

RECHERCHES
SUR
L'ORIGINE DES COMÈTES ET LES HYPOTHÈSES COSMOGONIQUES

Par M. Louis FABRY

ASTRONOME-ADJOINT A L'OBSERVATOIRE DE MARSEILLE

1. — Dans un précédent mémoire ⁽¹⁾, m'appuyant sur le calcul des probabilités, j'ai montré que la théorie qui regarde les comètes comme tout à fait étrangères au Système solaire ne permet pas de rendre compte de la forme de leurs orbites, toujours très voisine de la parabole, et d'expliquer l'absence des orbites hyperboliques. Je conclusai donc, sans préciser davantage, que les comètes doivent être rattachées au Système solaire.

Cette théorie me paraît soulever un certain nombre de questions capables non seulement de conduire à des conséquences importantes en ce qui concerne les comètes, mais aussi de modifier nos idées cosmogoniques.

Si les comètes doivent être rattachées au Système solaire, leurs vitesses initiales, relativement au Soleil, ne dépassaient pas une valeur extraordinairement petite; il est donc tout naturel d'admettre que ces valeurs initiales étaient rigoureusement nulles. Mais

(1) Etude sur la probabilité des comètes hyperboliques et l'origine des comètes — *Annales de la Faculté des Sciences de Marseille*, tome IV, ou Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris, n° 799.

pourquoi les comètes ne sont-elles pas tombées en droite ligne sur le Soleil ? Nous voyons à cela deux raisons :

Le Soleil n'est pas seul dans l'espace ; il y a aussi les étoiles, dont l'attraction doit légèrement modifier la marche des comètes, elle ne change passablement leur vitesse, de sorte que l'orbite ne diffère pas de la parabole d'une manière appréciable ; mais elle suffit pour dévier légèrement la comète de la ligne droite et produire la distance périhélie.

Une autre cause qui a pu empêcher les comètes de tomber en droite ligne vers le Soleil, est le défaut d'homogénéité de la masse dont la condensation a formé cet astre. Car si cette masse n'était pas composée de couches sphériques homogènes, elle n'a pas toujours attiré les comètes vers son centre de gravité.

Ces réflexions sur les comètes, rapprochées des théories cosmogoniques, tendent à faire penser qu'aux premières époques de la création, à l'instant où Dieu venait de créer la matière, cette matière était au repos et qu'elle n'a été mise en mouvement que peu à peu, d'après la loi de la gravitation universelle.

Cette supposition a été regardée, par la majorité des astronomes, comme inadmissible ; en se basant sur le théorème des aires, on a objecté qu'elle est incapable de rendre compte du fait que les mouvements que nous observons dans le Système planétaire s'effectuent tous dans le même sens (les satellites d'Uranus et de Neptune excepté). Mais dans cette application du théorème des aires, on ne tient compte, parmi les forces auxquelles a été soumise la masse qui a formé le Soleil et les planètes, que des forces intérieures.

Les forces intérieures sont en effet les seules sensibles si l'on admet que cette masse ne s'étendait que peu au-delà de l'orbite de Neptune et était composée de couches sphériques homogènes. Il en est autrement lorsqu'on lui donne une étendue comparable aux espaces interstellaires et qu'on ne la suppose pas sphérique. Alors l'attraction des étoiles (ou de la matière qui devait plus tard les former) n'est plus négligeable et combinée avec la condensation elle a pu produire le mouvement de rotation, qui avait paru inexplicable.

Supposons par exemple que le Soleil et le Système planétaire aient été formés par la condensation d'une masse allongée suivant

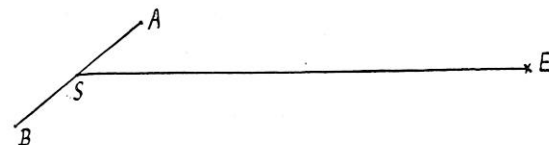


Fig. 1.

la ligne AB, soumise à l'attraction d'une étoile E. Les molécules situées vers A étant plus attirées par l'étoile que le centre

de gravité S tomberont à droite de ce point ; au contraire celles situées vers B étant moins attirées tomberont à gauche, il en résultera un mouvement de rotation du système.

On a aussi objecté au repos initial que toute la matière de l'univers devrait se réunir en une masse unique, cette objection ne me paraît pas bien fondée. A ma connaissance, il n'a pas été prouvé que plusieurs corps, et même trois seulement, abandonnés au repos et s'attirant suivant la loi de Newton doivent se rencontrer à une même époque en un certain point de l'espace ; et cela serait-il prouvé, rien n'empêche de supposer qu'avant de se réunir en une masse unique l'univers devait passer par l'état dans lequel il se trouve aujourd'hui.

Ainsi nous sommes conduits aux suppositions suivantes : La matière qui devait former le Système solaire était à l'origine disséminée dans une étendue comparable aux espaces interstellaires, elle était au repos et n'était pas homogène ni sphérique. Ses molécules s'attirant les unes les autres suivant la loi de Newton, elle a aussitôt commencé à se condenser vers un point qui devait être plus tard le Soleil. La condensation avançant peu à peu il s'est formé autour de ce point une nébulosité plus dense que le chaos primitif, s'étendant jusqu'au delà de l'orbite de Neptune, ou des planètes inconnues qui existent peut-être après Neptune.

Cette nébulosité centrale possédait une densité suffisante pour offrir quelque résistance au mouvement, de sorte que les mouvements de ses diverses parties devaient tendre à produire une rotation circulaire de l'ensemble. A cause des forces d'attraction des

étoiles les vitesses de toutes ces molécules parties du repos ne se détruiraient pas entièrement et ne se bornaient pas à produire de la chaleur.

C'est de cette nébulosité centrale animée d'un mouvement de rotation que les planètes sont sorties.

En même temps que ces planètes se formaient la nébulosité continuait à recevoir des matériaux venus de régions de plus en plus éloignées; leur chute ne se faisait pas rigoureusement vers le centre de la masse, à cause des attractions stellaires et du défaut primitif d'homogénéité.

