

Albert Giraud

Introduction aux tenseurs

Notes de cours

2014 - M1 GC - U L

Table des matières

1	Introduction	4
1.1	But de l'analyse tensorielle	4
1.2	Notations	4
1.3	Hypothèses	5
1.4	Convention d'Einstein	5
1.5	L'espace vectoriel euclidien	5
1.6	Produit tensoriel de deux espaces	6
1.7	Notion de produit tensoriel et de tenseur	6
1.8	Exemples	8
1.8.1	Produit tensoriel de deux vecteurs	8
1.8.2	Représentation matricielle du produit tensoriel de deux vecteurs	9
1.8.3	Représentation matricielle des tenseurs d'ordre 2	10
1.8.4	Exemples de construction de tenseurs d'ordre 4	10
2	Etude pratique des tenseurs	12
2.1	Introduction	12
2.2	Définitions et rappels	12
2.3	Transposition et inversion des tenseurs du second ordre	13
2.3.1	Transposition	13
2.3.2	Inversion	13
2.3.3	Tenseur du second ordre symétrique	13
2.3.4	Tenseur du second ordre anti-symétrique	13
2.3.5	Parties symétrique et anti-symétrique d'un tenseur du second ordre	14
2.4	Effet d'un changement de base sur les composantes des tenseurs	14
2.4.1	Application à un tenseur d'ordre un	16
2.4.2	Application à un tenseur d'ordre deux symétrique	16
2.5	Produits contractés	18
2.5.1	Produit contracté	18
2.5.2	Exemples	18
2.5.3	Produit doublement contracté	19
2.5.4	Exemples	19

2.5.5	Produit doublement doublement contracté	20
2.5.6	Exemple	20
2.6	Etude des tenseurs du second ordre symétriques	20
2.6.1	Parties sphérique et déviatorique d'un tenseur du second ordre symétrique .	20
2.6.2	Tenseurs projecteurs sphérique $\mathbb{J}$ et déviatorique $\mathbb{K}$	20
2.6.3	Invariants d'un tenseur du second ordre symétrique (application aux contraintes)	21
2.6.4	Dérivation des invariants des tenseurs du second ordre symétriques	22
2.6.5	Valeurs propres d'un tenseur du second ordre symétrique	23
3	Opérateurs différentiels	25
3.1	Coordonnées cartésiennes orthonormées	25
3.1.1	Construction à l'aide de l'opérateur nabla	26
4	Travaux Dirigés	28
4.1	Notations et définitions	28
4.2	Produits	29
4.2.1	Produits doublement contractés de tenseurs d'ordre 2 et 4	29
4.2.2	Produits doublement contractés de tenseurs d'ordre 4	29
4.2.3	Produits doublement-doublement contractés de tenseurs d'ordre 4	29
4.2.4	Produits contractés et produits tensoriels	30
4.3	Décomposition des tenseurs du second ordre symétriques en parties sphériques et déviatoriques	30
4.3.1	Résultats préliminaires	30
4.3.2	Application	30
4.3.3	Relation de comportement élastique linéaire isotrope	31
4.4	Invariants des tenseurs du second ordre symétriques	31
4.4.1	Invariants I_1, I_2, I_3	31
4.4.2	Invariants J_2 et J_3	32
4.4.3	Invariants D_2, D_3	32
4.5	Déterminants et analyse tensorielle	32
4.6	Effet d'un changement de base sur les composantes des tenseurs	33
4.6.1	Application aux tenseurs d'ordre un	33

Chapitre 1

Introduction

1.1 But de l'analyse tensorielle

Le but de l'analyse tensorielle est d'étudier les transformations de grandeurs physiques de différentes dimensions lors de changements de systèmes de référence. La première étape est l'analyse vectorielle : les physiciens ont compris la nécessité de distinguer une grandeur scalaire (masse, densité, énergie ...) d'une grandeur vectorielle (force vitesse, accélération ...).

- scalaire : défini par un seul nombre (' valeur absolue ') indépendant des changements d'échelle (invariant).
- vecteur : nécessite des connaissances plus étendues, la valeur absolue ne suffit pas : il faut définir r composantes dans un espace de dimension r .

Pour définir les efforts (ou tensions) à l'intérieur d'un solide il faut introduire des grandeurs nouvelles. Les tensions à l'intérieur d'un solide sont caractérisées par 6 grandeurs indépendantes, composantes d'une entité nommée ' tenseur ' par le physicien Voigt. D'une façon plus générale des tenseurs très différents ont été introduits en physique. On utilise en pratique dans les applications de l'ingénieur des tenseurs d'ordre inférieur ou égal à quatre. A titre d'exemple, la relation de comportement élastique linéaire, en mécanique des solides, nécessite l'introduction de tenseurs d'ordre 4, les tenseurs d'élasticité et/ou de souplesse, reliant linéairement deux tenseurs d'ordre 2 symétriques, les tenseurs des contraintes et de déformations.

Exemples de tenseurs

- Tenseur d'ordre 0 : scalaire (invariant par changement d'axes de références).
- Tenseur d'ordre 1 : vecteur polaire (espace de dimension r : représenté par r composantes)
- Tenseur d'ordre 2 : représenté dans un espace de dimension r par r^2 composantes (exemple 9 composantes dans un espace de dimension 3) Les tenseurs d'ordre 2 peuvent être représentés par des matrices mais des matrices ne sont pas nécessairement des tenseurs.

Cette présentation s'inspire très largement des références [1], [2].

On trouve des présentations des tenseurs en annexe de cours de mécanique des milieux continus, [3], [4], [5], [6], [7], mais également dans des livres spécifiques [8], [9].

1.2 Notations

Les tenseurs d'ordre n sont soulignés n fois. On applique systématiquement cette règle pour les tenseurs d'ordre 1, 2, 3, par contre les lettres majuscules 'barrées' ($\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$, ...) seront aussi utilisées pour représenter les tenseurs d'ordre 4. Les notions présentées sont générales mais on se limitera dans cette présentation, pour tous les exemples d'application, à des tenseurs de rangs inférieurs ou égaux à 4.

1.3 Hypothèses

L'analyse tensorielle est habituellement présentée dans le cadre général de systèmes de coordonnées non orthonormées. Cela conduit à introduire les notions de variance et covariance auxquelles sont associés les indices covariants (en position inférieure) et contravariants (en position supérieure). Dans le cas de systèmes de coordonnées orthonormées ces deux systèmes d'indices, que l'on ne détaillera pas, sont confondus et tous les indices sont placés en position inférieure.

Pour des raisons de simplicité, *on se limite dans ce document à l'étude des tenseurs euclidiens exprimés dans des bases orthonormées.*

Un espace vectoriel E est muni d'une structure euclidienne par la donnée d'une forme bilinéaire symétrique fondamentale définie positive sur $E \times E$ appelée produit scalaire (les tenseurs euclidiens sont définis sur un espace vectoriel euclidien).

Se reporter à [1], [8], [2] pour des présentations plus complètes et des notions plus générales qui dépassent le cadre d'applications physiques envisagé dans ce document.

1.4 Convention d'Einstein

DEFINITION 1.4.1 : Toutes les fois que dans un monôme figure deux fois le même indice on doit, sauf avis contraire, sommer tous les monômes obtenus en donnant à cet indice toutes les valeurs possibles. ■

Dans l'espace de la géométrie ordinaire, qui sera celui adopté, les indices répétés seront (sauf avis contraire) sommés de 1 à 3. Exemples

$$A_i^\alpha = \sum_{j=1}^{j=3} Q_{ij}^\alpha A_j \quad , \quad \text{s'écrit} \quad A_i^\alpha = Q_{ij}^\alpha A_j \quad (1.1)$$

$$A_{ij}^\alpha = \sum_{k=1}^{k=3} \sum_{l=1}^{l=3} Q_{ik}^\alpha Q_{jl}^\alpha A_{kl} \quad , \quad \text{s'écrit} \quad A_{ij}^\alpha = Q_{ik}^\alpha Q_{jl}^\alpha A_{kl} \quad (1.2)$$

1.5 L'espace vectoriel euclidien

Considérons l'espace vectoriel des vecteurs libres de la géométrie ordinaire.

DEFINITION 1.5.1 : *A tout couple $\underline{x}$ et $\underline{y}$ de vecteurs, la multiplication scalaire fait correspondre un nombre noté $\underline{x}.\underline{y}$ et appelé leur produit scalaire, la multiplication scalaire jouissant des propriétés suivantes :*

a. commutativité

$$\underline{x}.\underline{y} = \underline{y}.\underline{x} \quad (1.3)$$

b. associativité avec la multiplication par un scalaire

$$(\alpha \underline{x}).\underline{y} = \underline{x}.(\alpha \underline{y}) = \alpha(\underline{x}.\underline{y}) \quad (1.4)$$

c. distributivité par rapport à l'addition vectorielle

$$\underline{x}.(\underline{y} + \underline{z}) = \underline{x}.\underline{y} + \underline{x}.\underline{z} \quad (1.5)$$

d. Si $\underline{x}.\underline{y} = 0$ quelque soit $\underline{x}$, on a $\underline{y} = \underline{0}$

D'une manière générale considérons un espace vectoriel E_n sur le corps des nombres réels K , et supposons qu'il existe une loi de composition qui, à tout couple $\underline{x}$ et $\underline{y}$ de vecteurs, fasse correspondre un nombre réel $\underline{x}.\underline{y}$ jouissant des propriétés a, b, c et d. Nous conviendrons de dire que l'espace E_n est un espace vectoriel euclidien et que la loi de composition est la multiplication scalaire $\underline{x}.\underline{y}$ dans cet espace. ■

Des conditions a, b, c il résulte que le produit scalaire est une forme bilinéaire par rapport à ces vecteurs, c'est à dire une forme linéaire par rapport à chacun de ces vecteurs. De la condition de commutativité il résulte que cette forme bilinéaire est symétrique par rapport à chacun de ces vecteurs.

1.6 Produit tensoriel de deux espaces

DEFINITION 1.6.1 : Donnons nous deux espaces vectoriels E_n et F_p de dimensions respectives n et p définis sur un même corps K et associons leur un espace vectoriel à np dimensions que nous noterons $E_n \otimes F_p$. Si $\underline{x}$ et $\underline{y}$ appartiennent respectivement à E_n et F_p , nous allons faire correspondre au couple $(\underline{x}, \underline{y})$ un élément noté $\underline{x} \otimes \underline{y}$ de l'espace vectoriel $E_n \otimes F_p$, la loi de correspondance jouissant des propriétés suivantes :

a. Si $\underline{x}, \underline{x}_1, \underline{x}_2$, appartiennent à E_n , $\underline{y}, \underline{y}_1, \underline{y}_2$ appartiennent à F_p , on a les relations de distributivité par rapport aux additions vectorielles :

$$\underline{x} \otimes (\underline{y}_1 + \underline{y}_2) = \underline{x} \otimes \underline{y}_1 + \underline{x} \otimes \underline{y}_2 \quad (1.6)$$

$$(\underline{x}_1 + \underline{x}_2) \otimes \underline{y} = \underline{x}_1 \otimes \underline{y} + \underline{x}_2 \otimes \underline{y} \quad (1.7)$$

b. Si α est un scalaire arbitraire, on a la relation d'associativité de la multiplication par un scalaire :

$$\alpha \underline{x} \otimes \underline{y} = \underline{x} \otimes \alpha \underline{y} = \alpha (\underline{x} \otimes \underline{y}) \quad (1.8)$$

c. Si $(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n)$ et $(\underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots, \underline{y}_p)$ désignent deux bases quelconques de E_n et F_p , les np éléments $\underline{x}_i \otimes \underline{y}_j$ de $E_n \otimes F_p$ ($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, p$) constituent une base de ce dernier espace.

