

Calculs

Les axiomes

Le transport parallèle est une certaine règle qu'on se donne pour « transférer » un vecteur d'un point à un autre le long d'une courbe les reliant. Cette règle, Weyl se la donne en posant deux axiomes. Par le premier, le transport parallèle d'un point P à un point infiniment voisin P' est réalisé via une application linéaire de « l'espace des vecteurs basés en P » à celui basé en P'. Il existe donc une certaine matrice (γ^i_r) telle que l'image de tout vecteur $\vec{\xi} = (\xi^i)$ basé en P par le transport parallèle de P à P' s'écrit

$$\xi'^i = \xi^i - \gamma^i_r \xi^r.$$

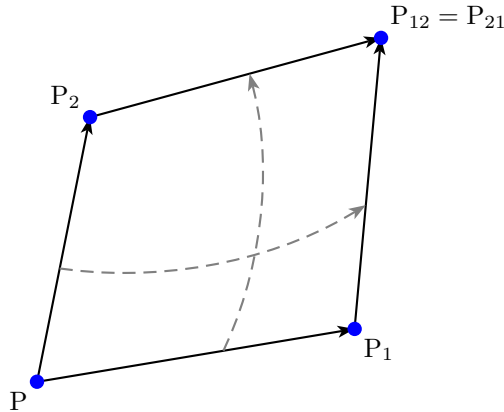
En imposant à la différence entre ces deux vecteurs d'être un infinitésimal du même ordre que $\overrightarrow{PP'} = (dx^i)$, chaque coefficient γ^i_r est une combinaison linéaire des dx^i :

$$\gamma^i_r = \Gamma^i_{rs} dx^s.$$

A priori, les coefficients Γ^i_{rs} dépendent de P et P' (et des coordonnées utilisées). En réclamant qu'ils ne dépendent pas de P', les γ^i_r deviennent des formes différentielles en P. Alors, pour tout point P' infiniment voisin de P, tel que $\overrightarrow{PP'} = (dx^i)$, l'image d'un vecteur $\vec{\xi}$ basé en P sera le vecteur $\vec{\xi} + d\vec{\xi}$ basé en P' donné par

$$d\xi^i = -\gamma^i_r \xi^r = -\Gamma^i_{rs} \xi^r dx^s$$

Le second axiome revient à se limiter aux espaces sans torsion (c'est en quelque sorte une règle du parallélogramme locale) : si P, P₁ et P₂ sont trois points infiniment voisins entre eux, et si P₁₂ et P₂₁ sont les deux points tels que $\overrightarrow{P_1P_{12}}$ et $\overrightarrow{P_2P_{21}}$ sont les images de $\overrightarrow{PP_2}$ et $\overrightarrow{PP_1}$ par transport parallèle de P jusqu'à P₂ et P₁ respectivement alors P₁₂ et P₂₁ coïncident.



Autrement dit :

$$\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{P_1P_{12}} = \overrightarrow{PP_2} + \overrightarrow{P_2P_{21}}. \quad (1)$$

En coordonnées, si $\overrightarrow{PP_1} = (dx^i)$ et $\overrightarrow{PP_2} = (\delta x^i)$ alors

$$\overrightarrow{P_2P_{21}} = (dx^i + \delta dx^i) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{P_1P_{12}} = (\delta x^i + d\delta x^i)$$

avec

$$\delta dx^i = -\Gamma_{rs}^i dx^r \delta x^s \quad \text{et} \quad d\delta x^i = -\Gamma_{rs}^i \delta x^r dx^s.$$

L'égalité (1) équivaut à $d\delta x^i = \delta dx^i$, ou encore à

$$\Gamma_{rs}^i dx^r \delta x^s = \Gamma_{rs}^i \delta x^r dx^s \iff (\Gamma_{rs}^i - \Gamma_{sr}^i) dx^r \delta x^s = 0 \iff \boxed{\Gamma_{rs}^i = \Gamma_{sr}^i} \quad (2)$$

Reprenons deux points infiniment voisins P et P', et deux vecteurs $\vec{\xi}, \vec{\eta}$ basés en P devenant respectivement $\vec{\xi} + d\vec{\xi}$ et $\vec{\eta} + d\vec{\eta}$ par transport parallèle de P à P'. L'hypothèse de similitude contenue dans le premier axiome implique que $g_{P'}(\vec{\xi} + d\vec{\xi}, \vec{\eta} + d\vec{\eta})$ est proportionnel à $g_P(\vec{\xi}, \vec{\eta})$, soit :

$$(g_{ik} + dg_{ik})(\xi^i + d\xi^i)(\eta^k + d\eta^k) \propto g_{ik}\xi^i\eta^k.$$