Il est donc arrivé une époque où le Soleil s'étant formé et réduit à un plus petit diamètre, ces matériaux ont cessé de se réunir à la masse centrale et sont devenus des comètes.

Ces idées que je ne donne que comme assez hypothétiques, paraîtront sans doute hardies, elles semblent cependant devoir être prises en sérieuse considération et je me propose de les soumettre au calcul mathématique.

MOUVEMENTS PROPRES DES ÉTOILES

2. — La première difficulté que rencontre l'hypothèse du repos initial consiste dans les mouvements propres des étoiles. Il est facile de se rendre compte que l'attraction réciproque de deux étoiles abandonnées au repos ne suffit pas pour leur donner un mouvement propre sensible. Soient en effet m, m' les masses de ces étoiles, d leur distance initiale, r leur distance actuelle, f la constante de l'attraction, V la vitesse de l'une des étoiles relativement à l'autre regardée comme fixe, cette vitesse est donnée par la formule

$$V^2 = 2f(m + m')\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d}\right) \quad (1)$$

Désignons par w la vitesse de la Terre dans son orbite et prenons

la distance de la Terre au Soleil pour unité de longueur, la masse du Soleil pour unité de masse, alors $f = w^2$, et

$$V = w \sqrt{2(m + m')\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d}\right)} \quad (2)$$

La distance réciproque des étoiles r étant toujours très considérable, on voit que cette vitesse V est extraordinairement petite.

Pour expliquer les mouvements propres des étoiles dans l'hypothèse du repos initial il faut donc faire intervenir les attractions de la totalité des étoiles sur chacune d'elles.

Considérons un système de N étoiles de même masse m , uniformément répandues dans un espace sphérique; si ces étoiles ont été abandonnées sans vitesses, elles se rapprocheront peu à peu du centre, celles qui sont situées sur la limite du système à la distance r du centre sont soumises à l'accélération

$$\frac{fNm}{r^2}$$

En désignant par d la valeur initiale de r , leur vitesse est donc donnée par la formule

$$V^2 = 2fNm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d}\right) \quad (3)$$

d'où

$$V = w \sqrt{2Nm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{d}\right)} \quad (4)$$

Si la distance d est grande relativement à r et la valeur de $2Nm$ voisine de r , cette formule donnera pour V une valeur voisine de la vitesse de la Terre, c'est-à-dire du même ordre de grandeur que les vitesses des étoiles.

Nous n'avons aucune donnée précise sur la masse totale des étoiles que nous apercevons dans le ciel, et sur la distance r du Soleil et des étoiles les plus proches de nous au point central de la voie lactée. Mais la supposition que $2Nm$, double de la masse totale,

et la distance r sont deux nombres du même ordre de grandeur est admissible. En effet, le nombre des étoiles visibles dans les grands instruments autorise à supposer que la masse totale des étoiles de la voie lactée est par exemple cinquante millions de fois celle du Soleil ; il faudrait alors que r soit dans les environs de cent millions, valeur qui n'a rien d'in vraisemblable.

Sous l'hypothèse que les étoiles sont répandues uniformément dans un espace sphérique, deux étoiles voisines prendront à peu près les mêmes mouvements. Comme celles qui sont les plus proches du Soleil ont des mouvements apparents sensibles, il faut supposer que dès l'origine les étoiles (ou plutôt les masses par la condensation desquelles elles ont été formées) n'étaient pas disposées uniformément dans un espace sphérique. Ce que du reste la forme de la voie lactée tend aussi à faire admettre. La constitution du système a pu alors être telle que des étoiles éloignées d'abord se trouvent aujourd'hui plus rapprochées et possèdent des mouvements différents.

Ainsi l'hypothèse du repos initial n'est pas incompatible avec les mouvements propres stellaires, elle conduit seulement à admettre qu'aux premiers âges de la création, la matière dont la condensation a formé peu à peu les étoiles de la voie lactée était disséminée dans un espace plus considérable que celui occupé aujourd'hui par la voie lactée. En outre, cette matière n'était pas disséminée d'une manière uniforme dans cet espace, elle offrait des différences d'homogénéité qui déjà déterminaient l'état du système du monde tel qu'il devait être dans l'avenir.

Le système des étoiles a donc subi une condensation vers le centre de la voie lactée, en outre par leur attraction réciproque ces étoiles ont pris des mouvements divers qui ont rapproché des astres beaucoup plus éloignés d'abord.

(160)

(161)

7

LE THÉORÈME DES AIRES APPLIQUÉ AUX MOUVEMENTS INTÉRIEURS DU SYSTÈME SOLAIRE

3. — Nous avons attribué les mouvements des planètes, tous de sens direct, au résultat de l'attraction des étoiles sur la matière dont la condensation a formé le Système solaire.

La base de notre hypothèse est qu'à l'origine cette matière était au repos et n'était pas homogène. Afin de simplifier la question, nous ferons relativement à ce défaut d'homogénéité la supposition la plus simple, savoir : que le Système solaire a été formé par la réunion de deux masses égales A, B qui se sont rapprochées peu à peu par suite de leur attraction réciproque et ont fini par se rencontrer. Nous regarderons ces masses A, B comme soumises à l'attraction d'une troisième masse E, une étoile ; et nous supposerons les trois corps A, B, E assez petits, ou suffisamment rapprochés de la forme sphérique, pour que dans le calcul nous puissions les réduire à leurs centres de gravité.

Puisque l'on part du repos, les mouvements se feront dans un plan, nous les rapportons à deux axes menés par le centre de gravité de A et B, c'est-à-dire par le milieu O de la droite AB, nous faisons passer l'axe des x par la position initiale de l'étoile E.

