

1. Le corps noir

Planck a été le premier à faire, en 1900, l'hypothèse que les niveaux d'énergie possibles du champ électromagnétique d'un corps noir, sont quantifiés. À une fréquence donnée ν , il suppose que ces derniers ne peuvent être données que par des multiples entiers de $h\nu$.

Nous cherchons ici à savoir pourquoi une relation linéaire $E_n(\nu) = nh\nu$ entre l'énergie et la fréquence a été utilisée. En fait Planck répond lui-même à cette question :

duction. Dass das für eine Resonatorgattung angenommene Energieelement ϵ proportional sein muss der Schwingungszahl ν , lässt sich unmittelbar aus dem höchst wichtigen WIEN'schen sogenannten Verschiebungsgesetz folgern. Die

Que, pour un oscillateur donné, l'élément d'énergie ϵ doit être proportionnel (comprendre linéaire) à la fréquence d'oscillation ν , peut se déduire de la nécessité que la distribution obéisse à la loi du déplacement de Wien.

i) Démontrez que la position en fréquence du maximum de la distribution de Planck $\rho(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}$ est linéairement proportionnelle à T tel que théorisé par Wien en 1893 et vérifié expérimentalement à l'époque.

SOLUTION

On trouve un maximum en cherchant le point où la dérivée s'annule. On sait que $\nu \rightarrow 0$ et $\nu \rightarrow \infty$ donne zéro et donc il y a un maximum entre les deux. $\nu \rightarrow 0$ nécessite un règle des l'Hospital.

À T donné, on a donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(\nu, T)}{\partial \nu} &= \frac{8\pi h}{c^3} \frac{3\nu^2}{e^{h\nu/kT} - 1} - \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{(e^{h\nu/kT} - 1)^2} \frac{\partial (e^{h\nu/kT} - 1)}{\partial \nu} \\ &= \frac{8\pi h}{c^3} \frac{3\nu^2}{e^{h\nu/kT} - 1} - \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{(e^{h\nu/kT} - 1)^2} h/kT e^{h\nu/kT} \\ &= \frac{8\pi h \nu^2 3e^{h\nu/kT}}{c^3 (e^{h\nu/kT} - 1)^2} \left[(1 - e^{-h\nu/kT}) - \frac{h\nu/kT}{3} \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

Le maximum se trouve donc au point ν_m solution de l'équation transcendante :

$$(1 - e^{-h\nu_m/kT}) - \frac{h\nu_m/kT}{3} = 0. \quad (2)$$

En introduisant la variable $x = h\nu_m/kT$, on sait que pour toute température, la solution à

$$(1 - e^{-x}) - \frac{x}{3} = 0 \quad (3)$$

sera la même x_m . Conséquemment, $h\nu_m/kT = x_m$ nous donne un maximum à $\nu_m = \frac{kx_m}{h}T$ linéaire en température.

La véritable solution (graphique ou numérique) étant $x = 2.8214393721220787$

ii) Montrez qu'avec une discrétisation différente : $E_n = n\tilde{h}\nu^\alpha$, avec $\alpha \neq 1$ le comportement attendu ne peut être reproduit.

SOLUTION

La seule modification au calcul fait en cours devient alors le remplacement de ϵ par $\tilde{h}\nu^\alpha$. L'énergie moyenne est toujours donnée par $\bar{E} = \frac{\epsilon}{e^{\beta\epsilon}-1}$ et la densité de modes reste inchangée puisqu'elle n'est liée qu'à la relation entre ν et λ .

On trouve alors

$$\rho(\nu, T) = \frac{8\pi\tilde{h}}{c^3} \frac{\nu^2\nu^\alpha}{e^{\tilde{h}\nu^\alpha/kT} - 1} = \frac{8\pi\tilde{h}}{c^3} \frac{\nu^{\alpha+2}}{e^{\tilde{h}\nu^\alpha/kT} - 1}. \quad (4)$$