Lorsqu'il en est ainsi, nous dirons que l'espace vectoriel $E_n \otimes F_p$ (que l'on nomme E_n tensoriel F_p) est le produit tensoriel des espaces vectoriels E_n et F_p et que l'élément $\underline{x} \otimes \underline{y}$ (que l'on nomme $\underline{x}$ tensoriel $\underline{y}$) est le produit tensoriel de deux vecteurs $\underline{x}$ et $\underline{y}$. ■

1.7 Notion de produit tensoriel et de tenseur

DEFINITION 1.7.1 : Étant donné deux espaces vectoriels E_m et E_n de dimensions respectives m et n définis sur un même corps K . On appelle produit tensoriel du vecteur $\underline{X} \in E_m$ et du vecteur $\underline{Y} \in E_n$, l'élément noté $\underline{X} \otimes \underline{Y}$ vérifiant les trois axiomes suivants :

a. axiome de distributivité par rapport à l'addition vectorielle

$$\underline{X} \otimes (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2) = (\underline{X} \otimes \underline{Y}_1) + (\underline{X} \otimes \underline{Y}_2) \quad , \quad \underline{X} \in E_m \quad , \quad \underline{Y}_1, \underline{Y}_2 \in E_n \quad (1.9)$$

$$(\underline{X}_1 + \underline{X}_2) \otimes \underline{Y} = (\underline{X}_1 \otimes \underline{Y}) + (\underline{X}_2 \otimes \underline{Y}) \quad , \quad \underline{X}_1, \underline{X}_2 \in E_m \quad , \quad \underline{Y} \in E_n \quad (1.10)$$

b. axiome d'associativité de la multiplication par un scalaire

$$(\lambda \underline{x}) \otimes \underline{y} = \underline{x} \otimes (\lambda \underline{y}) = \lambda(\underline{x} \otimes \underline{y}) \quad , \quad \lambda \in K \quad , \quad \underline{X} \in E_m \quad , \quad \underline{Y} \in E_n \quad (1.11)$$

c. axiome de la base

$$\underline{e}_i (i = 1, 2, \dots, m) \quad \text{base de } E_m \quad (1.12)$$

$$\underline{f}_j (j = 1, 2, \dots, n) \quad \text{base de } E_n \quad (1.13)$$

$$\underline{e}_i \otimes \underline{f}_j \quad \text{est la base de l'espace de tous les éléments } \underline{X} \otimes \underline{Y} \quad (1.14)$$

où $\underline{X} \in E_m$ et $\underline{Y} \in E_n$

Cet espace $E_m \otimes E_n$ est appelé produit tensoriel des espaces E_m et E_n . La base $\underline{e}_i \otimes \underline{f}_j$ est constituée de $m \times n$ éléments, donc $\dim(E_m \otimes E_n) = m \times n$ ■

THEOREME 1.7.1 : Les espaces E_m , E_n et $E_m \otimes E_n$ étant rapportés à des bases données :

$$(\underline{e}_i) \quad , \quad (\underline{f}_j) \quad \text{et} \quad (\underline{e}_i \otimes \underline{f}_j) \quad (1.15)$$

le produit tensoriel des deux vecteurs $\underline{X} = x_i \underline{e}_i$ et $\underline{Y} = y_j \underline{f}_j$ s'écrit de manière unique :

$$(\underline{X} \otimes \underline{Y}) = x_i y_j (\underline{e}_i \otimes \underline{f}_j) \quad (1.16)$$

$x_i y_j$ sont appelées les composantes du produit tensoriel $(\underline{X} \otimes \underline{Y})$ dans la base $(\underline{e}_i \otimes \underline{f}_j)$. ■

La notion de produit tensoriel peut être étendue à un nombre fini d'espaces vectoriels E_m , E_n , E_p ... Il est alors facile de définir par récurrence le produit tensoriel de vecteurs $\underline{X} \in E_m$, $\underline{Y} \in E_n$, $\underline{Z} \in E_p$ etc ...

Pour abréger les notations, supposons que l'on ait affaire à trois espaces vectoriels, on a par définition :

$$E_m \otimes E_n \otimes E_p = (E_m \otimes E_n) \otimes E_p = E_m \otimes (E_n \otimes E_p) \quad (1.17)$$

$$\underline{X} \otimes \underline{Y} \otimes \underline{Z} = (\underline{X} \otimes \underline{Y}) \otimes \underline{Z} = \underline{X} \otimes (\underline{Y} \otimes \underline{Z}) \quad (1.18)$$

Soient $(\underline{e}_i)$, $(\underline{f}_j)$, $(\underline{g}_k)$, les bases de E_m , E_n , E_p

$$(\underline{e}_i) \quad , \quad (\underline{f}_j) \quad , \quad (\underline{g}_k) \quad \text{et} \quad (\underline{e}_i \otimes \underline{f}_j \otimes \underline{g}_k) \quad (1.19)$$

et soient $\underline{X} = x_i \underline{e}_i$, $\underline{Y} = y_j \underline{f}_j$, $\underline{Z} = z_k \underline{g}_k$

$$\underline{X} \otimes \underline{Y} \otimes \underline{Z} = x_i y_j z_k (\underline{e}_i \otimes \underline{f}_j \otimes \underline{g}_k) \quad (1.20)$$

$x_i y_j z_k$ sont appelées les composantes du produit tensoriel $(\underline{X} \otimes \underline{Y} \otimes \underline{Z})$ dans la base $(\underline{e}_i \otimes \underline{f}_j \otimes \underline{g}_k)$.

La multiplication tensorielle des éléments de plusieurs espaces vectoriels est associative.

La multiplication tensorielle n'est pas commutative.

Si p vecteurs $\underline{X}_i \in E_m$ sont linéairement indépendants ainsi que q vecteurs $\underline{Y}_j \in E_n$ alors les pq produits $\underline{X}_i \otimes \underline{Y}_j$ sont linéairement indépendants.

On peut définir un tenseur d'ordre p comme une somme de produits tensoriels de p vecteurs. Les tenseurs d'ordre p définis forment un espace vectoriel de dimension np .

L'addition tensorielle nécessite que les deux (ou les n) tenseurs additionnés soient de même type.

1.8 Exemples

Considérons l'espace vectoriel euclidien de la géométrie ordinaire E_3 (dimension $n = 3$) défini sur le corps des réels $K = \mathbb{R}$. On note $\underline{e}_i$ une base orthonormée de E_3 .

1.8.1 Produit tensoriel de deux vecteurs

Soient $\underline{a}, \underline{b} \in E_3$

$$\underline{a} = \sum_{i=1}^{i=3} a_i \underline{e}_i = a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 + a_3 \underline{e}_3 \quad (1.21)$$

$$\underline{b} = \sum_{j=1}^{j=3} b_j \underline{e}_j = b_1 \underline{e}_1 + b_2 \underline{e}_2 + b_3 \underline{e}_3 \quad (1.22)$$

que l'on notera (en adoptant la convention de sommation sur l'indice répété)

$$\underline{a} = a_i \underline{e}_i \quad , \quad \underline{b} = b_j \underline{e}_j \quad (1.23)$$

Formons le produit tensoriel des vecteurs $\underline{a}$ et $\underline{b}$

$$\underline{a} \otimes \underline{b} = (a_i \underline{e}_i) \otimes (b_j \underline{e}_j) \quad (1.24)$$

En utilisant les propriétés du produit tensoriel

$$\underline{a} \otimes \underline{b} = a_i b_j (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) = a_i b_j \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (1.25)$$

Le tenseur obtenu est un tenseur d'ordre 2, à $3^2 = 9$ composantes $a_i b_j$ et la base du nouvel espace est donnée par les $3^2 = 9$ $\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$.

Expression développée :

$$\underline{a} \otimes \underline{b} = a_i b_j \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \sum_{i=1}^{i=3} \sum_{j=1}^{j=3} a_i b_j \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (1.26)$$

soit, en décomposant les sommations, en commençant par l'indice i

$$\underline{a} \otimes \underline{b} = \sum_{j=1}^{j=3} a_1 b_j \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_j + a_2 b_j \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_j + a_3 b_j \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_j \quad (1.27)$$

en poursuivant par le second indice

$$\underline{a} \otimes \underline{b} = a_1 b_1 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + a_1 b_2 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + a_1 b_3 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 \quad (1.28)$$

$$+ a_2 b_1 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + a_2 b_2 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + a_2 b_3 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 \quad (1.29)$$

$$+ a_3 b_1 \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1 + a_3 b_2 \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2 + a_3 b_3 \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (1.30)$$

On peut illustrer la non commutativité du produit tensoriel

$$\underline{a} \otimes \underline{b} = a_i b_j \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad , \quad \underline{b} \otimes \underline{a} = b_i a_j \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (1.31)$$

$$\underline{a} \otimes \underline{b} \neq \underline{b} \otimes \underline{a} \quad \text{car} \quad a_i b_j \neq b_i a_j \quad (1.32)$$

Les composantes ij des deux tenseurs sont différentes si $i \neq j$. Si l'on développe le produit $\underline{b} \otimes \underline{a}$

$$\underline{b} \otimes \underline{a} = b_1 a_1 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + b_1 a_2 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + b_1 a_3 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 \quad (1.33)$$

$$+ b_2 a_1 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + b_2 a_2 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + b_2 a_3 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 \quad (1.34)$$

$$+ b_3 a_1 \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1 + b_3 a_2 \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2 + b_3 a_3 \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (1.35)$$

On note, en comparant avec $\underline{a} \otimes \underline{b}$, que seules les composantes *diagonales* ($i = j$) sont identiques.

1.8.2 Représentation matricielle du produit tensoriel de deux vecteurs

Les opérations précédentes peuvent être également menées par des produits matriciels équivalents. Les tenseurs d'ordre 1 peuvent être représentés par des matrices lignes ou colonnes

$$\underline{a} = a_i \underline{e}_i \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

Le produit tensoriel $\underline{a} \otimes \underline{b}$ peut être représenté par le produit matriciel

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

et inversement $\underline{b} \otimes \underline{a}$ peut être représenté par le produit matriciel

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & b_1 a_3 \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & b_2 a_3 \\ b_3 a_1 & b_3 a_2 & b_3 a_3 \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

Les tenseurs d'ordre 2 obtenus sont représentés par des matrices carrées de format $[3, 3]$.