Désignons les coordonnées et les masses de A, B, E par les lettres suivantes :

	COORDONNÉES	MASSES
A	$x \ y$	m
B	$-x \ -y$	m
E	$X \ Y$	μ

Posons :

$$AE = \Delta_1 \quad BE = \Delta_2 \quad OE = D \quad OA = OB = r$$

$f =$ constante de l'attraction

parce que la masse E, très éloignée des deux autres, n'est soumise qu'à une force très faible ; et que partie du repos, elle s'écartera peu de l'axe Ox , pendant le temps nécessaire aux corps A, B pour parvenir au point O. Nous pouvons donc remplacer les quantités variables ω et D par des valeurs moyennes et les regarder comme constantes, l'intégration de l'expression 13 donne alors :

$$S = \frac{3\sqrt{fR}\mu \sin \omega \cos \omega}{D^3 \sqrt{2m}} \int_R^r \frac{r^2 dr}{\sqrt{\frac{R}{r} - 1}} \quad (14)$$

En posant $\sqrt{\frac{R}{r} - 1} = \xi$, nous avons :

$$\int \frac{r^2 dr}{\sqrt{\frac{R}{r} - 1}} = -2R^3 \int \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^3} = -2R^3 \left[\frac{\xi}{6(1+\xi^2)^3} + \frac{5\xi}{24(1+\xi^2)^2} + \frac{5\xi}{16(1+\xi^2)} + \frac{5}{16} \operatorname{arctg} \xi \right] + \text{Const.} \quad (15)$$

A la limite inférieure de l'intégration R correspond pour ξ la valeur zéro ; lorsque la limite supérieure r est beaucoup plus petite que R, la valeur correspondante de ξ est très grande, par conséquent $\operatorname{arctg} \xi$ est à peu près égal à $\frac{\pi}{2}$ et les termes qui précèdent sont presque nuls. La formule 15 donne donc :

$$\int_R^r \frac{r^2 dr}{\sqrt{\frac{R}{r} - 1}} = -\frac{5\pi R^3}{16} \quad (16)$$

Et la formule 14 devient finalement

$$S = -\frac{15\sqrt{fR}\pi\mu R^3 \sin \omega \cos \omega}{16D^3 \sqrt{2m}} \quad (17)$$

Telle sera la valeur de l'aire décrite par le rayon OA dans l'unité de temps, lorsque les corps A, B seront arrivés au voisinage l'un de l'autre.

A ce moment, l'influence de l'attraction de l'étoile E sera devenue

négligeable dans le mouvement relatif, parce que les corps A, B étant voisins, cette attraction est sensiblement la même pour chacun d'eux. Si donc ces deux corps se rencontrent et se réunissent ; en vertu du théorème des aires, la somme des produits de la masse de chaque molécule par l'aire que le rayon vecteur décrit dans l'unité de temps sera et restera égale au produit de l'expression 17 par $2m$.

4. — Examinons la valeur de ce produit dans le Système solaire. Nous prendrons pour unité de masse la masse du Soleil, et pour unité de distance le rayon de l'orbite terrestre.

La vitesse d'une planète de petite masse, qui se meut dans une orbite circulaire de rayon U est $\sqrt{\frac{f}{U}}$; l'aire décrite par le rayon vecteur pendant l'unité de temps est donc $\frac{1}{2}\sqrt{fU}$, et en désignant la masse de la planète par p , le produit de l'aire par la masse est :

$$\frac{1}{2} p \sqrt{fU} \quad (18)$$

A la somme de ces produits pour les diverses planètes, il faudra ajouter la quantité provenant de la rotation du Soleil. Supposons le

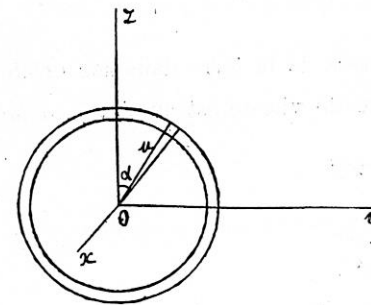


Fig. 3.

Soleil homogène, désignons son rayon par ρ , la durée de sa rotation par θ . Considérons d'abord une couche sphérique de rayon u et d'épaisseur du ; dans cette couche détachons un anneau au moyen de deux cônes, de révolution autour de l'axe de rotation, dont les génératrices font avec cet axe les angles $\alpha, \alpha + d\alpha$. Ce qu'il nous faut calculer, c'est la somme des produits des masses par les aires que décrivent les rayons projetés sur le plan de l'équateur solaire. Nous négligeons les angles que cet équateur et

les plans des orbites des planètes font entre eux. Comme nous prenons la masse du Soleil pour unité, la masse de l'anneau est égale au rapport de son volume à celui du Soleil, donc :

$$\frac{2\pi u \sin \alpha \times u \, d\alpha \, du}{\frac{4}{3} \pi \rho^3}$$

Pour chaque point de l'anneau, le rayon projeté sur l'équateur solaire décrit dans l'unité de temps l'aire

$$\frac{\pi u^2 \sin^2 \alpha}{0}$$

le produit de la masse par l'aire est donc :

$$\frac{3\pi}{2\rho^3} u^4 \sin^3 \alpha \, d\alpha \, du$$

En faisant la somme de ces produits, d'abord pour toute la couche sphérique considérée, puis pour toutes les couches comprises entre le centre et la surface du Soleil, nous trouvons :

$$\frac{3\pi}{2\rho^3} \int_0^{\rho} u^4 \, du \int_0^{\pi} \sin^3 \alpha \, d\alpha = \frac{2\pi\rho^2}{50} \quad (19)$$

Soit T la durée de l'année, la vitesse de la terre dans son orbite est $\frac{2\pi}{T}$, avec les unités choisies cette vitesse est aussi $\sqrt{f}$, donc

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{f}$$

d'où

$$0 = \frac{0}{T} \frac{2\pi}{\sqrt{f}}$$

portant cette valeur dans l'expression 19, elle devient

$$\frac{T\rho^2\sqrt{f}}{50} \quad (20)$$

Nous trouvons donc finalement que, dans le Système solaire, la somme des produits des masses par les aires que les projections des rayons vecteurs décrivent dans l'unité de temps est :

$$\left(\frac{T\rho^2}{50} + \Sigma \frac{p}{2} \sqrt{U}\right) \sqrt{f} \quad (21)$$

Le premier terme se rapporte au Soleil, le second aux planètes.

