

Gravitation et Électricité

Par H. WEYL *

7 avril 2015

D'après Riemann¹ la géométrie repose sur les deux faits suivants :

1. *L'espace est un continuum à trois dimensions*, la variété de ses points peut donc être représentée de manière continue par des systèmes de valeurs des trois coordonnées $x_1 x_2 x_3$;

2. (*Théorème de Pythagore*) Le carré ds^2 de la distance entre deux points voisins

$$(1) \quad P = (x_1, x_2, x_3) \text{ et } P' = (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$$

est (en utilisant des coordonnées arbitraires) une forme quadratique des coordonnées relatives dx_i :

$$(2) \quad ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} dx_i dx_k \quad (g_{ki} = g_{ik}).$$

Nous exprimons cette deuxième circonstance en affirmant que l'espace est un continuum *métrique*. Conformément à l'esprit de la physique moderne des actions de contact, nous n'attribuons de validité rigoureuse au théorème de Pythagore que dans l'infiniment petit.

La théorie de la relativité restreinte nous amène à penser que *le temps* intervient en tant que quatrième coordonnée (x_0) de la même manière que les trois coordonnées spatiales ; que le théâtre du devenir matériel, l'*univers*, est donc un *continuum métrique à quatre dimensions*. La forme quadratique (2), qui donne la métrique d'univers, n'est donc pas définie positive — comme elle l'est dans le cas de la géométrie de l'espace à trois dimensions — mais d'indice inertiel 3.² Déjà Riemann avait soutenu que la métrique doit être considérée comme quelque chose de réel, puisque dans le cas des forces centrifuges par exemple elle se manifeste en tant que puissance exerçant des effets réels sur la matière, et l'on doit admettre en conséquence que la matière agit en retour sur elle ; en revanche, tous les géomètres et les philosophes avant Riemann avaient cru que la métrique relevait de l'espace en soi, indépendamment du contenu matériel qui le remplissait. De nos jours, Einstein a érigé (indépendamment de Riemann) le monument grandiose de la relativité générale sur cette idée que Riemann

* Imprimé d'après les *Sitzungsberichten der Preußischen Akademie der Wissenschaften* 1918. — Des notes ajoutées par l'auteur à l'occasion de cette impression sont distinguées par des crochets.

1. « Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen », *Mathematische Werke* (deuxième édition, Leipzig 1892), XII, p. 282.

2. Ndt : Weyl veut dire que les trois valeurs propres 'spatiales' de g_k^i n'ont pas le même signe que la valeur propre 'temporelle.'

a manqué de mener à son terme. D'après Einstein, les phénomènes de la *gravitation* sont également régis par la métrique d'univers, et les lois selon lesquelles la matière influence la métrique ne sont autres que celles de la gravitation ; les g_{ik} dans (2) constituent les composantes du potentiel gravitationnel. — Tandis que le potentiel gravitationnel est représenté par une forme différentielle *quadratique* invariante, les *phénomènes électromagnétiques* seront assujettis à un quadripotentiel, dont les composantes φ_i constituent une forme différentielle linéaire invariante $\sum \varphi_i dx_i$. Mais jusqu'ici, les deux classes de phénomènes — la gravitation et l'électricité — sont restées isolées l'une à côté de l'autre.

Il résulte clairement des nouvelles conceptions de MM. Levi-Civita³, Hessenberg⁴ et de l'auteur⁵ que le concept basique de transport parallèle infinitésimal d'un vecteur doit servir de fondement pour construire la géométrie riemannienne. Si P et P^* sont deux points quelconques reliés par une courbe, on peut déplacer un vecteur situé en P parallèlement à lui-même le long de cette courbe. Mais en général ce transport vectoriel de P vers P^* n'est pas intégrable, i.e. le vecteur auquel on parvient en P^* dépend du parcours le long duquel s'effectue le déplacement. L'intégrabilité n'a lieu que dans le cas euclidien (« sans gravité »). — La géométrie riemannienne telle qu'elle vient d'être caractérisée conserve un dernier élément de géométrie à distance — et, pour autant que je le conçoive, sans aucune raison factuelle ; la faute en est imputable au fait que cette géométrie est issue fortuitement de la théorie des surfaces. La forme quadratique (2) permet justement de comparer les longueurs de deux vecteurs situés non seulement en un même point, mais également en deux points arbitrairement éloignés l'un de l'autre. Pourtant, *Une authentique géométrie [des actions] de contact doit exclusivement admettre un principe de transport d'une longueur d'un point à un point infiniment voisin* ; par suite on ne peut a priori pas plus supposer l'intégrabilité du transport d'une longueur que l'intégrabilité du transport des directions d'un point à un point finiment éloigné. Une fois que l'on a mis de côté l'inconséquence en question, on voit émerger une géométrie qui, lorsqu'elle est appliquée à l'univers, explique de manière inattendue *non seulement les phénomènes de la gravitation, mais également ceux du champ électromagnétique*. D'après la théorie ainsi engendrée, les deux [phénomènes] découlent de la même source, *on ne peut en général pas séparer arbitrairement la gravitation et l'électricité*. Pour cette théorie, *toute grandeur physique s'interprète dans cette géométrie d'univers ; en particulier, la grandeur d'action apparaît d'emblée comme un nombre pur. Elle conduit à une loi d'univers qui est pour l'essentiel déterminée de manière univoque ; en effet elle permet même de comprendre en un certain sens pourquoi l'univers a quatre dimensions*. — Je vais d'abord corriger à grands traits la géométrie riemannienne, sans arrière-pensée d'ordre physique ; L'application physique viendra ensuite d'elle-même.