La dérivée s'écrit alors (fonction composées) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(\nu, T)}{\partial \nu} &= \frac{8\pi\tilde{h}}{c^3} \left((\alpha + 2) \frac{\nu^{\alpha+1}}{e^{\tilde{h}\nu^\alpha/kT} - 1} - \frac{\nu^{\alpha+2}}{(e^{\tilde{h}\nu^\alpha/kT} - 1)^2} \frac{\partial (e^{\tilde{h}\nu^\alpha/kT} - 1)}{\partial \nu} \right) \\ &= \frac{8\pi\tilde{h}}{c^3} \left((\alpha + 2) \frac{\nu^{\alpha+1}}{e^{\tilde{h}\nu^\alpha/kT} - 1} - \frac{\nu^{\alpha+2}}{(e^{\tilde{h}\nu^\alpha/kT} - 1)^2} e^{\tilde{h}\nu^\alpha/kT} \tilde{h}\alpha\nu^{\alpha-1}/kT \right) \quad (5) \end{aligned}$$

Dont le zéro se trouve à ν_m solution de

$$\left(\frac{\nu^{\alpha+1}}{e^{\tilde{h}\nu^\alpha/kT} - 1} \right) \left((\alpha + 2) (e^{\tilde{h}\nu^\alpha/kT} - 1) - \nu e^{\tilde{h}\nu^\alpha/kT} \tilde{h}\alpha\nu^{\alpha-1}/kT \right) = 0 \quad (6)$$

Et donc à ν_m solution de

$$(\alpha + 2) \left(e^{\tilde{h}\nu^\alpha/kT} - 1 \right) - \alpha e^{\tilde{h}\nu^\alpha/kT} \tilde{h}\nu^\alpha/kT = 0 \quad (7)$$

Du coup, on trouve encore une fois une équation transcendante mais qui cette fois dépend de la variable $x = \tilde{h}\nu^\alpha/kT$. Le maximum se trouve donc à $\tilde{h}\nu^\alpha/kT$ constant et donc $\nu_m^\alpha \propto T$.

Tel que mentionné en CM, l'équilibre thermodynamique classique mène à la loi de Rayleigh-Jeans $\rho(\nu, T) = \frac{8\pi kT\nu^2}{c^3}$ et à la catastrophe de l'ultraviolet (un nom dû à Paul Ehrenfest).

iii) Démontrez que la limite $h \rightarrow 0$ de la distribution de Planck reproduit cette loi et expliquez physiquement cette constatation.

SOLUTION

En exprimant l'exponentielle en terme de son développement limité au premier ordre :

$$e^{h\nu/kT} \approx 1 + h\nu/kT, \quad (8)$$

on trouve

$$\rho(\nu, T) \approx \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{h\nu/kT} = \frac{8\pi}{c^3} \frac{\nu^3}{\nu/kT} = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 kT. \quad (9)$$

iv) Puisque le développement en série de l'exponentielle ne fait intervenir que $\frac{h}{kT}$ on pourrait croire qu'à haute température on devrait retrouver la loi de Rayleigh-Jeans (et donc la catastrophe de l'ultraviolet). Où est l'erreur ?

SOLUTION

$$e^{h\nu/kT} \approx 1 + h\nu/kT + \frac{1}{2}(h\nu/kT)^2 + \dots???, \quad (10)$$

n'est convergent que lorsque $(h\nu/kT) \ll 1$. Or on sait que le maximum en fréquence est à $h\nu/kT \approx 2.84$. Par conséquent, le développement limité ne peut être valide que pour les fréquences en deçà du maximum. Même à haute température, la série tronquée ne peut valable sur toute la plage

en fréquence. Seule la limite continue, $h \rightarrow 0$ peut converger sur toute la plage en fréquence puisque h . On constate du coup qu'il faut un h fini pour obtenir un résultat sensé et qu'une fois qu' h est défini comme fini, il n'existe pas de régime de température qui rendent le calcul classique valide pour tout le spectre.

v) En fait, avant la publication de Planck, il existait deux théories chacune valide dans un régime de fréquence. D'abord Rayleigh-Jeans, et la distribution de Wien qu'il postula en 1896 en suivant sa loi du déplacement et des arguments heuristiques : $\rho\nu, T = b\nu^3 e^{-a\nu/T}$.

En prenant, les limites appropriées $kT \ll h\nu$ et $kT \gg h\nu$, démontrez explicitement que Planck a bien réussi à unifier les deux approches et exprimez les constantes de Wien a, b en terme de constantes universelles.

SOLUTION

Dans la limite basse fréquence p/r à la température, $kT \gg h\nu$ on a bien toujours $h\nu/kT \ll 1$ et donc le développement limité fait précédemment est valide. Du coup, on retrouve bien la loi de Rayleigh-Jeans.