Le calcul numérique de cette formule donne pour Mercure, Vénus, la Terre et Mars des valeurs insensibles, pour les autres planètes et le Soleil les valeurs suivantes :

Soleil	0,000 06 $\times \sqrt{f}$
Jupiter	0,00 109
Saturne	0,000 44
Uranus	0,000 09
Neptune	0,000 14
Total.....	0,00 182 $\sqrt{f}$

Il faut comparer ce résultat avec la formule 17. Nous supposons $m = \frac{1}{2}$, $\mu = 1$, $\omega = \frac{\pi}{4}$; en égalant la formule 17 à la valeur numérique que nous venons de calculer pour le Système solaire, nous trouvons :

$$R = \sqrt[3]{D^3} \times 0,1476 \quad (22)$$

d'où les valeurs suivantes de R pour diverses valeurs de D

D	R	$\frac{D}{R}$
300·000	7·308	41
1000·000	20·512	49
10·000·000	147·620	68

La valeur $D = 300 \cdot 000$ correspond à la distance de α Centaure, mais d'après ce que nous avons dit des mouvements stellaires, on peut très bien supposer pour D une valeur plus grande, car les masses stellaires devaient être à l'origine plus éloignées les unes des autres qu'aujourd'hui.

Les valeurs que nous trouvons pour R sont très admissibles. La supposition que le défaut d'homogénéité consistait en la division de la masse totale en deux parts égales de volume relativement petit, n'a été faite que pour traiter la question dans l'hypothèse la plus simple ; mais les résultats auxquels elle conduit nous montrent que nous pouvons regarder comme très vraisemblable que le manque d'homogénéité initial a pu, à cause des attractions des étoiles, produire ce mouvement général de révolution dans le sens direct, que nous constatons dans le Système solaire.

Pour les étoiles doubles, les produits des masses par les aires donnent des valeurs numériques beaucoup plus fortes, ce qui provoque quelque difficulté ; pourtant la formule 17 augmente si rapidement avec R , qu'elle permet de rendre compte même de valeurs fort supérieures à celle que nous offre le Système solaire.

La grande excentricité des orbites d'étoiles doubles se comprend facilement, dans notre hypothèse.

ACTION DES ÉTOILES SUR LE MOUVEMENT DES COMÈTES

5. — Le Soleil S , l'étoile E et la comète C étant supposés abandonnés sans vitesses, le mouvement se fera dans un plan, nous le rapporterons à deux axes Sx , Sy menés par le Soleil. Désignons par m la masse du Soleil, μ celle de l'étoile, XY les coordonnées

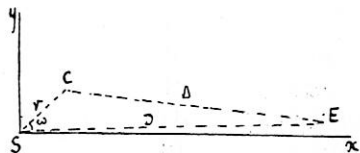


Fig. 4.

de cette étoile, xy les coordonnées de la comète, les distances des trois astres par les lettres suivantes :

$$\begin{aligned} SC &= r \\ SE &= D \\ CE &= \Delta \end{aligned}$$

par f la constante de l'attraction newtonienne. Les équations différentielles du mouvement de la comète sont les suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + fm \frac{x}{r^3} &= f\mu \left(\frac{X-x}{\Delta^3} - \frac{X}{D^3} \right) \\ \frac{d^2y}{dt^2} + fm \frac{y}{r^3} &= f\mu \left(\frac{Y-y}{\Delta^3} - \frac{Y}{D^3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

CHANGEMENT DU GRAND-AXE DE L'ORBITE

Multiplions les équations 23 respectivement par $2dx$, $2dy$ et ajoutons, puis dans les deux premiers termes remplaçons dx , dy par $\frac{dx}{dt} dt$, $\frac{dy}{dt} dt$, il vient :

$$2 \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} dt + 2 \frac{d^2y}{dt^2} \frac{dy}{dt} dt + 2fm \frac{xdx + ydy}{r^3} = 2f\mu \left[\left(\frac{X-x}{\Delta^3} - \frac{X}{D^3} \right) dx + \left(\frac{Y-y}{\Delta^3} - \frac{Y}{D^3} \right) dy \right] \quad (24)$$

Intégrons entre deux époques α, β et désignons par V, r la vitesse et le rayon vecteur de la comète à l'époque β , par V_0, r_0 les mêmes quantités à l'époque α , nous trouvons :

$$V^2 - V_0^2 - 2fm \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) = 2f\mu \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{X-x}{\Delta^3} - \frac{X}{D^3} \right) dx + 2f\mu \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{Y-y}{\Delta^3} - \frac{Y}{D^3} \right) dy \quad (25)$$

Désignons par a_0 le grand-axe de l'orbite osculatrice à l'époque α , c'est-à-dire le grand-axe de l'orbite que la comète décrirait pour la

vitesse initiale V_0 , à la distance r_0 , sans l'action de l'étoile; par a le grand-axe de l'orbite osculatrice à l'époque β , nous avons :

$$V^2 = 2fm \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad V_0^2 = 2fm \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{a_0} \right)$$

portant ces valeurs dans l'équation 25, nous obtenons :

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a_0} + \frac{\mu}{m} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{X}{D^3} - \frac{X}{\Delta^3} + \frac{x}{\Delta^3} \right) dx + \frac{\mu}{m} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{Y}{D^3} - \frac{Y}{\Delta^3} + \frac{y}{\Delta^3} \right) dy \quad (26)$$

