

Nécessité des fractions et des nombres décimaux

Ces notions naissent du besoin de construire des quantités permettant la résolution de certaines équations, ainsi que l'approximation de quantités qui ne peuvent être exprimées de façon exacte (par exemple $\sqrt{2}$, π).

L'étymologie de "fraction" et "rationnel" est latine (frangere = briser, ratio = quotient).

Historique des fractions et nombres décimaux

On trouve les premières traces de fractions en Mésopotamie (env. -3000), puis en Égypte sous le terme de nombres rompus; il s'agit alors de fractions dites égyptiennes (le numérateur est égal à 1). En Grèce, la notion de fraction intervient sous la forme de problèmes de rapports de longueurs et fait naître le questionnement sur le concept de rationalité (école Pythagoricienne). On trouve ensuite la trace d'étude de ces nombres entre le X^e et le XIV^e siècle dans les civilisations indienne et arabo-musulmane avec la manipulation de fractions décimales (Al-Kashi). Nicole (Nicholas) Oresme introduit les termes de numérateur et dénominateur dans le courant du XIV^e siècle.

La première notation de nombres décimaux est proposée par Simon Stevin en 1585 (la disme). La virgule est introduite au courant du XVII^e siècle par Willebrord van Roijen Snell et John Napier (Neper). Les conventions usuelles des symboles et notations mathématiques sont fixées lors de la réalisation et de l'adoption du système métrique (Révolution Française).

Fractions et nombres décimaux à l'école

Le travail sur les fractions décimales et nombres décimaux s'effectue essentiellement au cours du cycle 3. Les élèves auront pu rencontrer des situations de fractionnement au cours du cycle 2 dans des contextes très particuliers : fractionnement d'une monnaie (centimes d'euros), apprentissage de la lecture de l'heure (deux heures et quart/moins le quart, quatre heures et demi).

Au cycle 3, on insiste sur la connaissance des fractions simples et le sens de la décomposition en dixièmes, centièmes, millièmes ; les correspondances entre les désignations écrite et orale des fractions décimales ainsi que la comparaison de nombres décimaux.

Prérequis nécessaires aux notions de fractions et nombres décimaux

Plusieurs étapes et constructions sont indispensables à la bonne représentation de ces notions :

- connaissance des tables de multiplication,
- décompositions additives,
- équivalences entre représentations,
- représentations variées : schémas, interprétations géométriques,
- utilisation dans la vie courante : moitié, tiers, quart ; situations de parité.

Sens des écritures

L'écriture à virgule prolonge naturellement l'écriture usuelle (décimale) des nombres. L'action de multiplication/division par 10 peut s'interpréter comme une action de décalage des chiffres relativement à la virgule (mais nécessité de mise au format pour ne pas "manquer de chiffres" !)

On peut attribuer plusieurs significations à une fraction :

- la fraction-partage de l'unité : c'est une fraction construite à partir d'une fraction égyptienne dans laquelle l'utilisation de la fraction fait référence à un certain nombre d'exemplaires (le numérateur) d'un partage d'unité (faisant référence au dénominateur). Par exemple, pour illustrer $\frac{5}{3}$, on va faire apparaître 5 objets qui chacun représentent $\frac{1}{3}$,
- la fraction-quotient : c'est la traduction la plus directe d'une situation de partage : $\frac{5}{3}$ représente une certaine quantité qui mise en commun trois fois avec elle-même correspond à la quantité 5.
- la fraction-opérateur : c'est une représentation contextualisée d'une situation de commensuration (longueur) ou de conversion (mesure) dans laquelle la fraction est perçue comme un opérateur permettant de passer d'une quantité à une autre, par exemple un coefficient de proportionnalité.

Représentations usuelles

- certaines formes géométriques : rectangles, disques, etc.
- bande graduée,
- tableau numérique prolongé.

Typologie des erreurs

On identifie une grande variété d'erreurs que les élèves peuvent commettre dans l'étude des nombres décimaux et des fractions :

- incompréhension de l'écriture des "nouveaux nombres" (écriture à virgule, fraction),
- perte de la perception usuelle des nombres (sortie du champ de la cardinalité),
- rapport de la fraction à l'unité (situation de partage),
- confusion avec les quantités employés dans la langue courante : deux kilos cinq cents, un mètre soixante, neuf heures (moins) vingt,
- conflit des types de divisions (division fractionnaire $\neq$ division euclidienne),
- perte de règles valables sur les entiers : on peut ordonner des nombres selon la taille de leurs écritures, multiplier une quantité l'agrandit, deux écritures différentes représentent deux nombres différents, un entier admet un successeur/prédécesseur, etc.