

CORRECTION DU TD N°2

OBJECTIFS :

- Etude d'une série bidimensionnelle par l'intermédiaire du tableau de calculs global
- Calcul des caractéristiques des séries dérivées

Exercice 1 Passage des données individualisées aux données regroupées

Liste des 20 personnes (données individualisées)

NOM	AGE	SECTEUR	NOM	AGE	SECTEUR
M LEBON	57 ans	AGRICOLE	Melle POTICHE	34 ans	INDUSTRIE
Mme SCHMITT	32 ans	INDUSTRIE	M MARIOTTE	52 ans	INDUSTRIE
M DURAND	41 ans	INDUSTRIE	M GALL	41 ans	AGRICOLE
M LEGRAND	23 ans	INDUSTRIE	Mme CHARTON	46 ans	INDUSTRIE
Mme NIVELET	28 ans	SERVICES	Melle ZOE	22 ans	AGRICOLE
Melle AUBERT	24 ans	INDUSTRIE	Mme KHOUIL	59 ans	INDUSTRIE
M PARISSET	47 ans	SERVICES	M HEBERT	31 ans	INDUSTRIE
Mme WEBER	36 ans	SERVICES	M JEAN	51 ans	SERVICES
Mme MALAURE	39 ans	AGRICOLE	Melle JEANTOT	40 ans	INDUSTRIE
Melle DOUHOUR	27 ans	SERVICES	M MERIEUX	50 ans	AGRICOLE

1 et 2. Tableau à double entrée (données regroupées)

		j=1	j=2	j=3		
Secteur y Age x		Agriculture	Industrie	Services	n _{i.}	
						x ₁
i = 1	[20 ; 30 [	25	1	2	2	5
i = 2	[30 ; 40 [	35	1	3	1	5
i = 3	[40 ; 50 [	45	1	3	1	5
i = 4	[50 ; 60 [	55	2	2	1	5
n _{.j}		5	10	5	N = n _{..} = 20	

3. Complétons les égalités suivantes :

$$\begin{array}{llllll}
 x_2 = 35 & - & y_2 = \text{Industrie} & - & x_4 = 55 & - & y_1 = \text{Agriculture} \\
 n_{32} = 3 & - & n_{23} = 1 & - & n_{43} = 1 & - & n_{33} = 1
 \end{array}$$

Exercice 2

Série bidimensionnelle

1 Calcul de A, B, C, D, E et F

$$A = 20 + 10 + 8 + 2 = \underline{40}$$

$$B = 40 \times 2 = \underline{80}$$

$$C = 40 \times 2^2 = \underline{160}$$

$$\bullet \quad \bullet$$

$$\updownarrow + \updownarrow : D = 20 \times 7 + 10 \times 9 + 8 \times 13 + 2 \times 23 = \underline{380}$$

$$\bullet \quad \bullet$$

$$\bullet^2 \quad \bullet^2$$

$$\updownarrow + \updownarrow : E = 20 \times 7^2 + 10 \times 9^2 + 8 \times 13^2 + 2 \times 23^2 = \underline{4200}$$

$$\bullet \quad \bullet$$

$$F = 2 \times 380 = \underline{760}$$

Calcul de A', B', C', D', E' et F'

$$A' = 1 + 8 + 15 + 16 + 10 = \underline{50}$$

$$B' = 50 \times 13 = \underline{650}$$

$$C' = 50 \times 13^2 = \underline{8450}$$

$$\bullet \leftrightarrow \bullet$$

$$+ : D' = 1 \times 1 + 8 \times 2 + 15 \times 3 + 16 \times 4 + 10 \times 5 = \underline{176}$$

$$\bullet \leftrightarrow \bullet$$

$$\bullet^2 \leftrightarrow \bullet^2$$

$$+ : E' = 1 \times 1^2 + 8 \times 2^2 + 15 \times 3^2 + 16 \times 4^2 + 10 \times 5^2 = \underline{674}$$

$$\bullet^2 \leftrightarrow \bullet^2$$

$$F' = 13 \times 176 = \underline{2288}$$

Tableau complété : Cf. document joint

2. Distributions marginales

Caractéristiques marginales :