Pour nous rendre compte du changement que l'attraction de l'étoile produit dans la quantité $\frac{1}{a}$, remarquons d'abord que les masse μ , m de l'étoile et du Soleil sont deux quantités du même ordre, que nous supposons égales. Si la comète est partie d'une région très lointaine, mais cependant plus rapprochée que le point milieu entre le Soleil et l'étoile, sa distance au Soleil r est toujours inférieure à $\frac{D}{2}$ et sa distance à l'étoile Δ plus grande que $\frac{D}{2}$, comme X est plus petit que D on a les trois inégalités suivantes :

$$\frac{X}{D^3} < \frac{1}{D^2} \quad \frac{X}{\Delta^3} < \frac{8}{D^2} \quad \frac{x}{\Delta^3} < \frac{8x}{D^3}$$

il en résulte que l'intégration des termes en dx dans l'équation 26 donnera des quantités inférieures à :

$$\frac{x_0 - x}{D^2} \quad 8 \frac{x_0 - x}{D^2} \quad 4 \frac{x_0^2 - x^2}{D^3}$$

où x_0 et x désignent les valeurs de l'abscisse de la comète aux époques α , β et D la plus petite valeur de la distance de l'étoile au Soleil entre ces deux époques. Si l'époque β est celle où nous pouvons apercevoir la comète, x est négligeable devant x_0 , et

comme x_0 est inférieure à r_0 , on voit que l'intégration nous donne des termes inférieurs à

$$\frac{1}{r_0} \times \frac{r_0^2}{D^2} \quad \frac{1}{r_0} \times \frac{8r_0^2}{D^2} \quad \frac{1}{r_0} \times \frac{4r_0^3}{D^3}$$

c'est-à-dire entièrement négligeables.

En effet pour l'étoile la plus rapprochée, α Centaure, $D = 300 \cdot 000$ rayons de l'orbite terrestre; lorsque $r_0 = \frac{D}{2}$ la plus grande de ces trois quantités a pour valeur $\frac{1}{75000}$, et lorsque r_0 diminue elles diminuent aussi, de sorte qu'elles sont toujours inférieures à l'approximation que nous pouvons atteindre dans le calcul de $\frac{1}{a}$, car il faut déjà de bonnes observations et des calculs soignés pour déterminer $\frac{1}{a}$ à 0,001 près.

L'action des étoiles n'apportera donc aucun changement appréciable dans les grands-axes des comètes, et si ces astres sont partis sans vitesses initiales d'une région très lointaine, leurs orbites ne nous offriront aucun écart appréciable d'avec la parabole.

CHANGEMENT DE LA DISTANCE PÉRIHÉLIE

6. — Multiplions la première des équations 23 par $-y$, la seconde par x et ajoutons, il vient :

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = f_{\mu} (Yx - Xy) \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{D^3} \right) \quad (27)$$

soit S la dérivée de l'aire que décrit le rayon vecteur SC , ou, ce qui revient au même, l'aire décrite par ce rayon pendant l'unité de temps.

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = 2 \frac{dS}{dt} \quad (28)$$

En désignant par ω l'angle CSE, nous avons :

$$Xy - Yx = Dr \sin \omega \quad (29)$$

D'après les formules 28 et 29, la formule 27 donne :

$$2 \frac{dS}{dt} = -f\mu D^r \sin \omega \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{D^3} \right) \quad (30)$$

L'intégration de cette formule donnera la valeur de S.

D'autre part en désignant par q la distance périhélie de la comète, sa vitesse au périhélie, dans l'orbite parabolique, est :

$$v = \sqrt{\frac{2fm}{q}}$$

et l'aire décrite dans l'unité de temps par le rayon vecteur est :

$$\frac{1}{2} vq = \sqrt{\frac{fmq}{2}}$$

de sorte que dans le mouvement parabolique, l'aire S étant constante, on a :

$$S = \sqrt{\frac{fmq}{2}} \quad (31)$$

Cette formule fera connaître q lorsque la formule 30 aura donné S.

7. — Lorsque la valeur initiale de r est petite relativement à D, on peut intégrer approximativement la formule 30. Pour cela remarquons que le mouvement de la comète dans ce cas différera peu du mouvement non troublé par l'étoile E, mouvement qui se ferait suivant la droite CS, l'angle ω restera donc presque constant et la valeur de r différera peu de celle du mouvement non troublé, en outre $\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{D^3}$ pourra être développé en série, nous aurons alors :

$$\frac{1}{\Delta^3} = \frac{1}{D^3} \left(1 + 3 \frac{r}{D} \cos \omega + \dots \right) \quad (32)$$

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{2fm \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right)} \quad (33)$$

a désigne le grand-axe de l'orbite, égal à très peu près à la distance aphélie, que nous désignerons par R. Portant ces valeurs dans la formule 30 nous trouvons :

$$dS = \frac{3\sqrt{fR} \mu \sin \omega \cos \omega}{2D^3 \sqrt{2m}} \times \frac{r^2 dr}{\sqrt{\frac{R}{r} - 1}}$$

Le premier facteur variant peu, pendant le temps que met la comète pour arriver près du Soleil, on a :

$$S = \frac{3\sqrt{fR} \mu \sin \omega \cos \omega}{2D^3 \sqrt{2m}} \int_r^R \frac{r^2 dr}{\sqrt{\frac{R}{r} - 1}} \quad (34)$$

Nous avons trouvé précédemment

$$\int_r^R \frac{r^2 dr}{\sqrt{\frac{R}{r} - 1}} = -\frac{5\pi R^3}{16}$$

lorsque r est beaucoup plus petit que R.

La formule 34 devient donc :

$$S = -\frac{15\sqrt{fR} \mu \pi R^3 \sin \omega \cos \omega}{32 D^3 \sqrt{2m}} \quad (35)$$

En égalant cette valeur de S à la valeur 31, nous trouvons :

$$q = R \left(\frac{15\mu}{32m} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{R}{D} \right)^6 \pi^2 \sin^2 \omega \cos^2 \omega \quad (36)$$

Telle sera la valeur de la distance périhélie de la comète.

Supposons par exemple $\mu = m$, $\omega = \frac{\pi}{4}$, la formule 36 devient :

$$q = 0,5422 \frac{R^7}{D^6}$$

Si nous faisons dans cette formule $q=2$, nous trouvons

$$R = \sqrt[3]{D^6} \times 1,205$$

d'où, pour diverses valeurs de D :

D	R	$\frac{D}{R}$
300 000	59·660	5,0
1000 000	167·400	6,0
10 000 000	1·205·000	8,3

On voit que si l'on attribue la distance périhélie aux perturbations causées par l'attraction de l'étoile E, il faut faire venir les comètes de distance périhélie 2 d'une région très lointaine, mais qui cependant, pour $\omega = \frac{\pi}{4}$, est cinq à six fois moins éloignée de nous que l'étoile.