Dans un système de coordonnées donné, les coordonnées relatives dx_i d'un point P' infiniment voisin d'un autre point P sont — voir (1) — les composantes du *déplacement infinitésimal* $\overrightarrow{PP'}$. Le passage d'un système de coordonnées à un autre s'exprime par

3. "Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana" *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* **42** (1917).

4. "Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie" *Mathematische Annalen* **78** (1917).

5. *Raum, Zeit, Materie* (première édition, Berlin 1918), §14.

les formules de transformation continues :

$$x_i = x_i(x_1^* x_2^* \cdots x_n^*) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

qui établissent le lien entre les coordonnées du même point dans les deux systèmes. Nous avons donc les transformations linéaires

$$(3) \quad dx_i = \sum_k \alpha_{ik} dx_k^*,$$

entre les composantes dx_i et dx_i^* du même déplacement infinitésimal du point P , les α_{ik} étant les valeurs des dérivées $\partial x_i / \partial x_k^*$ au point P . Un vecteur (contravariant) $\mathfrak{x}$ au point P aura comme composantes par rapport à chaque système de coordonnées n nombres ξ^i qui se transforment de la même manière (3) que les composantes d'un déplacement infinitésimal lorsque l'on change de système de coordonnées. J'appelle *espace vectoriel* en P l'ensemble des vecteurs au point P . Il est 1. *linéaire ou affine*, c'est-à-dire la multiplication d'un vecteur en P par un nombre, ou l'addition de deux tels vecteurs produira toujours un vecteur en P ; et 2. *métrique* : grâce à la forme bilinéaire symétrique correspondante (2), on peut associer de manière invariante un produit scalaire

$$\mathfrak{x} \cdot \eta = \eta \cdot \mathfrak{x} = \sum_{ik} g_{ik} \xi^i \eta^k$$

à toute paire de vecteurs $\mathfrak{x}$ et η de composantes ξ^i, η^i . Au vu de notre conception, cette forme n'est cependant déterminée qu'à un facteur arbitraire de proportionnalité près. Si la variété des points de l'espace est représentée par les coordonnées x_i , alors la métrique au point P ne fixe que les rapports entre les g_{ik} . Même d'un point de vue physique, seul le rapport entre g_{ik} a un sens immédiatement saisissable. Étant donné un point P , seuls les points P' infiniment voisins de P qui peuvent être atteints par un signal lumineux émanant de point P satisfont à l'équation

$$\sum_{ik} g_{ik} dx_i dx_k = 0.$$

Pour parvenir à la représentation analytique, nous devons 1. choisir un système de coordonnées et 2. établir en tout point P le facteur arbitraire de proportionnalité qui fixe les g_{ik} . Les formules qui interviennent doivent donc posséder une double invariance 1. elles doivent être *invariantes par rapport à toute transformation continue des coordonnées*, 2. elles doivent rester inaltérées, quand on remplace les g_{ik} par λg_{ik} , où λ est une fonction continue arbitraire de position. L'intervention de cette seconde propriété d'invariance caractérise notre théorie [en propre].

Soient P et P^* deux points, si, à tout vecteur $\mathfrak{x}$ en P , on associe un vecteur $\mathfrak{x}^*$ en P^* de telle sorte que $\alpha \mathfrak{x}^*$ corresponde à $\alpha \mathfrak{x}$ (α étant un nombre quelconque), $\mathfrak{x}^* + \eta^*$ à $\mathfrak{x} + \eta$ et que le vecteur 0 en P soit le seul auquel correspond 0 en P^* , alors on obtient une *application affine ou linéaire* de l'espace vectoriel en P sur l'espace vectoriel en P^* . Cette application est en particulier *semblable*, si le produit scalaire $\mathfrak{x}^* \cdot \eta^*$ des vecteurs images en P^* est proportionnel au produit scalaire de $\mathfrak{x}$ et η en P pour toute paire $\mathfrak{x}, \eta$. (Cette notion d'application *semblable* est seule douée d'un sens objectif dans

notre conception ; la théorie précédente admettait la notion plus forte d'application *congruente*.) Le *transport parallèle d'un vecteur* du point P au point voisin P' est caractérisé par les deux axiomes :

1. Le transport parallèle des vecteurs au point P vers un point voisin P' revient à effectuer une application semblable de l'espace vectoriel en P sur l'espace vectoriel en P' ;

2. Soient P_1, P_2 deux points voisins de P , si le vecteur infinitésimal $\overrightarrow{PP_2}$ en P se transforme en $\overrightarrow{P_1P_{12}}$ par transport parallèle vers P_1 et si $\overrightarrow{PP_1}$ se transforme en $\overrightarrow{P_2P_{21}}$ par transport parallèle vers P_2 , alors les points P_{12} et P_{21} devront coïncider (commutativité).