- du nombre x de pièces :

$$\text{Moyenne : } \bar{\bar{x}} = \frac{1}{n_{\bullet\bullet}} \left[\sum_i n_{i\bullet} x_i \right] = \frac{1}{250} \times 810 = \underline{3,24 \text{ pièces}}$$

$$\text{Variance : } V(x) = \frac{1}{n_{\bullet\bullet}} \left[\sum_i n_{i\bullet} x_i^2 \right] - \bar{\bar{x}}^2 = \frac{1}{250} \times 2850 - 3,24^2 = \underline{0,9024}$$

$$\text{Ecart-type : } \sigma(x) = \sqrt{V(x)} \approx \underline{0,95 \text{ pièces}}$$

- du revenu annuel disponible y :

Moyenne : $\bar{y} = \frac{1}{n_{..}} \left[\sum_j n_{.j} y_j \right] = \frac{1}{250} \times 2570 = \underline{10,28 \text{ k€}}$

Variance : $V(y) = \frac{1}{n_{..}} \left[\sum_j n_{.j} y_j^2 \right] - \bar{y}^2 = \frac{1}{250} \times 31050 - 10,28^2 = \underline{18,5216}$

Ecart-type : $\sigma(y) = \sqrt{V(y)} \approx \underline{4,304 \text{ k€}}$

Résumé :

	moyenne	variance	écart-type
x	$\bar{x} = 3,24 \text{ pièces}$	$V(x) = 0,9024$	$\sigma(x) \approx 0,95 \text{ pièces}$
y	$\bar{y} = 10,28 \text{ k€}$	$V(y) = 18,5216$	$\sigma(y) \approx 4,304 \text{ k€}$

3. Distributions conditionnelles

- a) Caractéristiques conditionnelles du nombre x de pièces du logement principal selon le revenu annuel disponible y = y_j :

- Pour j = 3 : (donc tous les résultats utiles aux calculs demandés se situent dans la colonne j = 3)

Moyenne : $\bar{x}_3 = \frac{1}{n_{.3}} \left[\sum_i n_{i3} x_i \right] = \frac{1}{50} \times 176 = \underline{3,52 \text{ pièces}}$

Variance : $V_3(x) = \frac{1}{n_{.3}} \left[\sum_i n_{i3} x_i^2 \right] - \bar{x}_3^2 = \frac{1}{50} \times 674 - 3,52^2 = \underline{1,0896}$

- Pour j = 4 : (donc tous les résultats utiles aux calculs demandés se situent dans la colonne j = 4)

Moyenne : $\bar{x}_4 = \frac{1}{n_{.4}} \left[\sum_i n_{i4} x_i \right] = \frac{1}{20} \times 74 = \underline{3,70 \text{ pièces}}$

Variance : $V_4(x) = \frac{1}{n_{.4}} \left[\sum_i n_{i4} x_i^2 \right] - \bar{x}_4^2 = \frac{1}{20} \times 288 - 3,70^2 = \underline{0,7100}$

- Tableau récapitulatif :

j =	n _{.j}	$\bar{x}_j$	$V_j(x)$
1	80	2,65	0,4775
2	100	3,48	0,7696
3	? 50	? 3,52	? 1,0896
4	? 20	? 3,70	? 0,7100
	n _{..} = 250		

b) Caractéristiques conditionnelles du revenu annuel disponible y selon le nombre de pièces du logement principal x = x_i

- Pour i = 2 : (donc tous les résultats utiles aux calculs demandés se situent sur la ligne i = 2)

$$\text{Moyenne : } \bar{y}_2 = \frac{1}{n_{2\bullet}} \left[\sum_j n_{2j} y_j \right] = \frac{1}{40} \times 380 = \underline{9,5 \text{ k€}}$$

$$\text{Variance : } V_2(y) = \frac{1}{n_{2\bullet}} \left[\sum_j n_{2j} y_j^2 \right] - \bar{y}_2^2 = \frac{1}{40} \times 4200 - 9,5^2 = \underline{14,75}$$