INFLUENCE DU DÉFAUT D'HOMOGÉNÉITÉ DE LA MASSE QUI A FORMÉ LE SOLEIL

8. — Pour traiter le problème dans l'hypothèse la plus simple, nous supposons comme précédemment que le défaut d'homogénéité de la masse consistait en sa séparation en deux sphères égales, de diamètre relativement petit.

Reportons nous à la fig. 2, n° 3, nous emploierons les mêmes notations, mais E au lieu de désigner une étoile, désignera une comète de masse négligeable. Les équations différentielles du mouvement de cette comète sont :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 X}{dt^2} &= -f_m \frac{X-x}{\Delta_1^3} - f_m \frac{X+x}{\Delta_2^3} \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} &= -f_m \frac{Y-y}{\Delta_1^3} - f_m \frac{Y+y}{\Delta_2^3} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

CHANGEMENT DU GRAND-AXE DE L'ORBITE

Multiplions ces équations respectivement par $2dX$, $2dY$ et ajoutons, puis remplaçons dans le premier membre dX , dY par $\frac{dX}{dt} dt$, $\frac{dY}{dt} dt$, il vient :

$$2 \frac{d^2 X}{dt^2} \frac{dX}{dt} dt + 2 \frac{d^2 Y}{dt^2} \frac{dY}{dt} dt = \left| \begin{aligned} &-2fm(XdX + YdY) \left(\frac{1}{\Delta_1^3} + \frac{1}{\Delta_2^3} \right) \\ &+ 2fm(xdX + ydY) \left(\frac{1}{\Delta_1^3} - \frac{1}{\Delta_2^3} \right) \end{aligned} \right. \quad (38)$$

Désignons par V et D la vitesse et le rayon vecteur OE de la comète, l'équation précédente peut s'écrire :

$$\frac{dV^2}{dt} = -2fm \frac{dD^2}{D^3} - fm \left(\frac{1}{\Delta_1^3} + \frac{1}{\Delta_2^3} - \frac{2}{D^3} \right) dD^2 + 2fm(xdX + ydY) \left(\frac{1}{\Delta_1^3} - \frac{1}{\Delta_2^3} \right) \quad (39)$$

intégrons entre deux époques α , β :

$$V^2 - V_0^2 = 4fm \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D_0} \right) - fm \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{1}{\Delta_1^3} + \frac{1}{\Delta_2^3} - \frac{2}{D^3} \right) dD^2 + 2fm \int_{\alpha}^{\beta} (xdX + ydY) \left(\frac{1}{\Delta_1^3} - \frac{1}{\Delta_2^3} \right) \quad (40)$$

Si α est l'époque initiale, pour laquelle les vitesses sont nulles, et β l'époque à laquelle les masses A, B se réunissent, on a :

$$\begin{aligned} V_0 &= 0 \\ V^2 &= 4fm \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{a} \right) \end{aligned}$$

a désignant le grand-axe de l'orbite. L'équation 40 donne donc :

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{D_0} + \frac{1}{4} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{1}{\Delta_1^3} + \frac{1}{\Delta_2^3} - \frac{2}{D^3} \right) dD^2 - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (xdX + ydY) \left(\frac{1}{\Delta_1^3} - \frac{1}{\Delta_2^3} \right) \quad (41)$$

lorsque D est grand relativement à r, nous avons les développements en série suivants :

$$\frac{D^3}{\Delta_1^3} = \left[1 - \left(2 \frac{r}{D} \cos \omega - \frac{r^2}{D^2} \right) \right]^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2} \left(2 \frac{r}{D} \cos \omega - \frac{r^2}{D^2} \right) + \frac{15}{8} \left(2 \frac{r}{D} \cos \omega - \frac{r^2}{D^2} \right)^2 + \frac{35}{16} \left(2 \frac{r}{D} \cos \omega - \frac{r^2}{D^2} \right)^3 + \dots$$

$$\frac{D^3}{\Delta_1^3} = 1 + 3 \frac{r}{D} \cos \omega + \frac{r^2}{D^2} \left(-\frac{3}{2} + \frac{15}{2} \cos^2 \omega \right) + \frac{r^3}{D^3} \left(-\frac{15}{2} \cos \omega + \frac{35}{2} \cos^3 \omega \right) + \dots$$

en changeant $\cos \omega$ en $-\cos \omega$, nous trouvons

$$\frac{D^3}{\Delta_2^3} = 1 - 3 \frac{r}{D} \cos \omega + \frac{r^2}{D^2} \left(-\frac{3}{2} + \frac{15}{2} \cos^2 \omega \right) - \frac{r^3}{D^3} \left(-\frac{15}{2} \cos \omega + \frac{35}{2} \cos^3 \omega \right) + \dots$$

d'où

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\Delta_1^3} + \frac{1}{\Delta_2^3} - \frac{2}{D^3} &= \frac{r^2}{D^5} (-3 + 15 \cos^2 \omega) + \dots \\ \frac{1}{\Delta_1^3} - \frac{1}{\Delta_2^3} &= \frac{6r}{D^4} \cos \omega + \dots \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Les termes négligés renferment au moins la quatrième puissance de $\frac{r}{D}$ pour la première formule, la troisième puissance pour la seconde formule. Portons ces valeurs dans la formule 41, et faisons passer l'axe des x par la position initiale de la comète; la comète s'écartera peu de cet axe de sorte que dY sera négligeable devant dX , et l'on aura à très peu près :

$$\begin{aligned} \omega &= \text{angle } xOA \\ dX &= dD \\ x &= r \cos \omega \end{aligned}$$

la formule 41 devient :

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{D_0} + \frac{15 \cos^2 \omega - 3}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{r^2}{D^4} dD - 3 \cos^3 \omega \int_{\alpha}^{\beta} \frac{r^2}{D^4} dD$$

ou

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{D_0} + \frac{9 \cos^2 \omega - 3}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{r^2}{D^4} dD \quad (43)$$

Or :

