

Démontrer en géométrie plane (euclidienne)

La démonstration, ou preuve, est une activité essentielle en mathématique. Elle s'appuie sur un raisonnement que l'on qualifie de déductif : d'un ensemble d'informations connues (ensemble d'hypothèses), on peut obtenir une nouvelle information souhaitée (conclusion).

Les résultats les plus notables en mathématiques sont généralement ceux qui permettent d'établir des liens entre des domaines ou sous-domaines de natures différentes.

	Monde géométrique	Monde numérique (nombres)
objets	points, segments, (demi-)droites, cercles, polygones, etc.	nombres entiers, décimaux, rationnels, réels ; expressions littérales, etc.
propriétés	alignement, cocyclicité, concentricité ; perpendicularité, parallélisme, sécance, incidence, tangence, concourance, etc.	(in)égalités entre expressions mettant en jeu des nombres ou variables (pouvant désigner des grandeurs)

On peut noter qu'une propriété peut caractériser des objets qui sont tous de même nature (alignement de points), ou des objets de différentes natures (tangence entre un cercle et une droite).

Parmi tous les résultats mathématiques qui permettent d'établir un lien entre le monde géométrique et le monde numérique (au sens, monde dans lequel les objets sont des nombres ou des expressions), certains sont incontournables et portent un nom spécifique, dont notamment :

- le théorème de Pythagore,
- le théorème de Thalès.

Un autre résultat s'inscrit dans ce cadre : le théorème de l'angle au centre.

Ces théorèmes sont des implications : ils permettent d'affirmer que, lorsqu'un ensemble de conditions (une ou plusieurs) sont satisfaites, un autre ensemble de conditions (une ou plusieurs) sont alors vérifiées. Les théorèmes qui nous intéressent ici vérifient une propriété de réciprocity : il est possible d'invertir les conditions et les hypothèses.

Il n'est pas possible de faire la liste exhaustive de tous les résultats liant les deux mondes géométriques et numériques. Citons toutefois l'un d'entre eux appelé théorème de la hauteur : dans un triangle ABC, si H est le pied de la hauteur issue du sommet A et si le triangle ABC est rectangle en A, alors $AH^2 = BH \times CH$.

Le théorème de Pythagore

Soit ABC un triangle rectangle en A. Alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$. On énonce ce théorème généralement sous la forme suivante : dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres cotés.

Noter qu'il est équivalent de déclarer que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires et que le triangle ABC possède un angle droit en A (la deuxième formulation est généralement préférée).

Ce théorème admet une réciproque : dans un triangle, si le carré d'une des longueurs est égal à la somme des carrés des deux autres longueurs, alors ce triangle est rectangle.

Ainsi, si une certaine propriété géométrique est satisfaite (présence d'un angle droit, ou de perpendicularité entre deux droites), alors on en déduit une certaine relation métrique (une égalité peut être formulée, mettant en jeu le carré d'une longueur et la somme des carrés de deux longueurs). La réciproque dit l'inverse : si une certaine relation sur les carrés des longueurs est satisfaite, on en déduit la présence d'un angle droit (de perpendicularité entre deux droites).

Le théorème de Thalès

Soient cinq points O, A, A', B et B' vérifiant les propriétés suivantes :

- les points O, A et A' sont alignés,
- les points O, B et B' sont alignés,
- les droites (AB) et (A'B') sont parallèles.

Alors les trois quantités $\frac{OA}{OA'}$, $\frac{OB}{OB'}$ et $\frac{AB}{A'B'}$ sont égales.

Remarque : une formulation équivalente aux deux hypothèses d'alignement est "les droites (AA') et (BB') sont sécantes en O".

Ce théorème admet une réciproque : si cinq points O, A, A', B et B' sont tels que O, A et A' soient alignés, ainsi que O, B et B', et si les trois quantités $\frac{OA}{OA'}$, $\frac{OB}{OB'}$ et $\frac{AB}{A'B'}$ sont égales, alors (A'B') est parallèle à (AB).