- Pour i = 3 : (donc tous les résultats utiles aux calculs demandés se situent sur la ligne i = 3)

$$\text{Moyenne : } \bar{y}_3 = \frac{1}{n_{3\bullet}} \left[\sum_j n_{3j} y_j \right] = \frac{1}{100} \times 930 = \underline{9,3 \text{ k€}}$$

$$\text{Variance : } V_3(y) = \frac{1}{n_{3\bullet}} \left[\sum_j n_{3j} y_j^2 \right] - \bar{y}_3^2 = \frac{1}{100} \times 10060 - 9,3^2 = \underline{14,11}$$

- Tableau récapitulatif :

i =	n _{i•}	$\bar{y}_i$	$V_i(y)$
1	10	8,2	3,36
2	? 40	? 9,5	? 14,75
3	? 100	? 9,3	? 14,11
4	80	11,45	21,8975
5	20	13,1	20,59
n _{..} = 250			

4. Avez-vous compris ?

QUESTION 1 : "Quel est le revenu annuel disponible moyen des 250 ménages étudiés ?"

REPONSE : Il s'agit de : $\bar{\bar{y}} = \underline{10,28 \text{ k€}}$

QUESTION 2 : "Quel est le revenu annuel disponible moyen des ménages disposant de 3 pièces ?"

REPONSE : Il s'agit de : $\bar{y}_3 = \underline{9,3 \text{ k€}}$

QUESTION 3 : "De combien de pièces en moyenne disposent les 250 ménages étudiés ?"

REPONSE : Il s'agit de : $\bar{\bar{x}} = \underline{3,24 \text{ pièces}}$

QUESTION 4 : "De combien de pièces en moyenne disposent les ménages ayant un revenu annuel disponible compris entre 10 000 € et 16 000 € ?"

REPONSE : Il s'agit de : $\bar{x}_3 = \underline{3,52 \text{ pièces}}$

5. Changement de variable

a) Expression de z en fonction de y :

z = partie incompressible + 10 % de y

$$z = 1 + \frac{10}{100}y$$

$$z = 1 + 0,1y$$

b) Pour l'ensemble des 250 ménages étudiés :

Dépense annuelle alimentaire moyenne :

$$\bar{z} = 0,1\bar{y} + 1 = 0,1 \times 10,28 + 1 = 2,028 \text{ k€}$$

Ecart-type de la dépense alimentaire annuelle :

$$\sigma(z) = \sigma(0,1y + 1) = |0,1| \sigma(y) \approx 0,1 \times 4,304 = 0,4304 \text{ k€}$$

Exercice 3

Série bidimensionnelle

1. Calculs détaillés et autres calculs dans le TABLEAU II

Cf. **TABLEAU II**

2. Caractéristiques marginales :

➡ de l'âge x :

■ Moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{n_{..}} \left[\sum_i n_{i.} x_i \right] = \frac{1}{400} \times 14\,300 = \boxed{35,75 \text{ ans}}$

■ Variance : $V(x) = \frac{1}{n_{..}} \left[\sum_i n_{i.} x_i^2 \right] - \bar{x}^2 = \frac{1}{400} \times 581\,000 - 35,75^2 = \boxed{174,4375}$

■ Ecart-type : $\sigma(x) = \sqrt{V(x)} \approx \boxed{13,21 \text{ ans}}$

➡ de l'ancienneté dans le chômage :

■ Moyenne : $\bar{y} = \frac{1}{n_{..}} \left[\sum_{i,j} n_{ij} y_j \right] = \frac{1}{400} \times 2\,160 = \boxed{5,40 \text{ mois}}$

■ Variance : $V(y) = \frac{1}{n_{..}} \left[\sum_{i,j} n_{ij} y_j^2 \right] - \bar{y}^2 = \frac{1}{400} \times 25\,875 - 5,40^2 = \boxed{35,5275}$