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{fm}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

et

$$\left(\frac{dD}{dt} \right)^2 = 4fm \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D_0} \right) \quad \text{à très peu près}$$

donc :

$$dD = \sqrt{8 \frac{1}{D} - \frac{1}{D_0}} \frac{1}{r} dr$$

et la formule 43 devient :

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{D_0} + \frac{9 \cos^2 \omega - 3}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{D^4} \sqrt{8r_0 \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D_0} \right)} \frac{r^2 dr}{\sqrt{\frac{r_0}{r} - 1}} \quad (44)$$

La distance D diminue de l'époque α à l'époque β , de sorte que si nous lui donnons la valeur correspondante à l'époque β , nous augmentons la quantité sous le signe $\int$, le second terme de la formule 44 est donc, en valeur absolue, inférieur à

$$\frac{9 \cos^2 \omega - 3}{2D^4} \sqrt{8r_0 \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D_0} \right)} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{r^2 dr}{\sqrt{\frac{r_0}{r} - 1}} \quad (45)$$

D désignant ici la valeur de la distance OE à l'époque β . La valeur de r est r_0 à l'époque α , zéro à l'époque β , nous avons vu n° 3 que la valeur de l'intégrale est alors $-\frac{5\pi r_0^3}{16}$, l'expression 45 devient donc :

$$-\frac{(9 \cos^2 \omega - 3) 5\pi r_0^3}{32D^4} \sqrt{8r_0 \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D_0} \right)} \quad (46)$$

r_0 valeur initiale de r , que nous avons aussi désignée par R , est beaucoup plus petite que D_0 et D ; cette expression 46 est donc beaucoup plus petite que $\frac{1}{D}$ et la valeur de $\frac{1}{a}$ donnée par la formule 44 diffère à peine de zéro.

L'orbite ne nous offrira donc aucun écart appréciable d'avec la parabole.

CHANGEMENT DE LA DISTANCE PÉRIHÉLIE

9. — Multiplions la première des équations 37 par $-Y$, la seconde par X et ajoutons :

$$X \frac{d^2 Y}{dt^2} - Y \frac{d^2 X}{dt^2} = f m (Xy - Yx) \left(\frac{1}{\Delta_1^3} - \frac{1}{\Delta_2^3} \right) \quad (47)$$

Désignons par S l'aire décrite par le rayon vecteur de la comète pendant l'unité de temps, en opérant comme au n° 3, nous déduisons de l'équation 47 :

$$2 \frac{dS}{dt} = f m D r \sin \omega \left(\frac{1}{\Delta_1^3} - \frac{1}{\Delta_2^3} \right) \quad (48)$$

Cette équation ne diffère de l'équation 9 que par le changement de μ en m et du coefficient 4 en -2 . Nous trouvons donc, comme au n° 3, en négligeant le cube de $\frac{r}{D}$:

$$dS = - \frac{3 \sqrt{2} f R m \sin \omega \cos \omega}{D^3} \times \frac{r^2 dr}{\sqrt{\frac{R}{r} - 1}} \quad (49)$$

Intégrons entre l'époque initiale α où les trois corps sont abandonnés sans vitesses et l'époque β où A et B se réunissent; si la distance initiale D_0 est beaucoup plus grande que R , D ne subira pas entre ces deux époques une diminution considérable. D'ailleurs, en

remplaçant dans l'équation 49 cette distance variable par sa valeur à l'époque α puis à l'époque β on obtient par l'intégration deux limites entre lesquelles se trouve S . L'angle ω varie très peu aussi et peut être regardé comme constant. Nous avons donc :

$$S = - \frac{3 \sqrt{2} f R m \sin \omega \cos \omega}{D^3} \int_R^r \frac{r^2 dr}{\sqrt{\frac{R}{r} - 1}} \quad (50)$$

D désignant une valeur, intermédiaire entre celles qui correspondent aux époques α et β , peu différente de celle D_0 qui correspond à l'époque initiale α .

L'intégrale étant, d'après la formule 16, égale à $-\frac{5\pi R^3}{16}$, nous avons :

$$S = \frac{15 \sqrt{2} f m R \pi R^3 \sin \omega \cos \omega}{16 D^3} \quad (51)$$

Telle sera l'aire S , lorsque les deux masses A, B se réuniront, et à partir de cet instant elle reste constante. En égalant la formule 51 à la formule 31 qui donne S en fonction de la distance périhélie q , nous trouvons :

$$q = \frac{225 \pi^2 R^7 \sin^2 \omega \cos^2 \omega}{64 D^6} \quad (52)$$

Telle sera la valeur de la distance périhélie de la comète.

Supposons $\omega = \frac{\pi}{4}$, $q = 2$; la formule précédente nous donne :

$$D = 1,2770 \sqrt[6]{R^7}$$

Cette valeur de D est dans le rapport constant 0,137 avec celle du n° 4, formule 22, qui représentait la distance de l'étoile au Soleil.

Si nous donnons par exemple à R les valeurs numériques trouvées n° 4, nous trouvons pour D les valeurs suivantes :

R	D	$\frac{D}{R}$
7·308	41·100	5,6
20·512	137·000	6,7
147·620	1·370·000	9,3

Ces nombres nous montrent que le défaut d'homogénéité de la masse, par la condensation de laquelle le Soleil a été formé, suffit à expliquer la distance périhélie des comètes.

La forme des orbites cométaires n'est donc pas un obstacle péremptoire à l'hypothèse du repos initial, puisque les deux causes que nous venons d'examiner, attraction des étoiles et manque d'homogénéité, ont empêché les comètes de tomber en ligne droite sur le Soleil.

Trois corps abandonnés sans vitesses se réuniront-ils en une masse unique.

10. — Nous avons dit n° 1 qu'il n'est pas prouvé que trois corps abandonnés sans vitesses doivent se réunir en une masse unique. La formule 52 montre en effet un cas où il n'en est pas ainsi : celui où deux des corps sont égaux, le troisième très petit et dans une position initiale éloignée des deux autres. Si la composition chimique des deux corps principaux est telle que, lorsque le troisième arrivera au voisinage de la masse incandescente formée par leur réunion, cette masse ait un rayon inférieur à la distance q , les trois corps resteront séparés en deux masses distinctes.

