écritures fractionnaires qui ont le même dénominateur : si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont de telles fractions, alors $\frac{a}{b} = \frac{a \times d}{b \times d}$ et $\frac{c}{d} = \frac{b \times c}{b \times d}$.

Les additions et les multiplications de rationnels sont ainsi établies par les formules :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \text{ et } \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Pour tout x rationnel (et même réel), il existe un unique entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$. L'entier n est alors appelé partie entière de x , tandis que $x - n$ est appelé partie fractionnaire de x .

Nombre décimal

Une écriture fractionnaire dans laquelle le dénominateur est une puissance de 10 est appelée fraction décimale. On appelle nombre décimal tout nombre dont au moins une écriture fractionnaire est une fraction décimale. Une conséquence de cette définition est qu'un nombre rationnel est un décimal si et seulement si dans la fraction irréductible qui lui est associée, les seuls facteurs premiers autorisés du dénominateur sont 2 et 5. L'ensemble des nombres décimaux, parfois noté $\mathbb{D}$, est stable par addition, par soustraction et par multiplication, mais pas par division.

Soit x un décimal positif non entier. Alors x peut s'écrire de façon unique sous la forme $n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_p}{10^p}$, avec n et p des entiers naturels ($p > 0$), les termes a_i étant des chiffres avec $a_p \neq 0$. L'entier n est la partie entière de x , et la partie fractionnaire de x est $\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_p}{10^p}$. On écrit alors $x = n, a_1 a_2 \dots a_p$; cette écriture est l'écriture décimale prolongée de x , parfois appelée écriture à virgule de x . Dans ce cas, la partie fractionnaire $0, a_1 a_2 \dots a_p$ est aussi appelée partie décimale.

On appelle écriture (décimale) réduite d'un réel l'écriture nécessitant le moins de symboles pour désigner ce nombre. Par convention, une écriture est supposée réduite, toutefois les écritures non réduites pour exprimer des nombres décimaux sont possibles, par exemple 1,50 pour le nombre 1,5, ou encore 2,0 pour l'entier 2. L'écriture décimale d'un nombre décimal est obtenue par division euclidienne prolongée (on poursuit la division jusqu'à obtenir un reste nul).

Il existe trois façons pour déterminer si un nombre rationnel est (ou non) un nombre décimal :

- essayer d'écrire une fraction décimale qui lui correspond, le nombre est alors décimal,
- calculer sa fraction irréductible puis factoriser le dénominateur ; s'il contient un facteur premier autre que 2 ou 5, le nombre n'est pas décimal, et il est décimal sinon,
- faire la division prolongée et tomber sur un reste nul, il est alors décimal (si le nombre n'est pas décimal, l'algorithme de division boucle avec un reste qui n'est jamais nul).

Écritures décimales de rationnels

Si $x = \frac{p}{q}$ est un rationnel non décimal, la division prolongée de p par q ne termine pas mais est toutefois périodique. Cette division permet d'obtenir une écriture décimale infinie pour x . Le motif de plus petite longueur qui se répète dans cette écriture est appelé période. Pour représenter l'écriture décimale de x , on remplace alors l'infinité des périodes par la notation $\overline{p}$, p étant la période. Par exemple, les écritures décimales de $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$ et $\frac{16}{7}$ sont respectivement $0, \overline{3}$; $0, \overline{142857}$ et $2, \overline{285714}$. Réciproquement, toute écriture décimale périodique correspond à un nombre rationnel. On a en fait un résultat important qui lie la nature d'un nombre à la donnée de son écriture décimale.

Théorème : tout nombre rationnel non décimal a une unique écriture décimale qui est infinie et périodique. Tout nombre décimal a deux écritures décimales : l'une finie, que l'on peut transformer en écriture infinie en rajoutant une infinité consécutive de 0 (appelée écriture propre), et une autre se terminant par une infinité consécutive de 9 (appelée écriture impropre).

Tout nombre dont l'écriture décimale n'est ni finie ni périodique n'est pas un rationnel. Parmi ces nombres, on trouve par exemple $\sqrt{2}$ ou π . Toutes les écritures décimales possibles, qu'elles soient finies, périodiques ou non, définissent l'ensemble des nombres réels.