Dans le régime haute fréquence, on a plutôt $h\nu/kT \gg 1$ et donc $e^{h\nu/kT} \gg 1$. On peut dès lors négliger le 1 au dénominateur et réécrire la distribution de Planck sous la forme :

$$\rho(\nu, T) \approx \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT}} = \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 e^{-h\nu/kT}. \quad (11)$$

On en conclut immédiatement que $b = \frac{8\pi h}{c^3}$ et que $a = h/k$.

M. Planck : Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspectrum. In : Verhandlungen der Deutschen physikalischen Gesellschaft. 2, Nr. 17, 1900, S. 245, Berlin

2. Modèle d'Einstein de la chaleur spécifique des solides

Nous allons discuter en CM de l'expérience de Franck et Hertz démontrant la quantification intrinsèque de l'énergie des atomes et ce sans avoir recours à la lumière. En 1907 [1] , sept ans avant cette expérience, Einstein fut le premier à utiliser l'hypothèse quantique dans un contexte où la lumière n'intervient pas en expliquant les anomalies observées expérimentalement par Weber [2] dans la chaleur spécifique des solides à basse température.

En effet, puisque, à température T , chaque oscillateur harmonique classique (3 par atome) accumule une énergie moyenne $\langle E \rangle = kT$ selon la physique statistique, l'énergie moyenne totale du solide devrait être donnée $\bar{E} = 3NkT$. La quantité d'énergie nécessaire pour élever changer la température d'un solide, c'est-à-dire la chaleur spécifique $C_v \equiv \frac{\partial \bar{E}(T)}{\partial T}$ devrait donc être la même pour tous les solides et devrait être indépendante de la température.

Or le tableau suivant,

	Capacités pour la chaleur. atomiq.	Poids atomiq.	Produits de la capacité par le poids atomique.
Bismuth,	0,0288	1330	38,50
Plomb,	0,0293	1294	37,94
Or,	0,0298	1243	37,04
Platine,	0,0514	1233	38,71
Étain,	0,0514	735	37,79
Argent,	0,0557	675	37,59
Zinc,	0,0927	403	37,36
Tellure,	0,0912	401	36,57
Cuivre,	0,0949	395	37,55
Nickel,	0,1035	369	38,19
Fer,	0,1100	359	37,34
Cobalt,	0,1498	246	36,85
Soufre,	0,1880	201	37,80

FIGURE 1 – Chaleur spécifiques de quelques solides à environ 300K (tiré de [3])

Suite aux raffinements des technique de refroidissement, il a été possible d'atteindre des températures plus basses et de mettre en évidence des déviations importantes.

En associant à chaque atome du réseau cristallin 3 oscillateurs harmoniques (oscillations selon $\hat{x}$, $\hat{y}$ et $\hat{z}$) tous de même fréquence ν et en supposant, comme Planck, que l'énergie d'un oscillateur ne peut prendre que des valeurs discrètes ($E = nh\nu$), Einstein a pu obtenir :

$$C_v = 3Nk \left(\frac{h\nu}{2kT} \right)^2 \frac{1}{\sinh^2 \left(\frac{h\nu}{2kT} \right)}, \quad (12)$$

courbe reproduite dans la figure suivante.

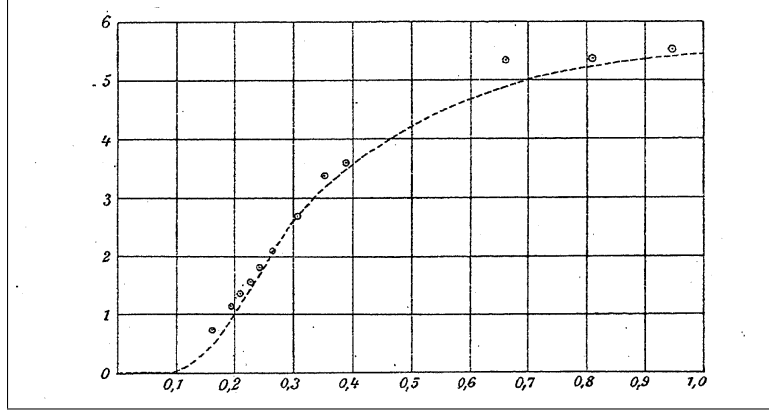


FIGURE 2 – Chaleur spécifique du diamant : les points sont les mesures de Weber [2], la courbe pointillée est l'équation (1) due à Einstein (tiré de [1]).