On peut objecter à la rigueur qu'un corpuscule, même très petit, n'ayant jamais une masse nulle, les deux corps principaux ne tomberont pas rigoureusement en ligne droite l'un sur l'autre ; et que peut-être s'en détacheront quelques parcelles qui pourraient

aller heurter le petit corps et le ramener vers la masse centrale. Cette objection mériterait d'être examinée, mais au premier abord il paraît peu probable qu'elle soit valable.

CONCLUSION

11. — Le temps T qu'un corps de petite masse, soumis à la seule attraction du Soleil, et abandonné sans vitesse à une très grande distance D de cet astre met pour parvenir jusqu'à lui est très considérable. Ce temps se calcule facilement par la troisième loi de Kepler ; en prenant pour unités l'année et le rayon de l'orbite terrestre, on trouve :

$$T = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{D^3}{2}}$$

d'où les valeurs numériques suivantes :

D	T
100	177 ans
1000	5·590
10·000	176·780
100·000	5·590·200
1000·000	176·780·000

Ces valeurs considérables peuvent nous faire penser que pour un certain nombre de comètes le passage au périhélie que nous observons est le premier ; mais il est bien difficile de savoir si oui ou non il en est ainsi. Il est impossible de préciser la distance de laquelle viennent ces comètes, car elle dépend de la distribution initiale des masses dans la nébulosité solaire et de la distribution initiale des masses voisines. Cette distance peut, d'après ce qui a été dit, varier depuis quelques dizaines de mille rayons de l'orbite terrestre jusqu'à une valeur supérieure aux distances où se trouvent aujourd'hui les étoiles les plus rapprochées de nous, car les masses stellaires

devaient être à l'origine plus éloignées les unes des autres qu'aujourd'hui. Cela il est vrai nous obligerait à placer l'époque initiale à plusieurs millions d'années dans le passé ; mais aucune raison soit scientifique, soit philosophique ou théologique ⁽¹⁾ ne nous empêche de le faire.

Dans tous les cas, on peut dire que depuis les premiers âges de la Création, ces comètes font partie du Système solaire, puisqu'elles ont toujours été soumises à l'action prépondérante de la masse qui constitue ce système, et n'ont fait que graviter vers son centre. Quant à la forme de leurs orbites, on ne peut guère dire qu'elle est elliptique, car les grands-axes de ces ellipses sont si considérables que les moindres perturbations produites par les planètes les raccourciraient beaucoup ou donneront des hyperboles.

Les orbites sont donc à proprement parler : des paraboles, sauf de très légers écarts, dont les plus forts sont dus aux planètes et les moindres à la position initiale de la comète.

Pour l'avenir, celles de ces comètes que les perturbations planétaires auront rendues hyperboliques s'éloigneront indéfiniment du Soleil. Tant qu'elles restent soumises à l'action prépondérante de cet astre, on peut encore dire qu'elles font partie du Système solaire, bien que s'éloignant du Soleil. Si nous augmentons le temps au-delà de toute limite ces comètes quitteront entièrement le Système solaire. Mais en présence de ces millions d'années, nous devons nous rappeler que l'éternité ne nous appartient pas, et que, d'ici à ces époques si lointaines, nous ne pouvons savoir ce que le Créateur aura décidé de son œuvre.

Ainsi les comètes qui passent au périhélie pour la première fois pourront être appelées paraboliques ; s'en trouve-t-il actuellement, parmi celles que nous voyons, la chose est très possible, mais nous ne pouvons l'affirmer.

A côté de ces comètes paraboliques, se trouvent les comètes

(1) Voir, par exemple, *La Conception scientifique de l'Univers*, par M. l'abbé Constant. Paris, F. Levé, éditeur.

elliptiques, ce sont celles qui lorsqu'elles sont venues pour la première fois au périhélie ont eu leurs grands-axes raccourcis soit par quelque perturbation subie de la part des planètes, soit parce que le milieu qu'elles ont traversé près du Soleil offrait encore quelque trace de résistance au mouvement. Les grands-axes des orbites de ces comètes peuvent varier depuis les valeurs que nous rencontrons dans les comètes à courte période, jusqu'à plusieurs dizaines de mille fois le rayon de l'orbite terrestre, valeurs qui se trouvent être du même ordre que les petites perturbations planétaires et pour lesquelles la comète peut être appelée parabolique.

L'hypothèse du repos initial n'est donc pas aussi inadmissible qu'on l'a pensé jusqu'ici. Certainement elle conduit à des conséquences assez hardies ; mais ces conséquences peuvent être admises et elles paraissent, particulièrement pour ce qui concerne les comètes, fort rationnelles.

Il est à remarquer que des hypothèses que nous avons faites pour nos calculs, on pourrait déduire certaines conséquences relativement à la disposition des éléments des orbites cométaires. Mais si ces conséquences ne se vérifiaient pas dans la nature, ce ne serait pas une raison suffisante pour rejeter entièrement les idées que nous venons d'exposer. Nous avons en effet choisi pour nos calculs les hypothèses les plus simples. On peut supposer le défaut d'homogénéité primitif plus ou moins compliqué, on peut supposer que plusieurs masses stellaires ont exercé une action sensible. Il est donc difficile de savoir qu'elle a dû être la véritable disposition des éléments des orbites cométaires.

TABLE DES MATIÈRES

N°	Pages
1. — Introduction	1
2. — Mouvements propres des étoiles	4
3. — Le théorème des aires appliqué aux mouvements intérieurs du Système solaire.	7
4. — Valeur numérique déduite des observations	11
5. — Action des étoiles sur le mouvement des comètes, change- ment du grand-axe.	14
6. — Changement de la distance périhélie	17
7. — Valeurs numériques de la distance périhélie	18
8. — Influence du défaut d'homogénéité de la masse qui a formé le Soleil, changement du grand-axe.	20
9. — Changement de la distance périhélie	24
10. — Trois corps abandonnés sans vitesses se réuniront-ils en une masse unique	26
11. — Conclusion	27

(Année 1899)