La partie de la première condition qui exprime le caractère affine du transport parallèle entre les espaces vectoriels associés P et P' s'exprime analytiquement comme suit : le vecteur ξ^i en $P = (x_1 x_2 \cdots x_n)$ se transforme en un vecteur

$$\xi^i + d\xi^i \quad \text{en} \quad P' = (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \cdots, x_n + dx_n)$$

dont les composantes dépendent linéairement de ξ_i :

$$(4) \quad d\xi^i = - \sum_r d\gamma_r^i \xi^r.$$

D'après la deuxième condition, les $d\gamma_r^i$ sont des formes différentielles linéaires :

$$d\gamma_r^i = \sum_s \Gamma_{rs}^i dx_s$$

dont les coefficients possèdent les propriétés de symétrie

$$(5) \quad \Gamma_{sr}^i = \Gamma_{rs}^i.$$

Si deux vecteurs ξ^i, η^i de P se transforment en $\xi^i + d\xi^i$ et $\eta^i + d\eta^i$ par transport parallèle vers P' , la condition de similitude requise en 1., qui va au-delà de la [condition] d'affinité, signifie que

$$\sum_{ik} (g_{ik} + dg_{ik})(\xi^i + d\xi^i)(\eta^k + d\eta^k)$$

soit proportionnel à

$$\sum_{ik} g_{ik} \xi^i \eta^k.$$

Si nous désignons par $1 + d\varphi$ le facteur de proportionnalité qui diffère infiniment peu de 1 et si nous définissons l'abaissement d'un indice comme d'habitude par la formule

$$a_i = \sum_k g_{ik} a^k,$$

alors il en résulte que

$$(6) \quad dg_{ik} - (d\gamma_{ki} + d\gamma_{ik}) = g_{ik} d\varphi.$$

Il s'ensuit que $d\varphi$ est une forme différentielle linéaire :

$$(7) \quad d\varphi = \sum_i \varphi_i dx_i$$

Si elle est connue, l'équation (6) ou

$$\Gamma_{i,kr} + \Gamma_{k,ir} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} - g_{ik}\varphi_r$$

donne, avec la condition de symétrie (5), les grandeurs Γ sans ambiguïté. *La connexion métrique inhérente à l'espace dépend donc non seulement de la forme quadratique (2) (qui n'est donnée qu'à un facteur arbitraire de proportionnalité près), mais encore d'une forme linéaire (7)*⁶. Si, sans changer de système de coordonnées, on remplace g_{ik} par λg_{ik} , alors les grandeurs $d\gamma_k^i$ ne changent pas, $d\gamma_{ik}$ admet le facteur λ , dg_{ik} se transforme en $\lambda dg_{ik} + g_{ik}d\lambda$. L'équation (6) nous apprend ainsi que $d\varphi$ se transforme en

$$d\varphi + \frac{d\lambda}{\lambda} = d\varphi + d \lg \lambda.$$

Dans la forme linéaire $\sum \varphi_i dx_i$, il ne subsiste aucun facteur de proportionnalité indéterminé qui devrait être fixé en précisant l'unité de mesure ; l'arbitraire qui est attaché à cette forme consiste plutôt en une *différentielle totale additive*. Les formes

$$(8) \quad g_{ik} dx_i dx_k, \quad \varphi_i dx_i$$

sont aussi valables que

$$(9) \quad \lambda \cdot g_{ik} dx_i dx_k \text{ et } \varphi_i dx_i + d \lg \lambda,$$

— où λ est une fonction quelconque positive de position — pour représenter analytiquement la géométrie. *Le tenseur antisymétrique de composantes*

$$(10) \quad F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$$

6. [J'ai par la suite modifié cette construction — cf. la représentation définitive dans la cinquième édition de *Raum, Zeit, Materie*, 1923, pp. 15-7 — sur les points suivants. a) Les conditions 1. et 2. auxquelles le transport parallèle doit satisfaire sont remplacées par l'unique condition : au point P , il doit y avoir un système de coordonnées, par rapport auquel les composantes de tout vecteur en P demeurent inchangées par transport parallèle vers n'importe quel point voisin. Elle caractérise l'essence du transport parallèle comme une propagation qui laisse les vecteurs 'tels quels.' b) À la *métrique* au point particulier P — telle qu'un *segment* soit associé à tout vecteur $\mathfrak{r} = (\xi^i)$ en P de sorte que deux vecteurs déterminent le même segment, s'ils possèdent la même mesure numérique $l = \sum g_{ik} \xi^i \xi^k$ — correspond la *connexion métrique* entre P et les points avoisinants : Un segment en P se transforme en un segment au point voisin P' par une propagation congruente. En imposant à cette notion de propagation congruente des segments la condition analogue à la condition a) pour le transport parallèle des vecteurs, on reconnaît que ce processus (pour lequel la mesure numérique l du segment subit l'accroissement dl) s'exprime par l'équation

$$dl = l d\varphi ; \quad d\varphi = \sum \varphi_i dx_i.$$

La métrique et la connexion métrique déterminent ainsi la connexion 'affine' (transport parallèle) sans ambiguïté — et d'après ma conception actuelle du problème de l'espace, ceci constitue même le fait le plus fondamental de la géométrie —, tandis que, d'après la présentation du texte, la forme linéaire $d\varphi$ est justement ce qui reste arbitraire pour le transport parallèle [défini] par une métrique donnée.]

possède une signification invariante, (c'est-à-dire la forme

$$F_{ik}dx_i\delta x_k = \frac{1}{2}F_{ik}\Delta x_{ik},$$

qui dépend bilinéairement des deux déplacements arbitraires dx et δx au point P — ou plutôt linéairement de l'élément de surface de composantes

$$\Delta x_{ik} = dx_i\delta x_k - dx_k\delta x_i$$

et déterminé par ces deux déplacements —). Le cas particulier de l'ancienne théorie — dans laquelle une unité de longueur choisie librement en un point initial peut être transportée par parallélisme partout ailleurs sans dépendre du chemin parcouru — s'obtient quand les g_{ik} sont fixés dans l'absolu de telle sorte que les φ_i s'annulent. Les Γ_{rs}^i ne sont alors rien d'autre que les symboles de Christoffel à trois indices. Le fait que le tenseur F_{ik} s'annule identiquement est la condition nécessaire et suffisante pour que ce cas se présente.