1.8.3 Représentation matricielle des tenseurs d'ordre 2

Soit le tenseur d'ordre 2 $\underline{\underline{c}}$ de composantes c_{ij}

$$\underline{\underline{c}} = c_{ij}\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = c_{11}\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + c_{12}\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + c_{13}\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 \quad (1.39)$$

$$+ c_{21}\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 + c_{22}\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + c_{23}\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3 \quad (1.40)$$

$$+ c_{31}\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1 + c_{32}\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2 + c_{33}\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (1.41)$$

Sa représentation matricielle est une **matrice** carrée [3, 3] de **composantes** c_{ij} où i **représente le numéro de ligne et j le numéro de colonne**

$$\underline{\underline{c}} = c_{ij}\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

Pour reprendre l'exemple précédent, les tenseurs d'ordre 2 peuvent être construits par produits tensoriels de 2 tenseurs d'ordre 1. Dans ce cas particulier

$$\underline{\underline{c}} = c_{ij}\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \underline{a} \otimes \underline{b} = a_ib_j\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (1.43)$$

et on identifie les composantes c_{ij} du tenseur d'ordre 2 obtenu en fonction des composantes des tenseurs d'ordre 1 $\underline{a}$ et $\underline{b}$

$$c_{ij} = a_ib_j \quad (1.44)$$

1.8.4 Exemples de construction de tenseurs d'ordre 4

On peut construire des tenseurs d'ordre 4 de différentes façons, par exemple par produits tensoriels de tenseurs d'ordre 1

$$\underline{\underline{\underline{e}}} = \underline{a} \otimes \underline{b} \otimes \underline{c} \otimes \underline{d} = a_ib_jc_kd_l\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \quad (1.45)$$

où la composante e_{ijkl} du tenseur d'ordre 4 $\underline{\underline{\underline{e}}}$ s'identifie à

$$e_{ijkl} = a_ib_jc_kd_l \quad (1.46)$$

Un tenseur d'ordre 4 quelconque défini sur un espace vectoriel de dimension 3 a $3^4 = 81$ composantes dans le cas général.

Second exemple, produit tensoriel d'un tenseur d'ordre 3 et d'un tenseur d'ordre 1

$$\underline{\underline{\underline{c}}} = \underline{\underline{\underline{a}}} \otimes \underline{b} = a_{ijk}b_l\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \quad (1.47)$$

où la composante c_{ijkl} du tenseur d'ordre 4 $\underline{\underline{\underline{c}}}$ obtenu s'identifie à

$$c_{ijkl} = a_{ijk}b_l \quad (1.48)$$

De même $3^4 = 3^3 \times 3 = 81$ composantes.

Troisième exemple, construction de tenseurs d'ordre 4 par produits tensoriels de tenseurs d'ordre 2

$$\underline{\underline{\underline{c}}} = \underline{\underline{a}} \otimes \underline{\underline{b}} = a_{ij}b_{kl}\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \quad (1.49)$$

où la composante c_{ijkl} du tenseur d'ordre 4 $\underline{\underline{c}}$ obtenu s'identifie à

$$c_{ijkl} = a_{ij}b_{kl} \quad (1.50)$$

De même $3^4 = 3^2 \times 3^2 = 81$ composantes.

Chapitre 2

Etude pratique des tenseurs

2.1 Introduction

La présentation de ce chapitre est basée sur les références

- [10] : un livre de référence sur l'élastoplasticité et les comportements non linéaires des matériaux solides
- [11] : on a repris en particulier le Chapitre 5, tome 2, intitulé *Rappels de calcul tensoriel et d'élasticité*, rédigé par Pierre Suquet et Michel Bornert
- [7], [12] : notamment pour les applications à la micromécanique
- [13] : ouvrage complet sur le comportement mécanique des matériaux solides
- [14] : cours complet et remarquablement bien illustré et **en libre accès** (site : mms2.ensmp.fr, voir le dossier MMC))

2.2 Définitions et rappels

Les symboles barrés $\mathbb{A}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ représentent des tenseurs d'ordre quatre, les symboles soulignés deux fois $\underline{\underline{e}}$, $\underline{\underline{\sigma}}$, $\underline{\underline{i}}$ représentent des tenseurs d'ordre deux, les symboles soulignés une fois $\underline{z}$, $\underline{x}$ représentent les tenseurs d'ordre un. La convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés est systématiquement adoptée (une indication sera faite dans le cas contraire).

$\otimes$, $.$, $:$ and $::$ représentent respectivement le produit tensoriel, les produits contractés sur un indice, deux indices et quatre indices.

$\underline{\underline{i}}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{J}$ and $\mathbb{K}$ représentent le tenseur identité du second ordre, le tenseur identité des tenseur d'ordre quatre symétriques, et les projecteurs sphériques et déviatoriques des tenseurs d'ordre quatre symétriques. δ_{ij} représente le symbole de Kronecker, ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ sinon)

$$\underline{a} \otimes \underline{b} = a_i b_j \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (2.1)$$

$$\underline{\underline{a}} \otimes \underline{\underline{b}} = a_{ij} b_{kl} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \quad (2.2)$$

$$\underline{\underline{a}} : \underline{\underline{b}} = a_{ij} b_{ji} \quad (2.3)$$

$$\underline{\underline{a}} \otimes \underline{\underline{b}} = \frac{1}{2} (a_{ik} b_{jl} + a_{il} b_{jk}) \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \quad (2.4)$$

$$\mathbb{A} : \mathbb{B} = A_{ijkl} B_{lmn} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_n \quad , \quad \mathbb{A} :: \mathbb{B} = A_{ijkl} B_{lkji} \quad (2.5)$$

$$\underline{\underline{i}} = \delta_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (2.6)$$

$$\mathbb{I} = \underline{\underline{i}} \otimes \underline{\underline{i}} \quad , \quad I_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.7)$$

$$\mathbb{J} = \frac{1}{3} \underline{\underline{i}} \otimes \underline{\underline{i}} \quad , \quad J_{ijkl} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (2.8)$$

2.3 Transposition et inversion des tenseurs du second ordre

2.3.1 Transposition

DEFINITION 2.3.1 : Soit un tenseur du second ordre $\underline{\underline{a}}$ de composantes a_{ij} . Son tenseur transposé, noté ${}^t\underline{\underline{a}}$ est tel que

$$({}^t\underline{\underline{a}})_{ij} = a_{ji} \quad (2.9)$$

■

A titre d'exemple, le tenseur transposé de

$$\underline{\underline{c}} = \underline{\underline{a}} \otimes \underline{\underline{b}} = a_i b_j \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (2.10)$$

est

$${}^t\underline{\underline{c}} = \underline{\underline{b}} \otimes \underline{\underline{a}} = a_j b_i \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (2.11)$$

2.3.2 Inversion

DEFINITION 2.3.2 : Soit un tenseur du second ordre $\underline{\underline{a}}$ de composantes a_{ij} . Son tenseur inverse, noté $\underline{\underline{a}}^{-1}$ est tel que

$$\underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{a}}^{-1} = \underline{\underline{a}}^{-1} \cdot \underline{\underline{a}} = \underline{\underline{i}} \quad (2.12)$$

■

où $\underline{\underline{i}}$ est le tenseur identité du second ordre ($i_{ij} = \delta_{ij}$).

2.3.3 Tenseur du second ordre symétrique

DEFINITION 2.3.3 : Un tenseur du second ordre $\underline{\underline{a}}$ de composantes a_{ij} est symétrique s'il est égal à son tenseur transposé

$$\underline{\underline{a}} = {}^t\underline{\underline{a}} \quad , \quad a_{ji} = a_{ij} \quad (2.13)$$

■

Les tenseurs du second ordre symétriques définis sur un espace vectoriel de dimension 3, ont, dans le cas général, 6 composantes indépendantes et peuvent être représentés par des matrices $[3, 3]$ symétriques.

2.3.4 Tenseur du second ordre anti-symétrique

DEFINITION 2.3.4 : Un tenseur du second ordre $\underline{\underline{a}}$ de composantes a_{ij} est anti-symétrique s'il est égal à l'opposé de son tenseur transposé

$$\underline{\underline{a}} = -{}^t\underline{\underline{a}} \quad , \quad a_{ji} = -a_{ij} \quad (2.14)$$

■

Les composantes diagonales des tenseurs anti-symétriques sont nulles.

$$a_{ij} = 0 \quad , \quad s \quad i = j \quad (2.15)$$

Les tenseurs du second ordre anti-symétriques définis sur un espace vectoriel de dimension 3, ont, dans le cas général, 3 composantes indépendantes et peuvent être représentés par des matrices $[3, 3]$ antisymétriques.

2.3.5 Parties symétrique et anti-symétrique d'un tenseur du second ordre

La partie symétrique d'un tenseur $\underline{\underline{a}}$ du second ordre est définie par

$$\underline{\underline{a}}^s = \frac{1}{2}(\underline{\underline{a}} + {}^t \underline{\underline{a}}) \quad , \quad a_{ij}^s = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) \quad (2.16)$$

Le tenseur des déformations linéarisé (tenseur d'ordre 2), en mécanique des milieux continus, est la partie symétrique du tenseur gradient (tenseur d'ordre 2) du vecteur déplacement (tenseur d'ordre 1).

La partie anti-symétrique d'un tenseur $\underline{\underline{a}}$ du second ordre est définie par

$$\underline{\underline{a}}^a = \frac{1}{2}(\underline{\underline{a}} - {}^t \underline{\underline{a}}) \quad , \quad a_{ij}^a = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}) \quad (2.17)$$

DEFINITION 2.3.5 : *Un tenseur du second ordre $\underline{\underline{a}}$ de composantes a_{ij} est symétrique s'il est égal à son tenseur transposé*

$$\underline{\underline{a}} = {}^t \underline{\underline{a}} \quad , \quad a_{ji} = a_{ij} \quad (2.18)$$

■

Les tenseurs du second ordre symétriques définis sur un espace vectoriel de dimension 3, ont, dans le cas général, 6 composantes indépendantes et peuvent être représentés par des matrices $[3, 3]$ symétriques.

2.4 Effet d'un changement de base sur les composantes des tenseurs

Soit une transformation de coordonnées, représentée par une matrice $\underline{\underline{Q}}^\alpha$ de composantes Q_{ij}^α , entre un système de coordonnées cartésienne orthonormées fixe (z_1, z_2, z_3) , ou global, et un système de coordonnées α $(z_1^\alpha, z_2^\alpha, z_3^\alpha)$. Le vecteur unitaire dans la direction z_i^α est noté $\underline{\underline{e}}_i^\alpha$

$$\underline{\underline{e}}_i^\alpha = Q_{ij}^\alpha \underline{\underline{e}}_j \quad , (j, i = 1, 2, 3) \quad , \quad \underline{\underline{e}}_k = R_{kl}^\alpha \underline{\underline{e}}_l^\alpha \quad , (k, l = 1, 2, 3) \quad (2.19)$$

On note $\underline{\underline{Q}}^\alpha$ la matrice de transformation entre les bases $\underline{\underline{e}}_j$ et $\underline{\underline{e}}_i^\alpha$, et $\underline{\underline{R}}^\alpha$ sa matrice inverse.