En notant le coefficient de proportionnalité $1 + \varphi$, et en ne conservant que les infinitésimaux du premier ordre, on a alors

$$\begin{aligned} & \xi^i \eta^k dg_{ik} + g_{ik}(\xi^i d\eta^k + \eta^k d\xi^i) = \varphi g_{ik} \xi^i \eta^k \\ \iff & \xi^i \eta^k dg_{ik} - g_{ik}(\xi^i \gamma_{ir}^k \eta^r + \eta^k \gamma_{kr}^i \xi^r) = \varphi g_{ik} \xi^i \eta^k \\ \iff & \xi^i \eta^k dg_{ik} - (\xi^i \gamma_{ir}^k \eta^r + \eta^k \gamma_{kr}^i \xi^r) = \varphi g_{ik} \xi^i \eta^k \\ \iff & \xi^i \eta^k dg_{ik} - (\gamma_{ik} + \gamma_{ki}) \xi^i \eta^k = \varphi g_{ik} \xi^i \eta^k \\ \iff & dg_{ik} - (\gamma_{ik} + \gamma_{ki}) = \varphi g_{ik}. \end{aligned} \quad (3)$$

Par conséquent, φ est une forme différentielle : $\varphi = \varphi_i dx^i$. On a alors

$$\begin{aligned} & dg_{ik} - (g_{is} \gamma_{kr}^s + g_{ks} \gamma_{ir}^s) = \varphi g_{ik} \\ \iff & dg_{ik} - (g_{is} \Gamma_{kr}^s + g_{ks} \Gamma_{ir}^s) dx^r = \varphi_r g_{ik} dx^r \\ \iff & \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r} dx^r - (\Gamma_{i,kr} + \Gamma_{k,ir}) dx^r = \varphi_r g_{ik} dx^r, \end{aligned}$$

d'où les n^3 relations

$$\boxed{\Gamma_{i,kr} + \Gamma_{k,ir} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r} - g_{ik} \varphi_r} \quad (4)$$

Connaissant g et φ , elles permettent de déterminer les coefficients Γ_{kr}^i . Pour cela, il suffit d'utiliser la symétrie (2) induisant

$$\Gamma_{i,kr} = g_{is} \Gamma_{kr}^s = g_{is} \Gamma_{rk}^s = \Gamma_{i,rk},$$

puis d'écrire les formulations équivalentes obtenues en permutant circulairement les indices i, k et r :

$$\Gamma_{r,ri} + \Gamma_{r,ki} = \frac{\partial g_{kr}}{\partial x^i} - g_{kr} \varphi_i \quad (5)$$

$$\Gamma_{r,ik} + \Gamma_{i,rk} = \frac{\partial g_{ri}}{\partial x^k} - g_{ri} \varphi_k. \quad (6)$$

L'opération (4)–(5)+(6) donne alors

$$\Gamma_{i,kr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r} - \frac{\partial g_{kr}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ri}}{\partial x^k} - g_{ik} \varphi_r + g_{kr} \varphi_i - g_{ri} \varphi_k \right),$$

et enfin

$$\boxed{\Gamma_{kr}^i = \frac{1}{2} g^{ij} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^r} - \frac{\partial g_{kr}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{rj}}{\partial x^k} - g_{jk} \varphi_r + g_{kr} \varphi_j - g_{rj} \varphi_k \right)} \quad (7)$$

Remarque 1 Le tenseur g_{ij} étant de type $(0, 2)$, il se transforme sous un changement de coordonnées $x^i \rightarrow x^\mu$ de la façon suivante :

$$g_{ij} \longrightarrow g_{\mu\nu} = \Lambda^i_\mu \Lambda^j_\nu g_{ij} \quad \text{avec} \quad \Lambda^i_\mu = \frac{\partial x^i}{\partial x^\mu},$$

tandis que son inverse g^{ij} , qui est de type $(2, 0)$:

$$g^{ij} \longrightarrow g^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_i \Lambda^\nu_j g^{ij} \quad \text{avec} \quad \Lambda^\mu_i = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^i},$$

les matrices Λ^i_μ et Λ^μ_i étant bien sûr inverses :

$$\Lambda^i_\mu \Lambda^\mu_j = \delta^i_j \quad \text{et} \quad \Lambda^\mu_i \Lambda^\nu_j = \delta^\mu_\nu.$$