Il est donc très naturel d'interpréter φ_i comme un *quadripotential* et donc le tenseur F comme un *champ électromagnétique* dans la géométrie d'univers. L'absence de champ électromagnétique est la condition nécessaire de validité de la théorie d'Einstein d'où résultent les équations de la gravitation seulement. Si l'on admet [notre] conception, on observe que la nature des grandeurs électriques est telle que leur caractérisation numérique dans un système de coordonnées donné ne dépend pas du choix arbitraire d'une unité de mesure. Concernant l'unité de mesure et le nombre de dimensions, on doit prendre une nouvelle direction avec cette théorie. Jusque-là, on considérait par exemple une grandeur comme un tenseur d'ordre 2 (de rang 2) lorsque, *après le choix d'une unité de mesure arbitraire*, chacune de ses valeurs déterminait dans chaque système de coordonnées une matrice de nombres a_{ik} , qui constituaient les coefficients d'une forme bilinéaire invariante de deux déplacements infinitésimaux arbitraires

$$(11) \quad a_{ik}dx_i\delta x_k.$$

Ici, il est question de tenseur lorsque, étant donné un système de coordonnées et *le choix d'un certain facteur de proportionnalité contenu dans les g_{ik}* , les composantes a_{ik} sont déterminées de manière univoque et, pour tout dire, de telle sorte qu'une transformation des coordonnées laisse invariante la forme (11), en remplaçant g_{ik} par λg_{ik} , les a_{ik} se transforment cependant en $\lambda^e a_{ik}$. Nous disons alors que le tenseur *est de poids e* ou encore qu'il est de longueur l^{2e} si nous attribuons la dimension '*longueur* = l ' à l'élément linéaire ds . Seuls les tenseurs de poids 0 sont absolument invariants. Le tenseur de champ de composantes F_{ik} est de ce type. D'après (10), il satisfait au premier système d'équations de Maxwell

$$\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = 0.$$

Une fois établie la notion de transport parallèle, la géométrie et le calcul tensoriel peuvent être fondés sans peine. *a) Ligne géodésique.* Étant donné un point P et un

vecteur donné en lui, alors la ligne géodésique issue de P dans la direction de ce vecteur résulte du transport parallèle du vecteur dans sa propre direction. L'équation différentielle de la ligne géodésique s'exprime comme suit en utilisant un paramètre approprié τ :

$$\frac{d^2 x_i}{d\tau^2} + \Gamma_{rs}^i \frac{dx_r}{d\tau} \frac{dx_s}{d\tau} = 0.$$

(Elle ne peut pas être caractérisée ici comme une ligne de longueur minimale puisque la notion de longueur de courbe est dépourvue de sens.) *b) Calcul tensoriel.* Pour déduire par différentiation un champ tensoriel deux fois covariant à partir d'un champ tensoriel une fois covariant de poids 0 et de composantes f_i , nous nous aidons d'un vecteur arbitraire ξ_i au point P et nous construisons l'invariant $f_i \xi^i$ ainsi que sa variation infiniment petite qui résulte du passage du point P de coordonnées x_i au point voisin P' de coordonnées $x_i + dx_i$, tout en déplaçant le vecteur ξ parallèlement à lui-même. Nous obtenons pour cette variation

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \xi^i dx_k + f_r d\xi^r = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \Gamma_{ik}^r f_r \right) \xi^i dx_k.$$

Les grandeurs entre parenthèses à droite [de l'égalité] sont donc les composantes d'un champ tensoriel du second ordre de poids 0, qui est constitué de manière purement invariante à partir du champ f . *c) Courbure.* Pour construire l'analogue du tenseur de courbure de Riemann, qu'on reprenne le petit parallélogramme dont il vient d'être question et qui est défini par les points P, P_1, P_2 et $P_{12} = P_{21}$.⁷ Déplaçons un vecteur $\mathfrak{x} = (\xi^i)$ en P parallèlement à lui-même vers P_1 puis vers P_{12} ; et une seconde fois vers P_2 puis vers P_{21} ; étant donné que P_{12} et P_{21} coïncident, cela a un sens de construire la différence $\Delta \mathfrak{x}$ des deux vecteurs ainsi obtenus en ce point. Il en résulte en termes de composantes

$$(12) \quad \Delta \xi^i = \Delta R_j^i \cdot \xi^j,$$

où les $\Delta \xi_j^i$ ne dépendent pas du vecteur déplacé $\mathfrak{x}$, mais dépendent linéairement de l'élément de surface

$$\Delta R_j^i = R_{jkl}^i dx_k \delta x_l = \frac{1}{2} R_{jkl}^i \Delta x_{kl}$$

engendré par les deux déplacements $\overrightarrow{PP_1} = (dx_k)$, $\overrightarrow{PP_2} = (\delta x_i)$. Les composantes de courbure R_{jkl}^i , qui ne dépendent que du point, ont les deux propriétés de symétrie suivantes : 1. elles changent de signe par permutation des deux derniers indices k et l ; 2. la somme des trois composantes correspondant aux permutations cycliques de jkl est nulle. En abaissant l'indice i , nous obtenons les composantes R_{ijkl} d'un tenseur quatre fois covariant de poids 1. Par une simple réflexion et sans faire de calcul, il en résulte que R se divise d'une manière évidemment invariante en deux termes :

$$(13) \quad R_{jkl}^i = P_{jkl}^i - \frac{1}{2} \delta_j^i F_{kl} \quad \delta_j^i = \begin{cases} 1 (i = j) \\ 0 (i \neq j) \end{cases},$$

7. [Il n'est pas essentiel que les côtés opposés du parallélogramme infiniment petit soient issus l'un de l'autre par transport parallèle, seule compte la coïncidence entre les points P_{12} et P_{21} .]

le premier P_{ijkl} , est antisymétrique non seulement en les indices kl , mais également en i et j . Alors que les équations $F_{ik} = 0$ caractérisent notre espace en l'absence de champ électromagnétique, c'est-à-dire lorsque le transport des longueurs est intégrable, il découle de (13) que les $P_{jkl}^i = 0$ sont les conditions invariantes pour qu'aucun champ gravitationnel n'agisse en lui, c'est-à-dire pour que le problème du transport des directions soit intégrable. Seul l'espace euclidien est dépourvu d'électricité et de gravitation.