i) Calculez, suivant la même prescription statistique utilisée dans le CM pour le corps noir, l'énergie moyenne d'UN des oscillateurs harmoniques (de fréquence ν) à température T .

i) La probabilité qu'un des $3N$ oscillateurs soit dans l'état d'énergie $E_n = nh\nu$ est donné par $\frac{e^{-nh\nu/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu/kT}}$. L'énergie moyenne d'un de ces $3N$ oscillateurs est donc donnée par :

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n e^{-E_n/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-E_n/kT}} \quad (13)$$

Le calcul de $Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu/kT}$ a déjà été fait en cours et nous donne :

$$Z = \frac{1}{1 - e^{-h\nu/kT}}. \quad (14)$$

et donc l'énergie moyenne donnée par $-\frac{d \ln Z}{d\beta} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$.

N.B. : Le calcul de la fonction de partition utilise le fait qu'il s'agisse d'une série géométrique convergente. En effet, on peut écrire :

$$Z = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^p (e^{-h\nu/kT})^n \equiv \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^p (x)^n \text{ avec } x = e^{-h\nu/kT} \in [0, 1]. \quad (15)$$

Puisque pour la somme géométrique, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^p x^n &= 1 + x + x^2 \dots x^p \\ -1 + \sum_{n=0}^{p+1} x^n &= x + x^2 \dots x^p + x^{p+1} = x \left(\sum_{n=0}^p x^n \right)\end{aligned}\quad (16)$$

et donc

$$\begin{aligned}-1 + x^{p+1} + \sum_{n=0}^p x^n &= x \left(\sum_{n=0}^p x^n \right) \\ (1-x) \sum_{n=0}^p x^n &= (1-x^{p+1}) \\ \sum_{n=0}^p x^n &= \frac{(1-x^{p+1})}{1-x},\end{aligned}\quad (17)$$

qui, dans la limite $p \rightarrow \infty$ devient $\frac{1}{1-x}$, pour $x \in [0, 1]$

ii) Déduisez l'énergie moyenne totale d'un solide contenant N atomes.

L'énergie moyenne totale des $3N$ oscillateurs (identiques) est donc simplement $\bar{E} = 3N \langle E \rangle = 3N \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$.

iii) Démontrez que la chaleur spécifique C_v est bien donnée par l'équation (1).

La chaleur spécifique est alors donnée par un jeu de dérivée de fonctions composées!!!

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{E}}{\partial T} &= -3N h\nu \frac{1}{(e^{h\nu/kT} - 1)^2} \frac{d(e^{h\nu/kT} - 1)}{dT} \\ &= -3N h\nu \frac{1}{(e^{h\nu/kT} - 1)^2} e^{h\nu/kT} \frac{d(h\nu/kT)}{T} \\ &= -3N h\nu \frac{1}{(e^{h\nu/kT} - 1)^2} e^{h\nu/kT} h\nu/k \left(-\frac{1}{T^2} \right) \\ &= 3Nk \frac{e^{h\nu/kT}}{(e^{h\nu/kT} - 1)^2} \left(\frac{h\nu}{kT} \right)^2\end{aligned}\quad (18)$$

Quelques manipulations algébriques suffisent à retrouver la forme proposée.

$$\begin{aligned}
C_v &= 3Nk \left(\frac{h\nu}{kT} \right)^2 \left(\frac{e^{h\nu/2kT}}{e^{h\nu/kT} - 1} \right)^2 \\
&= 3Nk \left(\frac{h\nu}{kT} \right)^2 \left(\frac{1}{e^{h\nu/2kT} - e^{-h\nu/2kT}} \right)^2 \\
&= 3Nk \left(\frac{h\nu}{kT} \right)^2 \left(\frac{1}{2 \sinh(h\nu/2kT)} \right)^2 = 3Nk \left(\frac{h\nu}{2kT} \right)^2 \frac{1}{\sinh^2(h\nu/2kT)}. \quad (19)
\end{aligned}$$