Les bases étant orthonormées, les matrices $\underline{\underline{Q}}^\alpha$ et $\underline{\underline{R}}^\alpha$ sont orthogonales

$$\underline{\underline{R}}^\alpha = (\underline{\underline{Q}}^\alpha)^{-1} = {}^T (\underline{\underline{Q}}^\alpha) \quad (2.20)$$

La matrice transposée ${}^T(\underline{\underline{Q}}^\alpha)$ d'une matrice carrée $\underline{\underline{Q}}^\alpha$ est telle que ${}^T(\underline{\underline{Q}}^\alpha)_{ij} = (\underline{\underline{Q}}^\alpha)_{ji}$. On en déduit, dans le cas considéré

$$R_{kl}^\alpha = Q_{lk}^\alpha \quad (2.21)$$

Les formules de changement de base sur les composantes d'un tenseur d'ordre un $\underline{A}$ s'écrivent

$$\underline{A} = A_k \underline{e}_k = A_i^\alpha \underline{e}_i^\alpha \quad (2.22)$$

$$\boxed{A_i^\alpha = Q_{ij}^\alpha A_j \quad , \quad A_i = Q_{ji}^\alpha A_j^\alpha} \quad (2.23)$$

Changement de base sur les composantes de tenseurs d'ordre 1 : 1 fois en produit la matrice de rotation

Les formules de changement de base sur les composantes d'un tenseur du second ordre $\underline{\underline{A}}$ s'écrivent

$$\underline{\underline{A}} = A_{kl} \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l = A_{ij}^\alpha \underline{e}_i^\alpha \otimes \underline{e}_j^\alpha \quad (2.24)$$

$$\boxed{A_{ij}^\alpha = Q_{ik}^\alpha Q_{jl}^\alpha A_{kl} \quad , \quad A_{ij} = Q_{ki}^\alpha Q_{lj}^\alpha A_{kl}^\alpha} \quad (2.25)$$

Changement de base sur les composantes de tenseurs d'ordre 2 : 2 fois en produit la matrice de rotation

Les formules de changement de base sur les composantes d'un tenseur d'ordre quatre $\mathbb{A}$ s'écrivent

$$\mathbb{A} = A_{pqrs} \underline{e}_p \otimes \underline{e}_q \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_s = A_{ijkl}^\alpha \underline{e}_i^\alpha \otimes \underline{e}_j^\alpha \otimes \underline{e}_k^\alpha \otimes \underline{e}_l^\alpha \quad (2.26)$$

$$\boxed{A_{ijkl}^\alpha = Q_{ip}^\alpha Q_{jq}^\alpha Q_{kr}^\alpha Q_{ls}^\alpha A_{pqrs} \quad , \quad A_{ijkl} = Q_{pi}^\alpha Q_{qj}^\alpha Q_{rk}^\alpha Q_{sl}^\alpha A_{pqrs}^\alpha} \quad (2.27)$$

Changement de base sur les composantes de tenseurs d'ordre 4 : 4 fois en produit la matrice de rotation

et donc plus généralement

Changement de base sur les composantes de tenseurs d'ordre n : n fois en produit la matrice de rotation

Les formules encadrées sont essentielles car elles permettent de déterminer l'ordre des tenseurs dont on suit les variations de composantes lors de changement de systèmes de coordonnées. Elles ont été vérifiées expérimentalement, et c'est justement la caractérisation expérimentale de ce type de relation qui a, historiquement, conduit les physiciens à introduire les notions de tenseurs et définir ensuite leur cadre mathématique.

A titre d'illustration prenons le cas d'un matériau anisotrope, c.a.d. un matériau dont le comportement dépend de l'orientation et peut être différent suivant les directions de chargement ou sollicitation. Si l'on détermine expérimentalement sur ce matériau, la conductivité thermique d'une part, et le module d'élasticité (par exemple défini comme le rapport entre contrainte axiale et déformation axiale dans un essai de compression simple) d'autre part, dans différentes directions, on vérifie que la conductivité thermique satisfait la relation (4.60) et le module d'élasticité la relation (4.62).

Cela indique que la conductivité thermique mesurée est une composante d'un tenseur d'ordre 2, et le module d'élasticité la composante d'un être mathématique différent, un tenseur d'ordre 4.

Les formules de changement de base (4.55) et (4.56) donnent

$$\underline{z} = z_i \underline{e}_i^\alpha = z_i R_{ij}^\alpha \underline{e}_j^\alpha = Q_{ji}^\alpha z_j \underline{e}_j^\alpha = z_j^\alpha \underline{e}_j^\alpha \quad , \quad z_i^\alpha = Q_{ij}^\alpha z_j \quad (2.28)$$

Comme la **matrice de rotation** $\underline{\underline{Q}}^\alpha$, est **orthogonale**, les **formules de changement de base** entre les **vecteurs** de base (relation 4.55) et les **coordonnées** des vecteurs (relation 2.28) sont **identiques**

$$\underline{e}_i^\alpha = Q_{ij}^\alpha \underline{e}_j \quad , \quad z_i^\alpha = Q_{ij}^\alpha z_j \quad (2.29)$$

Attention : dans le cas de matrices de rotation **non orthogonales** $\left(\underline{\underline{Q}}^\alpha\right)^{-1} = \underline{\underline{R}}^\alpha \neq {}^t\underline{\underline{Q}}^\alpha$, les formules de changement de base entre les vecteurs de base (relation 4.55) et les coordonnées de vecteur (relation 2.28) sont **contraires** ou inverses : les composantes des vecteurs sont dites **contravariantes**.

2.4.1 Application à un tenseur d'ordre un

Soit la matrice de rotation $\underline{\underline{Q}}^\alpha$ représentant une rotation d'angle α autour de l'axe z_1 , α représentant l'angle entre les axes z_3 et z_3^α

$$\begin{aligned} \underline{e}_1^\alpha &= \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2^\alpha &= \cos(\alpha) \underline{e}_2 - \sin(\alpha) \underline{e}_3 \\ \underline{e}_3^\alpha &= \sin(\alpha) \underline{e}_2 + \cos(\alpha) \underline{e}_3 \end{aligned} \quad (2.30)$$

D'après la relation (4.55), la matrice $\underline{\underline{Q}}^\alpha$ a pour composantes non nulles

$$Q_{11}^\alpha = 1, \quad Q_{22}^\alpha = Q_{33}^\alpha = \cos(\alpha), \quad Q_{23}^\alpha = -Q_{32}^\alpha = -\sin(\alpha) \quad (2.31)$$

Soit le vecteur $\underline{A}$ de composantes A_i dans le repère fixe $\underline{e}_i$. En prenant en compte (2.31), les relations de changement de base (4.58) permettent d'exprimer les coordonnées A_i^α dans le repère incliné $\underline{e}_i^\alpha$

$$A_1^\alpha = Q_{1j}^\alpha A_j = Q_{11}^\alpha A_1 = A_1 \quad (2.32)$$

$$A_2^\alpha = Q_{2j}^\alpha A_j = Q_{22}^\alpha A_2 + Q_{23}^\alpha A_3 = \cos(\alpha) A_2 - \sin(\alpha) A_3 \quad (2.33)$$

$$A_3^\alpha = Q_{3j}^\alpha A_j = Q_{32}^\alpha A_2 + Q_{33}^\alpha A_3 = \sin(\alpha) A_2 + \cos(\alpha) A_3 \quad (2.34)$$

soit les résultats

$$A_1^\alpha = A_1 \quad , \quad A_2^\alpha = \cos(\alpha) A_2 - \sin(\alpha) A_3 \quad , \quad A_3^\alpha = \sin(\alpha) A_2 + \cos(\alpha) A_3 \quad (2.35)$$

Dans ce cas particulier de rotation définie par un angle α seul, la règle 1 **fois en produit la matrice de rotation** sur les composantes d'un tenseur d'ordre 1 se traduit (au signe près) par des coefficients $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$

2.4.2 Application à un tenseur d'ordre deux symétrique

Pour les applications aux problèmes courants rencontrés en physique, on se restreint aux tenseurs d'ordre 2 symétriques ($A_{ji} = A_{ij}$) à 6 composantes indépendantes dans l'espace de dimension

3. Soit le tenseur d'ordre 2 $\underline{\underline{A}}$ symétrique de composantes A_{ij} dans le repère fixe $\underline{e}_i$. En prenant en compte (2.31), les relations de changement de base (4.60) permettent d'exprimer les coordonnées A_{ij}^α dans le repère incliné $\underline{e}_i^\alpha$. Développons ces relations pour les 6 composantes A_{ij}^α , en n'écrivant que les termes non nuls

$$A_{11}^\alpha = Q_{1k}^\alpha Q_{1l}^\alpha A_{kl} = Q_{11}^\alpha Q_{11}^\alpha A_{11} = A_{11} \quad (2.36)$$

$$A_{12}^\alpha = Q_{1k}^\alpha Q_{2l}^\alpha A_{kl} = Q_{11}^\alpha Q_{22}^\alpha A_{12} + Q_{11}^\alpha Q_{23}^\alpha A_{13} = \cos(\alpha)A_{12} - \sin(\alpha)A_{13} \quad (2.37)$$

$$A_{13}^\alpha = Q_{1k}^\alpha Q_{3l}^\alpha A_{kl} = Q_{11}^\alpha Q_{32}^\alpha A_{12} + Q_{11}^\alpha Q_{33}^\alpha A_{13} = \sin(\alpha)A_{12} + \cos(\alpha)A_{13} \quad (2.38)$$

$$A_{22}^\alpha = Q_{2k}^\alpha Q_{2l}^\alpha A_{kl} = Q_{22}^\alpha Q_{22}^\alpha A_{22} + Q_{22}^\alpha Q_{23}^\alpha A_{23} + Q_{23}^\alpha Q_{22}^\alpha A_{32} + Q_{23}^\alpha Q_{23}^\alpha A_{33} \quad (2.39)$$

On développe en prenant en compte la symétrie du tenseur $\underline{\underline{A}}$ (on remplace A_{32} par A_{23}) pour obtenir

$$A_{22}^\alpha = \cos^2(\alpha)A_{22} - 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)A_{23} + \sin^2(\alpha)A_{33} \quad (2.40)$$

Dans ce cas particulier de rotation définie par un angle α seul, la règle **2 fois en produit la matrice de rotation** sur les composantes d'un tenseur d'ordre 2 se traduit (au signe près) par des coefficients du type $\cos^p(\alpha)\sin^q(\alpha)$, avec $p+q \leq 2$. On utilise souvent, pour les tenseurs d'ordre 2, les formules dites en *angle double*

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2} \quad , \quad \sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2} \quad , \quad 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \sin(2\alpha) \quad (2.41)$$

d'où

$$A_{22}^\alpha = \frac{A_{22} + A_{33}}{2} + \cos(2\alpha)\frac{A_{22} - A_{33}}{2} - \sin(2\alpha)A_{23} \quad (2.42)$$

On calcule de même A_{23}^α et A_{33}^α

$$A_{23}^\alpha = Q_{2k}^\alpha Q_{3l}^\alpha A_{kl} = Q_{22}^\alpha Q_{32}^\alpha A_{22} + Q_{22}^\alpha Q_{33}^\alpha A_{23} + Q_{23}^\alpha Q_{32}^\alpha A_{32} + Q_{23}^\alpha Q_{33}^\alpha A_{33} \quad (2.43)$$

$$A_{23}^\alpha = \sin(\alpha)\cos(\alpha)(A_{22} - A_{33}) + (\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha))A_{23} \quad (2.44)$$

que l'on peut exprimer sous la forme

$$A_{23}^\alpha = \sin(2\alpha)\frac{A_{22} - A_{33}}{2} + \cos(2\alpha)A_{23} \quad (2.45)$$

et

$$A_{33}^\alpha = Q_{3k}^\alpha Q_{3l}^\alpha A_{kl} = Q_{32}^\alpha Q_{32}^\alpha A_{22} + Q_{32}^\alpha Q_{33}^\alpha A_{23} + Q_{33}^\alpha Q_{32}^\alpha A_{32} + Q_{33}^\alpha Q_{33}^\alpha A_{33} \quad (2.46)$$

$$A_{33}^\alpha = \sin^2(\alpha)A_{22} + 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)A_{23} + \cos^2(\alpha)A_{33} \quad (2.47)$$

que l'on peut exprimer sous la forme

$$A_{33}^\alpha = \frac{A_{22} + A_{33}}{2} - \cos(2\alpha)\frac{A_{22} - A_{33}}{2} + \sin(2\alpha)A_{23} \quad (2.48)$$

On ne mènera pas les calculs ici mais, dans le cas de composantes de tenseurs d'ordre 4, la règle **4 fois en produit la matrice de rotation** se traduirait (au signe près) par des coefficients du type $\cos^p(\alpha)\sin^q(\alpha)$, avec $p + q \leq 4$.