L'invariant le plus simple d'une application linéaire telle que (12) qui, à tout vecteur $\mathfrak{x}$, associe un vecteur $\Delta\mathfrak{x}$, est sa 'trace'

$$\frac{1}{n} R_i^i.$$

D'après (13), on déduit d'elle la forme

$$-\frac{1}{2} F_{ik} dx_i dx_k,$$

que l'on vient de voir. L'invariant le plus simple d'un tenseur comme $-\frac{1}{2} F_{ik}$ est le carré de sa norme :

$$L = \frac{1}{4} F_{ik} F^{ik}.$$

Comme le tenseur F est de poids 0, L est manifestement un invariant de poids -2 . Si g est le déterminant négatif des g_{ik} [et]

$$d\omega = \sqrt{g} dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 = \sqrt{g} dx$$

le volume d'un élément de volume infiniment petit alors, comme on le sait, la théorie de Maxwell sera régie par [la grandeur] d'action électrique qui sera égale à l'intégrale $\int L d\omega$ de cet invariant le plus simple [il s'agit de L] prise sur une région quelconque de l'univers : par une variation arbitraire des g_{ik} et des φ_i qui s'annule aux bords de cette région, on obtient

$$\delta \int L d\omega = \int (S^i d\varphi_i + T^{ik} dg_{ik}) d\omega,$$

où les

$$S^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g} F^{ik})}{\partial x_k}$$

sont les termes de gauche dans les équations de Maxwell inhomogènes (les termes de droite étant les composantes du quadricourant), et les T^{ik} constituent les composantes du tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique. Comme L est un invariant de poids -2 , tandis que l'élément de volume dans la géométrie à n dimensions est un invariant de poids $n/2$, l'intégrale $\int L d\omega$ n'a de sens que si le nombre de dimensions est $n = 4$. *Dans notre interprétation, la possibilité même de la théorie de Maxwell dépend du nombre de dimensions 4.* Mais dans l'univers quadridimensionnel, la grandeur d'action électromagnétique devient un nombre pur.

Comme la grandeur de l'action prend la valeur 1 dans les unités de mesure traditionnelles CGS [à vérifier, le sens de la phrase n'est pas évident], on peut d'abord

rechercher s'il existe un problème physique vérifiable par l'expérience — par exemple l'électron — qui peut être calculé en vertu de notre théorie.

Si l'on passe de la géométrie à la physique, nous devons admettre, d'après le modèle de la théorie de Mie⁸, que toute la légalité de la nature repose sur un certain invariant intégral, l'action

$$\int W d\omega = \int \mathfrak{W} dx \quad (\mathfrak{W} = W \sqrt{g}),$$

de telle sorte que *l'univers réel se distingue de tous les espaces métriques possibles à quatre dimensions par le fait que, pour celui-ci, l'action contenue dans toute région d'univers admet une valeur extrémale* par rapport aux variations des potentiels g_{ik} , φ_i , qui s'annulent aux bords de la région d'univers en question. La densité d'univers de l'action W doit être un invariant de poids -2 . *L'action est de toute façon un nombre pur* ; notre théorie permet donc de rendre compte a priori de cette structure atomistique de l'univers, laquelle possède d'après la conception actuelle la signification la plus fondamentale : [il s'agit du] quantum d'action. Nous pouvons formuler W le plus simplement et le plus naturellement [ainsi] :

$$(14) \quad W = R^i_{jkl} R^{jkl}_i = |R|^2.$$

D'après (13) il en résulte

$$W = |P|^2 + 4L.$$

(Tout au plus est-il incertain que le second terme [électrique] L soit multiplié par 4 lorsqu'il s'ajoute au premier.) Mais sans spécialiser davantage l'action, nous pouvons tirer certaines conclusions à partir du principe d'action. Nous démontrerons en effet que, *de même que*, d'après des recherches de Hilbert, Lorentz, Einstein, Klein et l'auteur,⁹ *les quatre lois de conservation de la matière* (du tenseur énergie-impulsion) *sont attachées à l'invariance* (qui contient quatre fonctions arbitraires) *de l'action par rapport aux transformations de coordonnées, la nouvelle 'invariance (qui contient une cinquième fonction arbitraire) d'échelle'* [passage de (8) à (9)] *est liée à la conservation de l'électricité*. La manière dont cette dernière s'associe au principe d'énergie-impulsion me semble être l'argument général le plus fort en faveur de la théorie exposée ici — pour autant qu'il puisse être question d'une confirmation dans le domaine de la spéculation pure.