■ Ecart-type : $\sigma(y) = \sqrt{V(y)} \approx \boxed{5,96 \text{ mois}}$

3. Caractéristiques de l'indemnité mensuelle de chômage

a) Moyenne de l'indemnité mensuelle de chômage pour les 400 chômeurs

Il s'agit de calculer la moyenne marginale de la variable I, liée à la variable y par la relation :

$$I = -0,025y + 1,2. \text{ On a :}$$

$$\bar{I} = \overline{-0,025y + 1,2}$$

Puis :

$$\bar{I} = -0,025\bar{y} + 1,2$$

$$\text{Car, pour } a, b \text{ réels : } X = ay + b \Rightarrow \bar{X} = a\bar{y} + b$$

$$\bar{I} = -0,025 \times 5,40 + 1,2$$

$$\text{Car : } \bar{y} = 5,40 \text{ mois}$$

$$\bar{I} = \boxed{1,065 \text{ k€}}$$

b) Ecart-type de l'indemnité mensuelle de chômage pour les 400 chômeurs

Il s'agit de calculer l'écart-type marginal de la variable I, liée à la variable y par la relation :

$$I = -0,025y + 1,2. \text{ On a :}$$

$$\sigma(I) = \sigma(-0,025y + 1,2)$$

Puis :

$$\sigma(I) = |-0,025| \sigma(y)$$

$$\text{Car, pour } a, b \text{ réels : } X = ay + b \Rightarrow \sigma(X) = |a| \sigma(y)$$

$$\sigma(I) = 0,025 \times 5,96$$

$$\text{Car : } \sigma(y) = 5,96 \text{ mois}$$

$$\sigma(I) = \boxed{0,149 \text{ k€}}$$

4. Caractéristiques conditionnelles de l'ancienneté dans le chômage selon i = 3

■ Moyenne : $\bar{y}_3 = \frac{1}{n_{3\bullet}} \left[\sum_j n_{3j} y_j \right] = \frac{1}{80} \times 574 = \boxed{7,175 \text{ mois}}$

■ Variance : $V_3(y) = \frac{1}{n_{3\bullet}} \left[\sum_j n_{3j} y_j^2 \right] - \bar{y}_3^2 = \frac{1}{80} \times 7\,317,5 - 7,175^2 = \boxed{39,988125}$

Caractéristiques conditionnelles de l'ancienneté dans le chômage selon i = 4

■ Moyenne : $\bar{y}_4 = \frac{1}{n_{4\bullet}} \left[\sum_j n_{4j} y_j \right] = \frac{1}{50} \times 550 = \boxed{11 \text{ mois}}$

■ Variance : $V_4(y) = \frac{1}{n_{4\bullet}} \left[\sum_j n_{4j} y_j^2 \right] - \bar{y}_4^2 = \frac{1}{50} \times 9\,875 - 11^2 = \boxed{76,5}$

5. Caractéristiques conditionnelles de l'âge des chômeurs selon j = 4 (calculs à la main)

■ Moyenne : $\bar{x}_4 = \frac{1}{n_{\bullet 4}} \left[\sum_i n_{i4} x_i \right]$

$$\bar{x}_4 = \frac{1}{70} \times (0 \times 20 + 4 \times 30 + 27 \times 40 + 10 \times 50 + 29 \times 60)$$
$$\bar{x}_4 = \frac{1}{70} \times 3440$$
$$\bar{x}_4 \approx \boxed{49,14 \text{ ans}}$$

■ Variance :

$$V_4(x) = \frac{1}{n_{\bullet 4}} \left[\sum_i n_{i4} x_i^2 \right] - \bar{x}_4^2$$

$$V_4(x) = \frac{1}{70} \times (0 \times 20^2 + 4 \times 30^2 + 27 \times 40^2 + 10 \times 50^2 + 29 \times 60^2) - 49,14^2$$

$$V_4(x) = \frac{1}{70} \times 176\,200 - 49,14^2$$

$$V_4(x) \approx \boxed{102,1224}$$