2.5 Produits contractés

2.5.1 Produit contracté

DEFINITION 2.5.1 : *Le produit contracté (ou simplement contracté) de deux tenseurs consiste à évaluer le dernier indice du premier tenseur et le premier indice du second tenseur, et à les sommer sur toutes les valeurs possibles de cet indice (devenu répété).* ■

Le produit contracté de deux tenseurs d'ordre 1 est le produit scalaire. Le produit contracté de tenseurs d'ordre 1 et 2 se représente par des produits matriciels.

2.5.2 Exemples

Produit contracté de deux tenseurs d'ordre 1

$$\underline{a}.\underline{b} = a_i \underline{e}_i . b_j \underline{e}_j = a_i b_j (\underline{e}_i . \underline{e}_j) \quad (2.49)$$

On rappelle que la base $\underline{e}_i$ est orthonormée

$$\underline{e}_i . \underline{e}_j = \delta_{ij} \quad , \quad \delta_{ij} = 1 \quad \text{si} \quad i = j \quad , \quad \delta_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \quad (2.50)$$

d'où

$$\underline{a}.\underline{b} = a_i b_j \delta_{ij} \quad (2.51)$$

soit

$$\underline{a}.\underline{b} = a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (2.52)$$

Le tenseur obtenu est un tenseur d'ordre 0, un scalaire.

Produit contracté de deux tenseurs d'ordre 2

$$\underline{\underline{a}}.\underline{\underline{b}} = a_{ij} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) . b_{kl} (\underline{e}_k \otimes \underline{e}_l) = a_{ij} b_{kl} (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_l) (\underline{e}_j . \underline{e}_k) \quad (2.53)$$

$$\underline{e}_j . \underline{e}_k = \delta_{jk} \quad (2.54)$$

d'où

$$\underline{\underline{a}}.\underline{\underline{b}} = a_{ij} b_{jl} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_l \quad (2.55)$$

Le tenseur obtenu est un tenseur d'ordre 2, $\underline{\underline{c}} = \underline{\underline{a}}.\underline{\underline{b}}$, de composantes $c_{il} = a_{ij} b_{jl}$.

DEFINITION 2.5.2 : *L'ordre d'un tenseur est égal au nombre d'indices non répétés de ses composantes.* ■

Produit contracté d'un tenseur d'ordre 2 et d'un tenseur d'ordre 1

$$\underline{\underline{a}}.\underline{b} = a_{ij}(\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j).\underline{b}_k\underline{e}_k = a_{ij}\underline{b}_k\underline{e}_i(\underline{e}_j.\underline{e}_k) = a_{ij}\underline{b}_k\underline{e}_i\delta_{jk} \quad (2.56)$$

d'où

$$\underline{\underline{a}}.\underline{b} = a_{ij}\underline{b}_j\underline{e}_i \quad (2.57)$$

Le tenseur obtenu est un tenseur d'ordre 1, $\underline{c} = \underline{\underline{a}}.\underline{b}$, de composantes $c_i = a_{ij}b_j$.

Produit contracté d'un tenseur d'ordre 1 et d'un tenseur d'ordre 2

$$\underline{b}.\underline{\underline{a}} = b_i\underline{e}_i.a_{jk}(\underline{e}_j \otimes \underline{e}_k) = b_i a_{jk}(\underline{e}_i.\underline{e}_j)\underline{e}_k = b_i a_{jk}\delta_{ij}\underline{e}_k \quad (2.58)$$

d'où

$$\underline{b}.\underline{\underline{a}} = b_i a_{ik}\underline{e}_k \quad (2.59)$$

que l'on peut aussi écrire

$$\underline{b}.\underline{\underline{a}} = a_{ji}b_j\underline{e}_i \quad (2.60)$$

Le tenseur obtenu est un tenseur d'ordre 1, $\underline{c} = \underline{b}.\underline{\underline{a}}$, de composantes $c_i = a_{ji}b_j$.

On note que

$$\underline{\underline{a}}.\underline{b} = \underline{b}.\underline{\underline{a}} \quad \text{si et seulement si} \quad a_{ji} = a_{ij} \quad (\underline{\underline{a}} \text{ symétrique}) \quad (2.61)$$

Produit contracté d'un tenseur d'ordre 1 et d'un tenseur d'ordre 3

$$\underline{b}.\underline{\underline{\underline{a}}}} = b_i\underline{e}_i.a_{jkl}(\underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l) = b_i a_{ikl}\underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \quad (2.62)$$

que l'on peut aussi écrire

$$\underline{b}.\underline{\underline{\underline{a}}}} = a_{kij}b_k\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (2.63)$$

Le tenseur obtenu est un tenseur d'ordre 2, $\underline{c} = \underline{b}.\underline{\underline{\underline{a}}}}$, de composantes $c_{ij} = a_{kij}b_k$.

Par la suite, on ne détaillera plus les calculs, le résultat de la contraction peut être directement écrit sur les composantes.

2.5.3 Produit doublement contracté

DEFINITION 2.5.3 : *Le produit doublement contracté de deux tenseurs consiste à évaluer*

- *le dernier indice du premier tenseur et le premier indice du second tenseur*
 - *l'avant dernier indice du premier tenseur et le second indice du second tenseur*
- à les sommer sur toutes les valeurs possibles de ces indices (devenu répétés). ■*

Le produit doublement contracté de deux tenseurs d'ordre 2 est un tenseur d'ordre 0 (un scalaire).

2.5.4 Exemples

Produit doublement contracté de deux tenseurs d'ordre 2

$$\underline{\underline{a}} : \underline{\underline{b}} = a_{ij}b_{ji} \quad (2.64)$$

Le tenseur obtenu est un tenseur d'ordre 0.

Produit doublement contracté d'un tenseur d'ordre 4 et d'un tenseur d'ordre 2

$$\underline{\underline{a}} : \underline{\underline{b}} = a_{ijkl} b_{lk} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (2.65)$$

Le tenseur obtenu est un tenseur d'ordre 2.

Produit doublement contracté de deux tenseurs d'ordre 4

$$\underline{\underline{a}} : \underline{\underline{b}} = a_{ijkl} b_{lkop} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_o \otimes \underline{e}_p \quad (2.66)$$

Le tenseur obtenu est un tenseur d'ordre 4 (de composantes $c_{ijop} = a_{ijkl} b_{lkop}$).

2.5.5 Produit doublement doublement contracté

DEFINITION 2.5.4 : *Le produit doublement doublement contracté de deux tenseurs (contraction sur 4 indices) consiste à évaluer respectivement les quatre dernier indices du premier tenseur avec les quatre premiers indices du second tenseur, à les sommer sur toutes les valeurs possibles de ces indices (devenu répétés).* ■

Le produit doublement doublement contracté de deux tenseurs d'ordre 4 est un tenseur d'ordre 0 (un scalaire).

2.5.6 Exemple

Produit doublement doublement contracté de deux tenseurs d'ordre 4

$$\underline{\underline{a}} :: \underline{\underline{b}} = a_{ijkl} b_{lkji} \quad (2.67)$$

2.6 Etude des tenseurs du second ordre symétriques

2.6.1 Parties sphérique et déviatorique d'un tenseur du second ordre symétrique

Soit le tenseur du second ordre symétrique $\underline{\underline{\alpha}}$. Sa partie sphérique $\underline{\underline{\alpha}}^{sph}$ est définie par

$$\underline{\underline{\alpha}}^{sph} = \alpha_m \underline{\underline{i}} \quad , \quad \alpha_m = \frac{1}{3} Tr(\underline{\underline{\alpha}}) = \frac{1}{3} \alpha_{kk} \quad (2.68)$$

et sa partie déviatorique (ou déviatoire) $\underline{\underline{\alpha}}^{dev}$ par

$$\underline{\underline{\alpha}}^{dev} = \underline{\underline{\alpha}} - \underline{\underline{\alpha}}^{sph} \quad , \quad \alpha_{ij}^{dev} = \alpha_{ij} - \frac{1}{3} \alpha_{kk} \delta_{ij} \quad (2.69)$$

La partie déviatorique est par définition à trace nulle

$$Tr(\underline{\underline{\alpha}}^{dev}) = 0 \quad (2.70)$$

2.6.2 Tenseurs projecteurs sphérique $\mathbb{J}$ et déviatorique $\mathbb{K}$

Les parties sphérique et déviatorique d'un tenseur du second ordre symétrique $\underline{\underline{\alpha}}$ peuvent être obtenues à l'aide des tenseurs d'ordre 4 $\mathbb{J}$ and $\mathbb{K}$, dits *tenseurs projecteurs sphérique et déviatorique*

des tenseurs d'ordre 2 symétriques

$$\underline{\underline{\alpha}}^{sph} = \alpha_m \underline{\underline{i}} = \mathbb{J} : \underline{\underline{\alpha}} \quad (2.71)$$

$$\underline{\underline{\alpha}}^{dev} = \mathbb{K} : \underline{\underline{\alpha}} \quad (2.72)$$

A titre d'exemple, la décomposition usuelle du tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_m \underline{\underline{i}} + \underline{\underline{s}} \quad , \quad \sigma_m \underline{\underline{i}} = \mathbb{J} : \underline{\underline{\sigma}} \quad , \quad \underline{\underline{s}} = \mathbb{K} : \underline{\underline{\sigma}} \quad (2.73)$$

σ_m est la contrainte moyenne et $\underline{\underline{s}}$ le tenseur déviateur des contraintes.

Dans le cas du tenseur des déformations linéarisé $\underline{\underline{\varepsilon}}$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon_v}{3} \underline{\underline{i}} + \underline{\underline{e}} \quad , \quad \frac{\varepsilon_v}{3} \underline{\underline{i}} = \mathbb{J} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad , \quad \underline{\underline{e}} = \mathbb{K} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (2.74)$$

ε_v est la déformation volumique linéarisée (la variation relative de volume), et $\underline{\underline{e}}$ le déviateur des déformations. La relation de comportement élastique linéaire isotrope s'exprime sous la forme

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}} = (3k \mathbb{J} + 2\mu \mathbb{K}) : \left(\frac{\varepsilon_v}{3} \underline{\underline{i}} + \underline{\underline{e}} \right) = k\varepsilon_v \underline{\underline{i}} + 2\mu \underline{\underline{e}} \quad (2.75)$$

et

$$\sigma_m = k\varepsilon_v \quad , \quad \underline{\underline{s}} = 2\mu \underline{\underline{e}} \quad (2.76)$$

où k et μ désignent le module d'incompressibilité et le module de cisaillement.