Pour une variation arbitraire qui s'annule aux bords de la région d'univers considérée, nous posons

$$(15) \quad \delta \int \mathfrak{W} dx = \int (\mathfrak{W}^{ik} \delta g_{ik} + \mathfrak{w}^i \delta \varphi_i) dx \quad (\mathfrak{W}^{ki} = \mathfrak{W}^{ik}).$$

Les lois de la nature seront donc

$$(16) \quad \mathfrak{W}^{ik} = 0, \quad \mathfrak{w}^i = 0.$$

8. *Annalen der Physik* **37**, **39**, **40** (1912-3).

9. Hilbert "Die Grundlagen der Physik (Erste Mitteilung)" *Göttinger Nachrichten*, 20 novembre 1915 ; H. A. Lorentz en quatre articles dans les Verslagen van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam 1915-6 ; A. Einstein "Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie" *Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften* (1916) 1111-6 ; F. Klein, *Göttinger Nachrichten*, 25 janvier 1918 ; H. Weyl, *Annalen der Physik* **54** (1917), 121-5.

Nous pouvons prendre les premières comme lois du champ de gravitation, les deuxièmes comme celles du champ électromagnétique. Les grandeurs W_k^i, w^i telles que

$$\mathfrak{W}_k^i = \sqrt{g} W_k^i, \quad \mathfrak{w}^i = \sqrt{g} w^i$$

sont respectivement les composantes mixtes et contravariantes de tenseurs de deuxième et de premier ordre, de poids -2 . Conformément aux propriétés d'invariance, le système d'équations (16) contient cinq équations de trop. Ceci s'exprime par les cinq identités invariantes suivantes, qui valent pour les termes de gauche :

$$(17) \quad \frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i} \equiv \mathfrak{W}_i^i;$$

$$(18) \quad \frac{\partial \mathfrak{W}_k^i}{\partial x_i} - \Gamma_{kr}^s \mathfrak{W}_s^r \equiv \frac{1}{2} F_{ik} \mathfrak{w}^i.$$

La première découle de l'invariance d'échelle. Si, lorsque l'on passe de (8) à (9), on considère $\lg \lambda$ comme une fonction infinitésimale de position $\delta \varrho$, on obtient la variation

$$\delta g_{ik} = g_{ik} \delta \varrho, \quad \delta \varphi_i = \frac{\partial(\delta \varrho)}{\partial x_i}.$$

Pour elle, (15) doit s'annuler. Si ensuite on utilise l'invariance de l'action par rapport aux transformations des coordonnées par une déformation infiniment petite du continuum d'univers¹⁰, on obtient les identités

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{W}_k^i}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_k} \mathfrak{W}^{rs} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i} \cdot \varphi_k - F_{ik} \mathfrak{w}^i \right) \equiv 0,$$

qui se transforment en (18), si l'on remplace $\partial \mathfrak{w}^i / \partial x_i$ par $g_{rs} \mathfrak{W}^{rs}$ conformément à (17). À partir des seules lois de la gravitation, il en résulte donc déjà que

$$(19) \quad \frac{\partial \mathfrak{w}^i}{\partial x_i} = 0,$$

à partir des seules lois de champ électromagnétiques, on doit avoir

$$(20) \quad \frac{\partial \mathfrak{W}_k^i}{\partial x_i} - \Gamma_{kr}^s \mathfrak{W}_s^r = 0.$$

Dans la théorie de Maxwell, $\mathfrak{w}^i$ prend la forme

$$\mathfrak{w}^i \equiv \frac{\partial(\sqrt{g} F^{ik})}{\partial x_k} - \mathfrak{s}^i \quad (\mathfrak{s}^i = \sqrt{g} \cdot s^i),$$

où s^i est le quadricourant. Étant donné qu'ici le premier terme satisfait identiquement à l'équation (19), cette dernière fournit la conservation de l'électricité :

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g} \cdot s^i)}{\partial x_i} = 0.$$

10. Weyl, *Annalen der Physik* **54** (1917) 121-5; F. Klein, *Göttinger Nachrichten*, séance du 25 janvier 1918.

Dans la théorie einsteinienne de la gravitation, $\mathfrak{W}_k^i$ est donc composée de deux termes, dont le premier satisfait identiquement à l'équation (20) et le deuxième est égal aux composantes mixtes T_k^i du tenseur d'énergie-impulsion, multipliées par $\sqrt{g}$. Les équations (20) conduisent donc aux quatre lois de conservation de la matière. Nous obtenons des résultats parfaitement analogues dans notre théorie si nous choisissons la formule (14) pour l'action. Les cinq principes de conservation sont 'éliminateurs' des lois de champ, cela signifie qu'elles en découlent de manière dédoublée, ce qui montre par là même avec évidence que cinq d'entre elles sont superflues.

Avec la formule (14), les équations de Maxwell prennent par exemple la forme

$$(21) \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}F^{ik})}{\partial x_k} = s^i,$$

et le courant sera

$$s_i = \frac{1}{4} \left(R\varphi_i + \frac{\partial R}{\partial x_i} \right).$$