On peut affaiblir les hypothèses en demandant juste l'égalité entre les rapports $\frac{OA}{OA'}$ et $\frac{OB}{OB'}$, mais il faut alors que les alignements de O, A, A' d'une part et O, B et B' d'autre part soient dans le même ordre (par exemple, que A soit un point du segment [OA'] et B un point du segment [OB']).

Il existe un cas particulier de ce théorème appelé théorème de la droite des milieux : lorsque A et B sont les milieux respectifs de [OA'] et de [OB']. De façon plus précise, si une droite passe par deux milieux de deux côtés d'un triangle, alors cette droite est parallèle à la droite qui supporte le troisième côté. On peut énoncer une réciproque : si une droite (d) passe par le milieu d'un côté d'un triangle et est parallèle à la droite qui supporte un deuxième côté de ce triangle, alors la droite (d) passe par le milieu du troisième côté de ce triangle.

Construire une preuve (démonstration)

En mathématiques, une preuve est un assemblage de phrases utilisant des termes techniques pour décrire des propriétés valides. En suivant un ordre particulier, on peut ainsi à partir d'hypothèses obtenir une propriété attendu, éventuellement après un certain nombre d'étapes intermédiaires.

Comme la géométrie s'appuie sur la construction et l'analyse de figures, on peut avoir la tentation de construire une preuve en décrivant les propriétés qui semblent être vraies à la lecture de propriétés présentes sur la figure étudiée. Aussi, le premier réflexe à acquérir est de bannir définitivement les arguments du type "on voit sur le dessin que ...", qui ne constituent en rien une preuve digne de ce nom !

établir une démonstration en géométrie est un exercice souvent fastidieux qui présente principalement trois parties (et donc trois difficultés !).

- Il faut pouvoir interpréter convenablement les données de l'énoncé,
- Il faut sélectionner, parmi les nombreuses propriétés, celles qui vont avoir une utilité pour bâtir la démonstration,
- Il faut exprimer clairement les étapes logiques permettant d'aboutir à la conclusion recherchée.

On peut aussi mentionner l'obligation d'employer un vocabulaire spécifique et dépourvu d'ambiguïté tout au long de ces étapes.

Pour passer la première difficulté, il suffit la plupart du temps de reformuler les données de l'énoncé en termes mathématiques, tout en étant attentif au fait qu'une hypothèse peut parfois s'écrire de plusieurs manières différentes.

La seconde difficulté est sans doute la plus grande. Il s'agit de passer en revue toutes les propriétés que l'on connaît sur les figures présentes : droites, cercles, polygones ... jusqu'à ce que l'on puisse déterminer une nouvelle propriété que l'on ne connaissait pas encore. Il est particulièrement utile de faire alors apparaître sur un dessin les "nouvelles" propriétés par des symboles adéquats qui signaleront des longueurs égales, des angles égaux, la présence d'un angle droit, etc. éventuellement, on peut numéroté l'ordre dans lequel ces propriétés apparaissent, ce qui facilitera grandement la réalisation de la troisième étape. Il n'existe malheureusement aucune méthode permettant de déterminer quelles propriétés vont être utilisées pour un énoncé donné, et la meilleure technique pour s'améliorer dans cette partie consiste à faire des exercices. Au cours de ce travail, on peut être amené à obtenir des propriétés qui ne servent pas pour établir la preuve recherchée.

Enfin, il reste à écrire la preuve proprement dite. Il s'agit alors de s'assurer que toutes les hypothèses nécessaires à l'utilisation d'une propriété sont bien présentes (et seulement celles-ci !), et que l'ordre logique est respecté. Notons que pour effectuer ce cheminement, il est souvent utile de construire la chaîne de la preuve "par les deux bouts". Ainsi, tant que la preuve n'est pas entièrement constituée, on travaille simultanément sur deux questions :

- avec les hypothèses que je connais, que puis-je dire de nouveau ? (on passe de l'étape X à l'étape X+1)
- quelle hypothèse supplémentaire me permettrait d'arriver au résultat ? (avant d'arriver à l'étape Y, on essaie d'arriver à l'étape Y-1).