

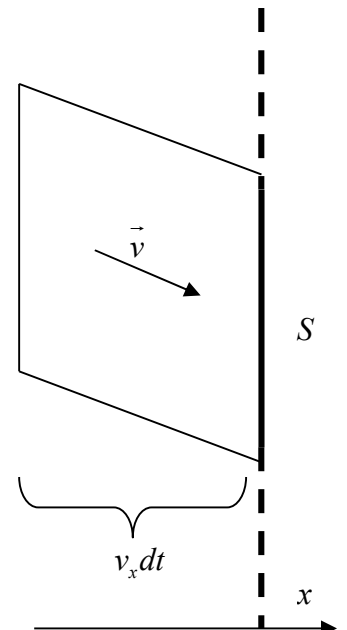
Calcul complet de la pression cinétique

En cours nous avons fait l'hypothèse simplificatrice que toutes les molécules se déplacent à la même vitesse, dans l'une des six directions $\pm x, \pm y, \pm z$.

Supposons maintenant que les particules se déplacent aléatoirement avec des vitesses $\vec{v}$ quelconques (en norme et en direction). On note $dP(\vec{v})$ la probabilité (élémentaire) qu'une particule ait la vitesse $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ à $d^3\vec{v} = (dv_x, dv_y, dv_z)$ près. Autrement dit, si la densité volumique de particules vaut $\frac{N}{V}$, la densité volumique de particules qui ont la vitesse $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ à $d^3\vec{v} = (dv_x, dv_y, dv_z)$ près vaut $\frac{N}{V} dP(\vec{v})$.

Nous allons maintenant compter le nombre de chocs dus à ces particules sur une durée dt . Pendant cette durée, les particules qui vont frapper la paroi verticale de droite (perpendiculaire à l'axe x) sont contenues dans un cylindre de volume $Sv_x dt$. Leur nombre est donc $Sv_x dt \times \frac{N}{V} dP(\vec{v})$.

A chaque choc, la quantité de mouvement de la paroi augmente de $2mv_x$ (c'est la quantité de mouvement prélevée à une particule qui rebondit). Sur la durée dt la variation de quantité de mouvement de la paroi augmente donc de $dp_{mur} = Sv_x dt \times \frac{N}{V} dP(\vec{v}) \times 2mv_x$ à cause de ces particules (ayant la vitesse $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ à $d^3\vec{v} = (dv_x, dv_y, dv_z)$ près).



La variation totale Δp_{mur} de quantité de mouvement du mur s'obtient en sommant les dp_{mur} sur toutes les vitesses $\vec{v}$ possibles susceptibles d'entraîner une collision avec la paroi de droite (c'est-à-dire avec $v_x > 0$), soit $\Delta p_{mur} = 2Sdt \frac{N}{V} m \int_{v_x > 0} v_x^2 dP(\vec{v})$. Or

l'intégrale qui apparaît ici représente la moitié de l'intégrale sur toutes les directions $\int_{v_x \geq 0} v_x^2 dP(\vec{v}) = \overline{v_x^2}$ qui représente la moyenne du carré de la vitesse selon x . On a donc

$$\Delta p_{mur} = 2Sdt \frac{N}{V} m \times \frac{1}{2} \overline{v_x^2}.$$

Dans ce modèle toutes les directions sont équivalentes, donc $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3}(\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}) = \frac{1}{3} \overline{v^2}$, donc $\Delta p_{mur} = Sdt \frac{N}{V} m \times \frac{1}{3} \overline{v^2}$.

On en déduit la force F exercée sur le mur : $F = \frac{dp_{mur}}{dt} = \frac{1}{3} S \frac{N}{V} m \overline{v^2}$ puis la pression

$$P = \frac{F}{S} = \frac{1}{3} \frac{N}{V} m \overline{v^2} = \frac{1}{3} n m \overline{v^2} \text{ en notant } \bar{n} \text{ la densité volumique moyenne.}$$

On retrouve le même résultat qu'avec le modèle précédent.