R indique l'invariant de poids -1 , obtenu à partir de R_{jkl}^i , en contractant d'abord les indices i, k , ensuite j, l . Le calcul donne :

$$R = R^* - \frac{3}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}\varphi^i)}{\partial x_i} + \frac{3}{2}(\varphi_i\varphi^i),$$

où R^* désigne l'invariant riemannien de courbure construit uniquement à partir des g_{ik} . Dans le cas statique, où les composantes spatiales du potentiel électromagnétique s'annulent et où toutes les grandeurs sont indépendantes du temps x_0 , on aura

$$R = R^* + \frac{3}{2}\varphi_0\varphi^0 = \text{const.}$$

d'après (21). Mais dans une région d'univers où $R \neq 0$, on peut aussi obtenir en général $R = \text{const.} = \pm 1$, en choisissant convenablement l'unité quelconque de mesure. Pour des états variables dans le temps, nous devons néanmoins nous attendre à ce qu'il y ait des surfaces $R = 0$, qui joueront manifestement un rôle singulier. Il ne faut pas employer R comme densité d'action puisque celui-ci ne possède pas le poids -2 , (R^* intervient en tant que tel dans la théorie einsteinienne de gravitation). Il s'ensuit que notre théorie donne les équations maxwelliennes de l'électromagnétisme, mais non pas les équations einsteiniennes de la gravitation ; des équations différentielles du quatrième ordre les remplacent. Mais en réalité, il est également peu probable que les équations einsteiniennes de la gravitation soient parfaitement exactes, surtout parce que la constante gravitationnelle qui y figure se situe hors du cadre des autres constantes naturelles [übzig et non üblich !], de sorte que le rayon gravitationnel de la charge et de la masse d'un électron par exemple est d'un ordre de grandeur complètement différent (c'est-à-dire respectivement 10^{20} fois et 10^{40} fois plus petit) que le rayon de l'électron lui-même.¹¹

Mon intention était seulement ici de développer brièvement les fondements généraux de la théorie. Il nous faut évidemment en tirer les conséquences physiques sur la base

11. Cf. Weyl "Zur Gravitationstheorie" *Annalen der Physik* **54** (1917), p. 133.

de la formule spéciale (14)¹² et les comparer avec l'expérience, en particulier il faut rechercher si elle permet de déduire l'existence de l'électron ainsi que les singularités des processus atomiques restés inexpliqués jusque-là¹³. La tâche est mathématiquement fort compliquée, puisqu'on ne peut pas obtenir des solutions approchées en nous restreignant aux termes linéaires ; en effet, comme on ne peut pas omettre les termes d'ordre supérieur à l'intérieur de l'électron, les équations linéaires provenant d'une telle omission ne peuvent essentiellement admettre que 0 comme solution. Je propose de revenir sur toutes ces questions de manière plus détaillée ailleurs.

Supplément. Commentaire de Monsieur A. EINSTEIN :

“Si les rayons de lumière étaient le seul moyen de trouver empiriquement les relations métriques au voisinage d'un point d'univers, alors il resterait malgré tout un facteur indéterminé dans l'intervalle ds (ainsi que dans les g_{ik}). En revanche, cette indétermination n'apparaît pas, si pour définir le ds on fait appel aux résultats de mesure qui peuvent être obtenus avec des corps rigides infiniment petits (règles) et des horloges. On peut alors immédiatement mesurer un ds de genre temps avec une horloge unitaire, dont la ligne d'univers contient ds .

Mais une telle définition de l'intervalle élémentaire ds deviendrait complètement illusoire si les notions de ‘règle unitaire’ et d’‘horloge unitaire’ reposaient sur une hypothèse erronée par principe ; ceci serait le cas, si la longueur d'une règle unitaire (ou la cadence d'une horloge unitaire) dépendait de son histoire. S'il en était vraiment ainsi dans la nature, alors il n'y aurait pas d'éléments chimiques avec des lignes spectrales de fréquence donnée ; la fréquence relative de deux atomes du même genre (proches spatialement) devrait être en général différente. Comme ce n'est pas le cas, l'hypothèse fondamentale de la théorie ne me semble malheureusement pas acceptable — théorie dont la profondeur et la hardiesse doivent cependant remplir tout lecteur d'admiration.”

Réponse de l'auteur. Je remercie Monsieur EINSTEIN de me permettre de répondre à l'objection qu'il a soulevée. En fait je ne crois pas qu'elle soit justifiée. D'après la théorie de la relativité restreinte, une règle rigide a toujours la même longueur au repos, pourvu qu'elle parvienne au repos dans un référentiel approprié / convenable et une horloge qui fonctionne correctement possède dans ces mêmes conditions une même période mesurée en temps propre (expérience de MICHELSON, effet DOP-

12. [R. Weitzenböck a résolu le problème [qui consiste] à déterminer tous les invariants W exprimables comme grandeurs d'action sachant qu'elles ne doivent pas contenir des dérivées de g_{ik} qui dépassent le second ordre et des dérivées des φ_i qui dépassent le premier ordre — (*Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien, Abteilung IIa* **129** (1920), séances du 21 et du 28 octobre ; **130** (1921, 10 février)). Si l'on écarte les invariants W tels que la variation $\delta \int W d\omega$ soit identiquement nulle alors, conformément à un autre calcul effectué par R. Bach (*Mathematische Zeitschrift* **9** (1921) 125, 189), il ne reste que trois possibilités. Le véritable [invariant] W semble être une combinaison linéaire du L maxwellien et du carré de R . Pauli et moi-même avons exploré plus précisément les conséquences de cette formule (*Physikalische Zeitschrift* **20** (1919) 457-67) ; en nous fondant sur elle, nous sommes parvenus à déduire les équations du mouvement d'un corpuscule matériel. En revanche, l'invariant (14) que nous avons d'abord privilégié par pur hasard ne semble jouer aucun rôle dans la nature. Cf. *Raum, Zeit, Materie*, cinquième édition, §§38, 40.]

13. [Depuis lors, je me suis totalement défait de ces espoirs éveillés par la théorie de Mie ; il me semble qu'on ne peut pas résoudre le problème de la matière à l'aide d'une simple théorie du champ. Cf. mon article “Feld und Materie” *Annalen der Physik* **65** (1921) 541-63.]