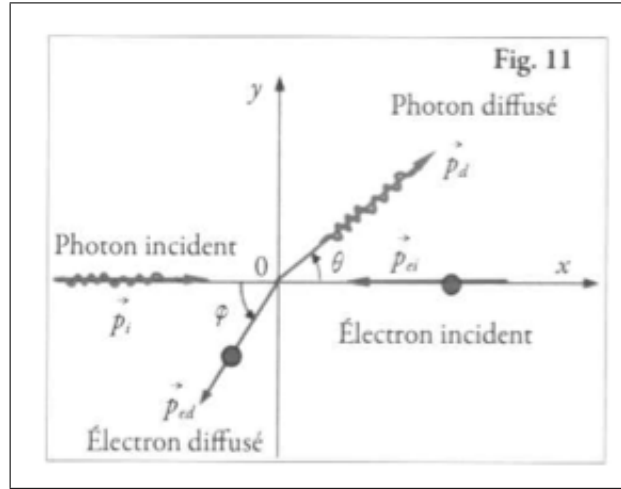
[1] "Die Plancksche Theorie der Strahlung und die Theorie der spezifischen Wärme", A. Einstein, Annalen der Physik, volume 22, pp. 180–190, 1907.

[2] Dr. H. F. Weber, "Die specifischen Wärmen der Elemente Kohlenstoff, Bor und Silicium", Annalen der Physik, Volume 230, Issue 3, pages 367–423, 1875

[3] Petit, A.-T. ; Dulong, P.-L. (1819). "Recherches sur quelques points importants de la Théorie de la Chaleur". Annales de Chimie et de Physique (in French) 10 : 395–413.

3. Effet Compton inverse

Dans le traitement fait en cours de l'effet Compton, nous avons considéré la collision entre un photon et un électron initialement au repos. Ici, nous nous intéressons au même processus lorsqu'un photon fait une collision frontale avec un électron en mouvement dont la quantité de mouvement initiale est opposée à celle du photon.



i) En utilisant la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie, calculez l'énergie du photon diffusé à un angle θ . On utilisera ici pour l'électron, la relation énergie-quantité de mouvement de la relativité restreinte : $E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$, où m_0 est sa masse au repos.

SOLUTION

En définissant les couples Énergie-quantité de mouvement : Électron incident (E, p) , Électron diffusé (E_{ed}, p_{ed}) , photon incident (E_i, p_i) , photon diffusé (E_d, p_d) , les lois de conservation de l'énergie et les deux projections pour la quantité de mouvement nous donne le système d'équations :

$$\begin{aligned} E + E_i &= E_{ed} + E_d \\ 0 &= \frac{E_d}{c} \sin(\theta) - p_{ed} \sin(\varphi) \\ \frac{E_i}{c} - p &= \frac{E_d}{c} \cos(\theta) - p_{ed} \cos(\varphi) \end{aligned} \quad (20)$$

Afin d'éliminer φ des équations on écrit

$$\begin{aligned}
p_{ed}^2 \sin^2(\phi) &= \left(\frac{E_d}{c} \right)^2 \sin^2(\theta) \\
p_{ed}^2 \cos^2(\phi) &= \left(\frac{E_i}{c} - p - \frac{E_d}{c} \cos(\theta) \right)^2
\end{aligned} \tag{21}$$

que l'on additionne pour trouver

$$p_{ed}^2 = \left(\frac{E_d}{c} \sin(\theta) \right)^2 + \left(\frac{E_i}{c} - p - \frac{E_d}{c} \cos(\theta) \right)^2 \tag{22}$$

multipliant le tout par c^2

$$p_{ed}^2 c^2 = (E_d \sin(\theta))^2 + (E_i - pc - E_d \cos(\theta))^2. \tag{23}$$

Afin de se débarrasser de p_{ed} on soustrait l'équation précédente du carré de l'énergie finale l'électron et on trouve

$$\begin{aligned}
E_{ed}^2 - p_{ed}^2 c^2 &= (E + E_i - E_d)^2 - (E_d \sin(\theta))^2 - (E_i - pc - E_d \cos(\theta))^2 \\
m_0^2 c^4 &= (E + E_i - E_d)^2 - (E_d \sin(\theta))^2 - (E_i - pc - E_d \cos(\theta))^2.
\end{aligned} \tag{24}$$