2.6.3 Invariants d'un tenseur du second ordre symétrique (application aux contraintes)

Contrainte moyenne :

$$\sigma_m = \frac{1}{3} Tr(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1}{2} \sigma_{kk} \quad (2.77)$$

Deuxième invariant

$$J_2 = \frac{1}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ji} \quad (2.78)$$

Contrainte déviatorique équivalente

$$\sigma_{eq} = \sqrt{3 J_2} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ji}} \quad (2.79)$$

Troisième invariant

$$J_3 = \det(\underline{\underline{s}}) \quad (2.80)$$

Angle de Lode

$$\theta_c = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right) = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{27}{2} \frac{J_3}{\sigma_{eq}^3} \right) \quad (2.81)$$

Dans le cas particulier de tenseur du second ordre symétriques isotropes transverses (2 valeurs propres distinctes)

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\sigma}} &= \sigma_N \underline{\underline{i}}_N + \sigma_T \underline{\underline{i}}_T \quad , \quad Tr(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{i}} = \sigma_N + 2\sigma_T \\ \underline{\underline{i}}_N &= \underline{\underline{n}} \otimes \underline{\underline{n}} = n_i n_j \underline{\underline{e}}_i \otimes \underline{\underline{e}}_j \quad , \quad \underline{\underline{i}}_T = \underline{\underline{i}} - \underline{\underline{i}}_N\end{aligned}\tag{2.82}$$

on a

$$\underline{\underline{s}} = \frac{\sigma_N - \sigma_T}{3} \left(2\underline{\underline{i}}_N - \underline{\underline{i}}_T \right)\tag{2.83}$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_N + 2\sigma_T}{3}\tag{2.84}$$

$$\sigma_{eq} = |\sigma_N - \sigma_T|\tag{2.85}$$

Dans le cas particulier $\underline{\underline{n}} = \underline{\underline{e}}_3$

$$\sigma_N = \sigma_3 \quad , \quad \sigma_T = \sigma_1 = \sigma_2\tag{2.86}$$

$$\underline{\underline{i}}_N = \underline{\underline{e}}_3 \otimes \underline{\underline{e}}_3 \quad , \quad \underline{\underline{i}}_T = \underline{\underline{e}}_1 \otimes \underline{\underline{e}}_1 + \underline{\underline{e}}_2 \otimes \underline{\underline{e}}_2\tag{2.87}$$

$$\underline{\underline{s}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{3} (\underline{\underline{e}}_1 \otimes \underline{\underline{e}}_1 + \underline{\underline{e}}_2 \otimes \underline{\underline{e}}_2 - 2\underline{\underline{e}}_3 \otimes \underline{\underline{e}}_3)\tag{2.88}$$

$$\sigma_m = \frac{2\sigma_1 + \sigma_3}{3}\tag{2.89}$$

$$\sigma_{eq} = |\sigma_1 - \sigma_3|\tag{2.90}$$

L'angle de Lode θ_c est égal à 0 ou $\pi/3$

2.6.4 Dérivation des invariants des tenseurs du second ordre symétriques

Dérivation de la contrainte moyenne

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{1}{3} \underline{\underline{i}}\tag{2.91}$$

Dérivation de la contrainte déviatorique équivalente (le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ and son tenseur déviateur $\underline{\underline{s}}$ sont supposés symétriques, les résultats présentés ne sont pas valides pour des tenseurs du second ordre non symétriques)

$$\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{s}}}{\sigma_{eq}}\tag{2.92}$$

Dérivation du troisième invariant

$$\frac{\partial J_3}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} - \frac{2}{9} \sigma_{eq}^2 \underline{\underline{i}}\tag{2.93}$$

Dérivation de l'angle de Lode

$$\frac{\partial \theta_c}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{\partial \theta_c}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} + \frac{\partial \theta_c}{\partial \sigma_{eq}} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}\tag{2.94}$$

On rappelle

$$\frac{d \arccos(x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\tag{2.95}$$

d'où

$$\frac{\partial \theta_c}{\partial J_3} = - \frac{9}{\sqrt{(2\sigma_{eq}^3 - 27J_3)(2\sigma_{eq}^3 + 27J_3)}} \quad (2.96)$$

$$\frac{\partial \theta_c}{\partial \sigma_{eq}} = \frac{27J_3}{\sigma_{eq} \sqrt{(2\sigma_{eq}^3 - 27J_3)(2\sigma_{eq}^3 + 27J_3)}} \quad (2.97)$$

2.6.5 Valeurs propres d'un tenseur du second ordre symétrique

Les tenseurs du second ordre symétriques à valeurs réelles sont diagonalisables et leurs valeurs propres sont réelles. Les vecteurs propres associés sont orthogonaux deux à deux. Ce résultat très important sera utile en mécanique des milieux continus pour caractériser les tenseurs symétriques des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ et de déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}$, et dans des phénomènes physiques diffusifs pour caractériser le tenseur des conductivité (par exemple le tenseur de conductivité thermique, qui est dans le cas général un tenseur d'ordre 2 symétrique $\underline{\underline{\lambda}}$).

On montre que les valeurs propres d'un tenseur du second ordre symétrique $\underline{\underline{\sigma}}$ s'expriment sous la forme

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \sigma_m + \frac{2}{3}\sigma_{eq} \cos\left(\theta_c - \frac{4\pi}{3}\right) \\ \sigma_b &= \sigma_m + \frac{2}{3}\sigma_{eq} \cos\left(\theta_c - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sigma_c &= \sigma_m + \frac{2}{3}\sigma_{eq} \cos(\theta_c) \\ \sigma_a &\leq \sigma_b \leq \sigma_c \end{aligned} \quad (2.98)$$

avec

$$\sigma_m = \frac{1}{3}Tr(\underline{\underline{\sigma}}) \quad (2.99)$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{3J_2} \quad , \quad J_2 = \frac{1}{2}\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} \quad , \quad \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \sigma_m \underline{\underline{1}} \quad (2.100)$$

$$J_3 = \det(\underline{\underline{s}}) \quad (2.101)$$

$$\cos(3\theta_c) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} = \frac{27}{2} \frac{J_3}{\sigma_{eq}^3} \quad (2.102)$$

Deux cas particuliers importants $\theta_c = 0$ et $\theta_c = \pi/3$ sont rencontrés dans des essais de laboratoire respectant la symétrie de révolution, tels que les essais oedométriques et les essais triaxiaux déviatoriques de révolution (ce sont les essais les plus fréquents en géomécanique).

– $\theta_c = \pi/3$: cela correspond à des essais de compression

$$\sigma_a < \sigma_b = \sigma_c \quad (2.103)$$

– $\theta_c = 0$: cela correspond à des essais d'extension

$$\sigma_a = \sigma_b < \sigma_c \quad (2.104)$$

Une définition de l'angle de Lode souvent utilisée est

$$\theta_s = \frac{1}{3} \arcsin\left(-\frac{27}{2} \frac{J_3}{\sigma_{eq}^3}\right) \quad (2.105)$$

et les valeurs propres correspondantes s'écrivent

$$\begin{aligned}
 \sigma_a &= \sigma_m + \frac{2}{3}\sigma_{eq} \sin\left(\theta_s - \frac{2\pi}{3}\right) \\
 \sigma_b &= \sigma_m + \frac{2}{3}\sigma_{eq} \sin(\theta_s) \\
 \sigma_c &= \sigma_m + \frac{2}{3}\sigma_{eq} \sin\left(\theta_s + \frac{2\pi}{3}\right) \\
 \sigma_a &\leq \sigma_b \leq \sigma_c
 \end{aligned}
 \tag{2.106}$$

Chapitre 3

Opérateurs différentiels

Cette présentation s'inspire des références

– [13] (page 487)

– [7] , chapitre 15 *Geometric foundations*

Tenseur de permutation (ou symboles de Levi-Civita)

$$\varepsilon_{ijk} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{for } i = j \text{ or } j = k \text{ or } k = i \\ 1 & \text{for } (i, j, k) \in (1, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1) \text{ (even permutation)} \\ -1 & \text{for } (i, j, k) \in (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1) \text{ (odd permutation)} \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

3.1 Coordonnées cartésiennes orthonormées

Produit tensoriel de deux vecteurs de base en coordonnées cartésiennes orthonormées

$$\underline{e}_i \times \underline{e}_j = \varepsilon_{ijk} \underline{e}_k \quad (3.2)$$

Produit vectoriel de deux vecteurs en coordonnées cartésiennes orthonormées

$$\underline{v} \times \underline{w} = \varepsilon_{ijk} v_i w_j \underline{e}_k \quad (3.3)$$

Vecteur position $\underline{x}$

$$\underline{x} = x_i \underline{e}_i = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3 \quad (3.4)$$

$$d\underline{x} = dx_i \underline{e}_i = dx_1 \underline{e}_1 + dx_2 \underline{e}_2 + dx_3 \underline{e}_3 \quad (3.5)$$

Champ scalaire $a(\underline{x})$ (tenseur d'ordre zéro)

$$\underline{\nabla} a = \underline{\text{grad}} a = a_{,i} \underline{e}_i = \frac{\partial a}{\partial x_1} \underline{e}_1 + \frac{\partial a}{\partial x_2} \underline{e}_2 + \frac{\partial a}{\partial x_3} \underline{e}_3 \quad (3.6)$$

$$da = \underline{\nabla} a \cdot d\underline{x} = \underline{\text{grad}} a \cdot d\underline{x} \quad (3.7)$$

$$da = \frac{\partial a}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial a}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial a}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial a}{\partial x_3} dx_3 \quad (3.8)$$

Champ de vecteur $\underline{a}(\underline{x})$ (tenseur d'ordre 1)

$$\underline{a} = a_i \underline{e}_i = a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 + a_3 \underline{e}_3 \quad (3.9)$$

$$\underline{\nabla} \underline{a} = \underline{\underline{\text{grad}}} \underline{a} = a_{i,j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (3.10)$$

$$\underline{da} = \underline{\nabla} \underline{a} \cdot \underline{dx} \quad (3.11)$$

$$\underline{\text{curl}} \underline{a} = \varepsilon_{ijk} a_{k,j} \underline{e}_i \quad (3.12)$$

$$\text{div} \underline{a} = \underline{\nabla} \cdot \underline{a} = a_{i,i} \quad (3.13)$$

Tenseur des déformations linéarisé

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\text{grad}}} \xi + {}^t(\underline{\underline{\text{grad}}} \xi) \right) = \frac{1}{2} (\xi_{i,j} + \xi_{j,i}) \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (3.14)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\xi_{i,j} + \xi_{j,i}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.15)$$

Représentation matricielle

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Champ de tenseur du second ordre $\underline{\underline{a}}(\underline{x})$

$$\underline{\underline{a}} = a_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (3.17)$$

$$\underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{a}} = \underline{\underline{\underline{\text{grad}}}} \underline{\underline{a}} = a_{ij,k} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \quad (3.18)$$

$$\underline{\underline{da}} = \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{dx}} \quad (3.19)$$

$$\underline{\underline{\text{div}}} \underline{\underline{a}} = \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{a}} : \underline{\underline{i}} = a_{ij,j} \underline{e}_i \quad (3.20)$$

3.1.1 Construction à l'aide de l'opérateur nabla

On peut construire les opérateurs différentiels gradient, divergence et rotationnel (*curl*) à l'aide de l'opérateur nabla $\underline{\nabla}$ (*del operator*) utilisé en analyse vectorielle.

$$\underline{\nabla} = \underline{e}_i \partial_i = \underline{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (3.21)$$

Tenseur du premier ordre $\underline{a}$

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\text{grad } a}} &= \underline{a} \otimes \underline{\nabla} = \partial_j a_i \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \\
\text{div } \underline{a} &= \underline{\nabla} \cdot \underline{a} = \partial_i a_i = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \\
\underline{\text{curl } a} &= \underline{a} \times \underline{\nabla} = \varepsilon_{ijk} \partial_k a_j \underline{e}_i = \varepsilon_{ijk} a_{j,k} \underline{e}_i
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Tenseur du deuxième ordre $\underline{\underline{a}}$

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\underline{\text{grad } a}}} &= \underline{\underline{a}} \otimes \underline{\nabla} = \partial_k a_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \\
\underline{\underline{\text{div } a}} &= \underline{\underline{a}} \cdot \underline{\nabla} = a_{ij} \partial_j \underline{e}_i = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \underline{e}_i \\
\underline{\underline{\text{curl } a}} &= \underline{\underline{a}} \times \underline{\nabla} = \varepsilon_{ijk} \partial_k a_{jl} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_l = \varepsilon_{ijk} a_{jl,k} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_l
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Tenseur du troisième ordre $\underline{\underline{\underline{a}}}$

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\underline{\text{grad } a}}} &= \underline{\underline{\underline{a}}} \otimes \underline{\nabla} = \partial_l a_{ijk} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l = \frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \\
\underline{\underline{\text{div } a}}} &= \underline{\underline{\underline{a}}} \cdot \underline{\nabla} = \partial_k a_{ijk} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = \frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_k} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \\
\underline{\underline{\text{curl } a}}} &= \underline{\underline{\underline{a}}} \times \underline{\nabla} = \varepsilon_{ijk} \partial_k a_{jlm} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_l \otimes \underline{e}_m = \varepsilon_{ijk} a_{jlm,k} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_l \otimes \underline{e}_m
\end{aligned} \tag{3.24}$$

etc.