PLER). Mais il est hors de question qu'une horloge subissant un mouvement brusque mesure le temps propre $\int ds$ (de même qu'en thermodynamique, un gaz chauffé de manière arbitrairement rapide et irrégulière ne parcourt pas exclusivement des états d'équilibre); ceci ne sera d'abord pas le cas si l'horloge (l'atome) subit l'action d'un champ électromagnétique fort et variable. En relativité générale, on peut donc tout au plus affirmer : une *horloge au repos* dans un champ gravitationnel *statique* mesure l'intégrale $\int ds$ *en l'absence d'un champ électromagnétique*. Mais on ne peut savoir comment se comportera une horloge en mouvement sous l'action combinée d'un champ électromagnétique et gravitationnel que si l'on développe une dynamique fondée sur les lois physiques. En raison de ce comportement problématique des règles et des horloges, je me suis appuyé exclusivement sur l'observation de l'arrivée des signaux lumineux (pp. 182ff.) pour établir la mesure théorique des g_{ik} dans mon livre *Raum, Zeit, Materie*; *si la théorie d'EINSTEIN est valide*, les grandeurs peuvent être déterminées non seulement en fonction de leurs rapports, mais encore absolument (après le choix d'une unité de mesure fixe). KRETSCHMANN est parvenu à la même idée indépendamment de moi.¹⁴

D'après la théorie développée ici, si l'on choisit convenablement les coordonnées et le facteur indéterminé de proportionnalité, alors, mis à part au cœur de l'atome, la forme quadratique ds^2 prend avec une bonne approximation les mêmes valeurs qu'en relativité restreinte et la forme linéaire sera nulle avec la même approximation. En l'absence d'un champ électromagnétique (forme linéaire strictement égale à 0), le ds^2 sera déterminé avec exactitude par la condition exprimée entre parenthèses (à un facteur *constant* de proportionnalité près, qui demeure arbitraire même d'après EINSTEIN; on aura la même chose avec un champ qui n'est qu'électrostatique). L'hypothèse la plus plausible qu'on puisse faire à propos d'une horloge au repos dans un champ statique est qu'elle mesure l'intégrale du ds *ainsi normalisé*; dans ma théorie comme dans celle d'EINSTEIN, il reste à déduire ce fait¹⁵ à partir d'une dynamique développée de manière explicite. Mais de toute façon un objet de structure déterminée qui oscille [schwingend] et qui est plongé durablement dans un certain champ statique aura un comportement déterminé de manière univoque (l'influence d'une éventuelle histoire antérieure tumultueuse (stürmisch) déclinera rapidement); je ne crois pas que ma théorie achoppe sur une contradiction face à cette expérience (confirmée pour les atomes avec l'existence d'éléments chimiques). Il faut noter que le processus mathématique idéal de transport des vecteurs, qui doit servir de fondement à la construction mathématique de la géométrie, n'a rien de commun avec le processus réel de mouvement d'une horloge dont le parcours est déterminé par les lois de la nature.

La géométrie développée ici est — il faut insister sur cela d'un point de vue mathématique — la vraie géométrie [des actions] de contact. Il serait étonnant qu'à la place de cette vraie géométrie se réalise dans la nature une géométrie [des actions] de contact partielle, inconsequente et à laquelle se surajoute un champ électromagnétique. Mais, je peux bien sûr m'être fourvoyé avec ma conception; il n'est guère question ici que d'une pure spéculation; la comparaison avec l'expérience est bien entendu requise. Il faut en

14. E. KRETSCHMANN "ber den physikalischen Sinn der Relativit  postulate" *Annalen der Physik* 53 (1917) 575

15. Dont la preuve expérimentale existe déjà en partie (décalage vers le rouge des lignes spectrales    proximité des grandes masses).

outre tirer les conséquences de la théorie ; j'espère que l'on m'aidera dans cette tâche difficile.

Supplément juin 1955

Cet article marque le début des tentatives pour aboutir à une 'théorie unifiée des champs' qui ont été poursuivies par la suite — sans trop de succès jusque-là, me semble-t-il — par bien d'autres [chercheurs] : en particulier, comme on le sait, EINSTEIN s'est lui-même inlassablement occupé de ce problème jusqu'à la fin de sa vie.

Je suis parvenu à construire ma théorie dans deux travaux (34), (46) et ensuite dans la quatrième et surtout la cinquième édition de mon livre *Raum, Zeit, Materie*. J'ai alors opté pour un autre principe d'action — d'abord pour des raisons formelles, mais [ce choix a] ensuite [été] renforcé par les recherches de W. PAULI (*Verhandlungen der deutschen physikalischen Gesellschaft* **21**, 1919).

L'argument le plus fort en faveur de ma théorie semblait provenir du fait que l'invariance de jauge correspond au principe de conservation de la charge électrique, de même que l'invariance [par changement] de coordonnées correspond à la conservation de l'énergie-impulsion. Par la suite, la théorie quantique introduisit les potentiels ψ de SCHRÖDINGER-DIRAC du champ électron-positron ; en elle apparaît un principe d'invariance de jauge, obtenu à partir de l'expérience, qui garantit la conservation de la charge et qui relie ψ aux potentiels électromagnétiques φ_i de la même manière que ma théorie spéculative liait les potentiels g_{ik} aux φ_i , à ceci près que les φ_i sont mesurés avec une unité atomique connue et non à partir d'une unité cosmologique inconnue. Il me paraît indubitable que le principe d'invariance de jauge a toute sa place ici et non, comme je l'avais cru en 1918, dans la relation entre la gravitation et l'électricité. On se reportera ici à mon article (93) : "Geometrie und Physik."