En développant les carrés, on a

$$\begin{aligned}
m_0^2 c^4 &= (E + E_i - E_d)^2 - (E_d \sin(\theta))^2 - [(E_i - pc)^2 + (E_d \cos(\theta))^2 - 2(E_i - pc)(E_d \cos(\theta))] \\
m_0^2 c^4 &= (E + E_i - E_d)^2 - E_d^2 - [(E_i - pc)^2 - 2(E_i - pc)(E_d \cos(\theta))] \\
m_0^2 c^4 &= (E + E_i)^2 - 2E_d(E + E_i) + (E_d)^2 - E_d^2 - [(E_i - pc)^2 - 2(E_i - pc)(E_d \cos(\theta))] \\
m_0^2 c^4 &= E^2 + E_i^2 + 2E_i E - 2E_d(E + E_i) - [E_i^2 - 2pcE_i + (pc)^2 - 2(E_i - pc)(E_d \cos(\theta))] \tag{25}
\end{aligned}$$

Puisque $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$, on trouve

$$\begin{aligned}
0 &= 2E_i E - 2E_d(E + E_i) + 2pcE_i + 2(E_i - pc)(E_d \cos(\theta)) \\
E_i(E + pc) &= E_d [(E + E_i) - (E_i - pc) \cos(\theta)] \\
E_d &= \frac{E_i(E + pc)}{E_i(1 - \cos \theta) + (E + pc \cos \theta)}.
\end{aligned} \tag{26}$$

ii) Justifiez l'appellation : effet Compton inverse

SOLUTION

Pour des électrons initialement au repos ($p = 0$), l'effet Compton (typique) nous donne :

$$\frac{E_d}{E_i} = \frac{E}{E_i(1 - \cos \theta) + E} = \frac{m_0 c^2}{E_i(1 - \cos \theta) + m_0 c^2}. \quad (27)$$

Puisque $1 - \cos \theta \geq 0$, le dénominateur est toujours plus grand que le numérateur et donc le photon diffusé aura systématiquement une énergie inférieure à celle qu'il avait initialement.

Par contre, lorsque l'électron a initialement une vitesse non-nulle, on ouvre une fenêtre dans laquelle le processus de collision peut mener à une augmentation de l'énergie du photon diffusé.

En posant $E_i = pc + \Delta$, on a

$$\frac{E_d}{E_i} = \frac{(E + pc)}{E + pc + \Delta(1 - \cos \theta)}, \quad (28)$$

et on trouve deux régimes. Si $\Delta > 0$, on a toujours une perte d'énergie pour le photon, tandis que pour $\Delta < 0$, c'est-à-dire pour un photon à basse énergie par rapport à pc , on a systématiquement un gain en énergie.

Du coup, la présence d'électrons suffisamment rapides mène à un gain énergétique des photons de basse énergie qui passent au travers du gaz électronique.

Une variante particulière de cet effet, nommée effet Sunyaev–Zel'dovich (1969) est la distorsion du fond diffus cosmologique par son passage dans le milieu intra-amas présent dans les amas de galaxies. Il s'agit d'un plasma très chaud dans lequel on trouve des électrons libres à très haute énergie (et donc vitesse) qui, en interagissant avec le rayonnement cosmique à basse énergie, mène à un effet Compton inverse.

iii) Démontrez que dans la limite où l'électron est initialement au repos ($p = 0$) on retrouve bien $\Delta \lambda_\theta$ tel que calculé en cours ; et ce même dans notre traitement relativiste.

SOLUTION

Tel que trouvé précédemment, pour des électrons au repos, nous avons :

$$\frac{E_d}{E_i} = \frac{m_0 c^2}{E_i(1 - \cos \theta) + m_0 c^2}. \quad (29)$$

Avec $E_i = hc/\lambda_i$ et $E_d = hc/\lambda_d$, et $\lambda_c = h/mc$ on trouve trivialement

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_d} = \frac{m_0 c^2}{hc/\lambda_i(1 - \cos \theta) + m_0 c^2} = \frac{1}{\lambda_c/\lambda_i(1 - \cos \theta) + 1} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_d} &= \frac{1}{\lambda_c(1 - \cos \theta) + \lambda_i} \\ \Delta\lambda_\theta &= \lambda_c(1 - \cos \theta). \end{aligned} \quad (31)$$