Chapitre 4

Travaux Dirigés

4.1 Notations et définitions

Les symboles barrés $\mathbb{A}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ représentent des tenseurs d'ordre quatre, les symboles soulignés deux fois $\underline{\underline{a}}$, $\underline{\underline{c}}$, $\underline{\underline{i}}$ représentent des tenseurs d'ordre deux, les symboles soulignés une fois $\underline{z}$, $\underline{x}$ représentent les tenseurs d'ordre un. La convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés est systématiquement adoptée (une indication sera faite dans le cas contraire). $\otimes$, $\cdot$, $:$ and $::$ représentent respectivement le produit tensoriel, les produits contractés sur un indice, deux indices et quatre indices. $\underline{\underline{i}}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{J}$ and $\mathbb{K}$ représentent le tenseur identité du second ordre, le tenseur identité des tenseurs d'ordre quatre symétriques, et les projecteurs sphériques et déviatoriques des tenseurs d'ordre quatre symétriques. δ_{ij} représente le symbole de Kronecker, ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ sinon). Tenseur transposé d'un tenseur du second ordre

$$[{}^t \underline{\underline{a}}]_{ij} = a_{ji} \quad (4.1)$$

Tenseur du second ordre symétrique

$${}^t \underline{\underline{a}} = \underline{\underline{a}} \quad (4.2)$$

$$a_{ji} = a_{ij} \quad (4.3)$$

Produits tensoriels et produits contractés

$$\underline{a} \otimes \underline{b} = a_i b_j \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (4.4)$$

$$\underline{\underline{a}} \otimes \underline{\underline{b}} = a_{ij} b_{kl} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \quad (4.5)$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_i b_i \quad , \quad \underline{\underline{a}} : \underline{\underline{b}} = a_{ij} b_{ji} \quad (4.6)$$

$$\underline{\underline{a}} \otimes \underline{\underline{b}} = \frac{1}{2} (a_{ik} b_{jl} + a_{il} b_{jk}) \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l \quad (4.7)$$

$$\mathbb{A} : \mathbb{B} = A_{ijkl} B_{lmn} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_m \otimes \underline{e}_n \quad (4.8)$$

$$\mathbb{A} :: \mathbb{B} = A_{ijkl} B_{lkji} \quad (4.9)$$

Quelques tenseurs utiles

$$\underline{\underline{i}} = \delta_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (4.10)$$

$$\mathbb{I} = \underline{\underline{i}} \otimes \underline{\underline{i}} \quad , \quad I_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (4.11)$$

$$\mathbb{J} = \frac{1}{3} \underline{\underline{i}} \otimes \underline{\underline{i}} \quad , \quad J_{ijkl} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (4.12)$$

$$\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J} \quad (4.13)$$

4.2 Produits

4.2.1 Produits doublement contractés de tenseurs d'ordre 2 et 4

Démontrer les relations

$$\underline{\underline{i}} : \underline{\underline{i}} = 3 \quad (4.14)$$

$$\underline{\underline{i}} : \mathbb{J} = \mathbb{J} : \underline{\underline{i}} = \underline{\underline{i}} \quad (4.15)$$

$$\underline{\underline{i}} : \mathbb{I} = \mathbb{I} : \underline{\underline{i}} = \underline{\underline{i}} \quad (4.16)$$

$$\underline{\underline{i}} : \mathbb{K} = \mathbb{K} : \underline{\underline{i}} = \underline{\underline{0}} \quad (4.17)$$

4.2.2 Produits doublement contractés de tenseurs d'ordre 4

Démontrer les relations

$$\mathbb{I} : \mathbb{I} = \mathbb{I} \quad , \quad \mathbb{J} : \mathbb{J} = \mathbb{J} \quad , \quad \mathbb{I} : \mathbb{J} = \mathbb{J} : \mathbb{I} = \mathbb{J} \quad (4.18)$$

$$\mathbb{K} : \mathbb{K} = \mathbb{K} \quad , \quad \mathbb{I} : \mathbb{K} = \mathbb{K} : \mathbb{I} = \mathbb{K} \quad (4.19)$$

$$\mathbb{J} : \mathbb{K} = \mathbb{K} : \mathbb{J} = \mathbb{O} \quad (4.20)$$

4.2.3 Produits doublement-doublement contractés de tenseurs d'ordre 4

Démontrer les relations

$$\mathbb{I} :: \mathbb{I} = 6 \quad , \quad \mathbb{J} :: \mathbb{J} = 1 \quad , \quad \mathbb{I} :: \mathbb{J} = \mathbb{J} :: \mathbb{I} = 1 \quad (4.21)$$

$$\mathbb{I} :: \mathbb{K} = \mathbb{K} :: \mathbb{I} = 5 \quad , \quad \mathbb{K} :: \mathbb{K} = 5 \quad , \quad \mathbb{J} :: \mathbb{K} = \mathbb{K} :: \mathbb{J} = 0 \quad (4.22)$$

4.2.4 Produits contractés et produits tensoriels

Démontrer les relations

$$\underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{b}} \cdot {}^t \underline{\underline{a}} \quad (4.23)$$

$\underline{\underline{\alpha}}, \underline{\underline{\beta}}, \underline{\underline{\gamma}}$ tenseurs du second ordre, $\mathbb{C}$ tenseur d'ordre quatre

$$\left(\underline{\underline{\alpha}} : \mathbb{C} : \underline{\underline{\beta}} \right) \mathbb{C} : \underline{\underline{\gamma}} = \left(\mathbb{C} : \underline{\underline{\gamma}} \otimes \underline{\underline{\alpha}} : \mathbb{C} \right) : \underline{\underline{\beta}} \quad (4.24)$$

4.3 Décomposition des tenseurs du second ordre symétriques en parties sphériques et déviatoriques

4.3.1 Résultats préliminaires

Soit $\underline{\underline{\alpha}}$ un tenseur du second ordre, démontrer

$$\mathbb{I} : \underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{\alpha}} : \mathbb{I} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\alpha}} + {}^t \underline{\underline{\alpha}}) \quad (4.25)$$

Le tenseur $1/2(\underline{\underline{\alpha}} + {}^t \underline{\underline{\alpha}})$ représente la partie symétrique de $\underline{\underline{\alpha}}$, le tenseur d'ordre quatre $\mathbb{I}$ est le projecteur envoyant tout tenseur d'ordre deux sur sa partie symétrique. En déduire que si le tenseur $\underline{\underline{\alpha}}$ est symétrique

$$\mathbb{I} : \underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{\alpha}} : \mathbb{I} = \underline{\underline{\alpha}} \quad (4.26)$$

Soit le tenseur $\mathbb{I}^a$

$$\mathbb{I}_{ijkl}^a = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (4.27)$$

montrer

$$\mathbb{I}^a : \underline{\underline{\alpha}} = -\frac{1}{2} (\underline{\underline{\alpha}} - {}^t \underline{\underline{\alpha}}) \quad (4.28)$$

Soit le tenseur $\mathbb{I}^0$

$$\mathbb{I}_{ijkl}^0 = \delta_{il} \delta_{jk} \quad (4.29)$$

montrer

$$\mathbb{I}^0 : \underline{\underline{\alpha}} = \underline{\underline{\alpha}} \quad (4.30)$$

Interpréter le tenseur $\mathbb{I}^a$.

4.3.2 Application

Soit le tenseur du second ordre symétrique $\underline{\underline{\alpha}}$ et les tenseurs $\underline{\underline{\alpha}}^s$ et $\underline{\underline{\alpha}}^d$

$$\underline{\underline{\alpha}}^s = \frac{\alpha_{kk}}{3} \underline{\underline{I}} \quad , \quad \underline{\underline{\alpha}}^d = \underline{\underline{\alpha}} - \underline{\underline{\alpha}}^s \quad (4.31)$$

Démontrer les relations

$$\underline{\underline{\alpha}}^s = \mathbb{J} : \underline{\underline{\alpha}} \quad , \quad \underline{\underline{\alpha}}^d = \mathbb{K} : \underline{\underline{\alpha}} \quad (4.32)$$

$\underline{\underline{\alpha}}^s$ et $\underline{\underline{\alpha}}^d$ représentent respectivement les parties sphériques et déviatoriques du tenseur du second ordre symétrique $\underline{\underline{\alpha}}$, $\mathbb{J}$ et $\mathbb{K}$ sont les projecteurs envoyant tout tenseur d'ordre deux symétrique sur ses parties sphérique et déviatoriques.

En déduire les relations

$$Tr(\underline{\underline{\alpha}}^d) = \alpha_{kk}^d = 0 \quad (4.33)$$

$$\mathbb{J} : \underline{\underline{\alpha}}^d = 0 \quad , \quad \mathbb{K} : \underline{\underline{\alpha}}^s = 0 \quad (4.34)$$

4.3.3 Relation de comportement élastique linéaire isotrope

Soit le tenseur d'élasticité linéaire isotrope

$$\mathbb{C} = 3k\mathbb{J} + 2\mu\mathbb{K} \quad (4.35)$$

et le tenseur du second ordre symétrique $\underline{\underline{\varepsilon}}$ que l'on décompose sous la forme

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon_v}{3} \underline{\underline{i}} + \underline{\underline{e}} \quad , \quad \frac{\varepsilon_v}{3} \underline{\underline{i}} = \mathbb{J} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad , \quad \underline{\underline{e}} = \mathbb{K} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (4.36)$$

exprimer le tenseur

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (4.37)$$

et le décomposer en parties sphérique et déviatorique (on notera $\sigma_m = \sigma_{kk}/3$ la contrainte moyenne et $\underline{\underline{s}}$ la partie déviatorique de $\underline{\underline{\sigma}}$). On définit σ_{eq} et γ_{eq}

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}} \quad , \quad \gamma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2} \underline{\underline{\gamma}} : \underline{\underline{\gamma}}} \quad , \quad \underline{\underline{\gamma}} = 2\underline{\underline{e}} \quad (4.38)$$

respectivement la contrainte déviatorique équivalente et la distorsion équivalente. Etablir la relation entre σ_m et ε_v d'une part, σ_{eq} et γ_{eq} d'autre part.

4.4 Invariants des tenseurs du second ordre symétriques

Soit $\underline{\underline{\varepsilon}}$ un tenseur du second ordre **symétrique**. Démontrer l'identité

$$\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{i}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}) \quad (4.39)$$

4.4.1 Invariants I_1, I_2, I_3

Exprimer sous formes indicielles et développées les trois premiers invariants de $\underline{\underline{\varepsilon}}$

$$I_1 = \underline{\underline{i}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad , \quad I_2 = \frac{1}{2} \underline{\underline{i}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}) \quad , \quad I_3 = \frac{1}{3} \underline{\underline{i}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}) \quad (4.40)$$

La dérivation d'une fonction scalaire f par un tenseur d'ordre deux $\underline{\underline{a}}$ fournit un tenseur d'ordre deux dont la composante ij est obtenue par dérivation de la fonction scalaire par rapport à la composante a_{ij}

$$\left[\frac{\partial f}{\partial a} \right]_{ij} = \frac{\partial f}{\partial a_{ij}} \quad (4.41)$$

Démontrer :

$$\frac{\partial I_1}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{i}} \quad , \quad \frac{\partial I_2}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\varepsilon}} \quad , \quad \frac{\partial I_3}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (4.42)$$

4.4.2 Invariants J_2 et J_3

Soit

$$\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{(\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{i}})}{3} \underline{\underline{i}} \quad , \quad J_2 = \frac{1}{2} \underline{\underline{e}} : \underline{\underline{e}} \quad , \quad J_3 = \det \underline{\underline{e}} \quad , \quad \varepsilon_{eq} = \sqrt{3J_2} \quad (4.43)$$

Démontrer :

$$\frac{\partial J_2}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{e}} \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{eq}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{3 \underline{\underline{e}}}{2 \varepsilon_{eq}} \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} = \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{e}} - \frac{2}{3} J_2 \underline{\underline{i}} \quad (4.46)$$

On utilisera

$$J_3 = \frac{1}{3} \underline{\underline{i}} : (\underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{e}}) \quad , \quad \text{car :} \quad \underline{\underline{i}} : \underline{\underline{e}} = 0 \quad (4.47)$$

4.4.3 Invariants D_2 , D_3

Exprimer sous forme développée les invariants

$$D_2 = \frac{1}{2} \left((\underline{\underline{i}} : \underline{\underline{\varepsilon}})^2 - \underline{\underline{i}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}) \right) \quad (4.48)$$

$$D_3 = \det \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (4.49)$$

Soit $D_1 = \underline{\underline{i}} : \underline{\underline{\varepsilon}}$, on montre (se reporter au chapitre 1 du cours de mécanique des milieux continus) que l'équation caractéristique d'un tenseur du second ordre symétrique $\underline{\underline{\varepsilon}}$

$$\det (\underline{\underline{\varepsilon}} - \lambda \underline{\underline{i}}) = 0 \quad (4.50)$$

s'exprime sous la forme

$$-\lambda^3 + D_1 \lambda^2 - D_2 \lambda + D_3 = 0 \quad (4.51)$$

4.5 Déterminants et analyse tensorielle

Soit le déterminant

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{rst} = \begin{vmatrix} \delta_{ir} & \delta_{is} & \delta_{it} \\ \delta_{jr} & \delta_{js} & \delta_{jt} \\ \delta_{kr} & \delta_{ks} & \delta_{kt} \end{vmatrix} \quad (4.52)$$

Montrer

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6 \quad (4.53)$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijl} = 2\delta_{kl} \quad (4.54)$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \quad (4.55)$$

4.6 Effet d'un changement de base sur les composantes des tenseurs

Soit une transformation de coordonnées, représentée par une matrice $\underline{\underline{Q}}^\alpha$ de composantes Q_{ij}^α , entre un système de coordonnées cartésienne orthonormées fixe (z_1, z_2, z_3) , ou global, et un système de coordonnées α $(z_1^\alpha, z_2^\alpha, z_3^\alpha)$. Le vecteur unitaire dans la direction z_i^α est noté $\underline{e}_i^\alpha$

$$\underline{e}_i^\alpha = Q_{ij}^\alpha \underline{e}_j \quad , (j, i = 1, 2, 3) \quad , \quad \underline{e}_k = R_{kl}^\alpha \underline{e}_l^\alpha \quad , (k, l = 1, 2, 3) \quad (4.56)$$

On note $\underline{\underline{Q}}^\alpha$ la matrice de transformation entre les bases $\underline{e}_j$ et $\underline{e}_i^\alpha$, et $\underline{\underline{R}}^\alpha$ sa matrice inverse. Les bases étant orthonormées, les matrices $\underline{\underline{Q}}^\alpha$ et $\underline{\underline{R}}^\alpha$ sont orthogonales

$$R_{kl}^\alpha = Q_{lk}^\alpha \quad (4.57)$$

Les formules de changement de base sur les composantes d'un tenseur d'ordre un $\underline{A}$ s'écrivent

$$\underline{A} = A_k \underline{e}_k = A_i^\alpha \underline{e}_i^\alpha \quad (4.58)$$

$$A_i^\alpha = Q_{ij}^\alpha A_j \quad , \quad A_i = Q_{ji}^\alpha A_j^\alpha \quad (4.59)$$

Les formules de changement de base sur les composantes d'un tenseur du second ordre $\underline{\underline{A}}$ s'écrivent

$$\underline{\underline{A}} = A_{kl} \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l = A_{ij}^\alpha \underline{e}_i^\alpha \otimes \underline{e}_j^\alpha \quad (4.60)$$

$$A_{ij}^\alpha = Q_{ik}^\alpha Q_{jl}^\alpha A_{kl} \quad , \quad A_{ij} = Q_{ki}^\alpha Q_{lj}^\alpha A_{kl}^\alpha \quad (4.61)$$

Les formules de changement de base sur les composantes d'un tenseur d'ordre quatre $\underline{\underline{\mathbb{A}}}$ s'écrivent

$$\underline{\underline{\mathbb{A}}} = A_{pqrs} \underline{e}_p \otimes \underline{e}_q \otimes \underline{e}_r \otimes \underline{e}_s = A_{ijkl}^\alpha \underline{e}_i^\alpha \otimes \underline{e}_j^\alpha \otimes \underline{e}_k^\alpha \otimes \underline{e}_l^\alpha \quad (4.62)$$

$$A_{ijkl}^\alpha = Q_{ip}^\alpha Q_{jq}^\alpha Q_{kr}^\alpha Q_{ls}^\alpha A_{pqrs} \quad , \quad A_{ijkl} = Q_{pi}^\alpha Q_{qj}^\alpha Q_{rk}^\alpha Q_{sl}^\alpha A_{pqrs}^\alpha \quad (4.63)$$

4.6.1 Application aux tenseurs d'ordre un

Soit la matrice de transformation

$$Q_{11}^\alpha = \sin z_2^\alpha \cos z_3^\alpha \quad , \quad Q_{12}^\alpha = \sin z_2^\alpha \sin z_3^\alpha \quad , \quad Q_{13}^\alpha = \cos z_2^\alpha \quad (4.64)$$

$$Q_{21}^\alpha = \cos z_2^\alpha \cos z_3^\alpha \quad , \quad Q_{22}^\alpha = \cos z_2^\alpha \sin z_3^\alpha \quad , \quad Q_{23}^\alpha = -\sin z_2^\alpha \quad (4.65)$$

$$Q_{31}^\alpha = -\sin z_3^\alpha \quad , \quad Q_{32}^\alpha = \cos z_3^\alpha \quad , \quad Q_{33}^\alpha = 0 \quad (4.66)$$

associée au changement de coordonnées

$$z_1 = z_1^\alpha \sin(z_2^\alpha) \cos(z_3^\alpha) \quad , \quad z_2 = z_1^\alpha \sin(z_2^\alpha) \sin(z_3^\alpha) \quad , \quad z_3 = z_1^\alpha \cos(z_2^\alpha) \quad (4.67)$$

et inversement

$$z_1^\alpha = (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)^{1/2} \quad , \quad z_2^\alpha = \arctan\left(\frac{(z_1^2 + z_2^2)^{1/2}}{z_3}\right) \quad , \quad z_3^\alpha = \arctan\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \quad (4.68)$$

$$0 \leq z_2^\alpha \leq \pi \quad , \quad 0 \leq z_3^\alpha \leq 2\pi \quad (4.69)$$

On notera (r, θ, φ) les coordonnées locales $(z_1^\alpha, z_2^\alpha, z_3^\alpha)$ et $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_\varphi)$ les vecteurs $(\underline{e}_1^\alpha, \underline{e}_2^\alpha, \underline{e}_3^\alpha)$. Exprimer les vecteurs

$$\underline{a} = A(z_1 \underline{e}_1 - z_2 \underline{e}_2) \quad (4.70)$$

$$\underline{b} = A(z_1 \underline{e}_1 + z_2 \underline{e}_2 + z_3 \underline{e}_3) \quad (4.71)$$

en fonction de (r, θ, φ) , $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_\varphi)$ en appliquant les règles de transformations de coordonnées.

Bibliographie

- [1] L. Brillouin. *Les Tenseurs en Mécanique et en Élasticité*. Masson, 1938.
- [2] A. Lichnerowicz. *Éléments de calcul tensoriel*. Jacques Gabay, 2005.
- [3] P. Germain. *Cours de mécanique des milieux continus*. Ecole Polytechnique, 1977.
- [4] J. Salençon. *Mécanique des milieux continus*. Editions Ellipse, 2001.
- [5] J. Duc and D. Bellet. *Mécanique des solides réels, élasticité*. Cépaduès éd., 1984.
- [6] A. E. Green and W. Zerna. *Theoretical Elasticity*. Clarendon Press, 1960.
- [7] S. Nemat-Nasser and M. Hori. *Micromechanics : overall properties of heterogenous materials*. North Holland - Elsevier, 1993.
- [8] I.S. Sokolnikoff. *Tensor Analysis, Theory and Applications*. Wiley, 1964.
- [9] V. Drivas, L. Rosenthal, and Y. Semezis. *Les tenseurs et leurs applications*. Eyrolles, 1980.
- [10] P. Suquet. *Rupture et Plasticité*. Ecole-Polytechnique, 2004.
- [11] M. Bornert, T. Bretheau, and P. Gilormini. *Homogénéisation en mécanique des matériaux*. Hermes, Paris, 2001.
- [12] A. Zaoui. *Matériaux hétérogènes et composites*. Ecole-Polytechnique, 1998.
- [13] D. François, A. Pineau, and A. Zaoui. *Comportement mécanique des matériaux. Elasticité et plasticité*. Hermes, Paris, 1995.
- [14] S. Forest, M. Amestoy, G. Damamme, S. Kruch, V. Maurel, and M. Mazière. *Mécanique des milieux continus*. Ecole des Mines de Paris, 2009-2010.
- [15] R. M. Christensen. *Mechanics of composite materials*. Dover Publications, second edition, 2005.
- [16] L. Dormieux, D. Kondo, and F.J. Ulm. *Microporomechanics*. John Wiley and Sons, first edition, 2006.