Les termes de (7) qui ne comportent pas de dérivées partielles sont clairement des tenseurs de type $(1, 2)$. Ce qui reste n'en est pas un et on peut vérifier que, globalement, Γ^i_{jk} se transforme bien comme un symbole de Christoffel :

$$\Gamma^i_{jk} \longrightarrow \Gamma^\mu_{\nu\sigma} = \Lambda^\mu_i \Lambda^j_\nu \Lambda^k_\sigma \Gamma^i_{jk} + \Lambda^\mu_i \frac{\partial \Lambda^i_\nu}{\partial x^\sigma}.$$

Dilatation

Une « dilatation » locale $g_{ik} \rightarrow \lambda g_{ik}$ (sans action sur les coordonnées) laisse invariantes les formes différentielles γ^i_k mais transforme $\gamma_{ik} = g_{ir} \gamma^i_r$ en $(\lambda g_{ir}) \gamma^i_r = \lambda \gamma_{ik}$, dg_{ik} en $d(\lambda g_{ik}) = \lambda dg_{ik} + g_{ik} d\lambda$, et la relation (3) devient

$$\lambda dg_{ik} + g_{ik} d\lambda - \lambda(\gamma_{ik} + \gamma_{ki}) = \tilde{\varphi} \lambda g_{ik}$$

où on a noté $\tilde{\varphi}$ le résultat de la transformation de φ sous cette dilatation. On a alors

$$g_{ik} d\lambda + \lambda \varphi g_{ik} = \tilde{\varphi} \lambda g_{ik},$$

c'est-à-dire

$$\varphi + \frac{d\lambda}{\lambda} = \tilde{\varphi} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\tilde{\varphi} = \varphi + d(\ln \lambda)}$$

Ainsi, la forme différentielle φ acquiert une différentielle totale, et on a

$$\varphi_i \rightarrow \varphi_i + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x^i}.$$

On vérifie bien, à l'aide de cette relation, que la formule (7) est invariante par dilatation. Bref, toute la géométrie peut être caractérisée aussi bien par le couple métrique-champ de formes (g, φ) que par $(\lambda g, \varphi + d \ln \lambda)$, quel que soit le champ scalaire λ . Par dérivation extérieure de $-\varphi$ ¹ on obtient

$$\mathcal{F} = -d\varphi = -d\varphi_i \wedge dx^i = \frac{1}{2} F_{ik} dx^i \wedge dx^k,$$

où on a introduit le tenseur antisymétrique

$$\boxed{F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i}}$$

La forme $\mathcal{F}$ et le tenseur F_{ik} sont évidemment invariants par dilatation car $\varphi \rightarrow \varphi + d \ln \lambda$ entraîne $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} - d^2 \ln \lambda = \mathcal{F}$. Dans les notations de l'article,

$$dx^i \wedge dx^k = dx^i \delta x^k - dx^k \delta x^i = \Delta x^{ik}.$$

Si on interprète F_{ik} comme le tenseur de Faraday, $d\mathcal{F} = d^2\varphi = 0$ équivaut aux équations de Maxwell sans sources

$$\boxed{\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} = 0} \quad (8)$$

1. Le signe « $-$ » est introduit pour coïncider avec la convention de l'article.

Géodésiques

Une géodésique est une courbe qui transporte son vecteur tangent parallèlement à lui-même. Par conséquent, une courbe $x(\tau)$ sera une géodésique si

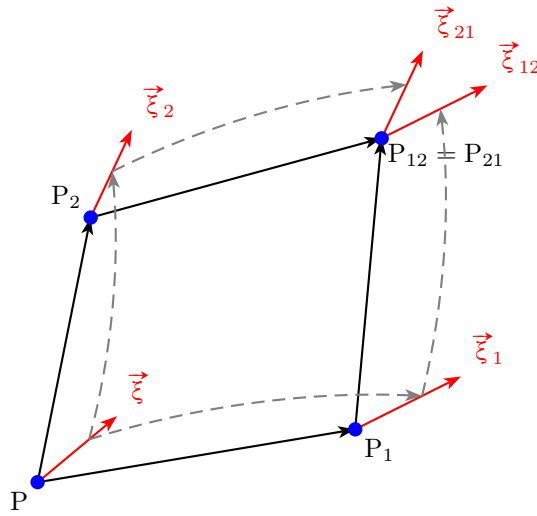
$$d\left(\frac{dx^i}{d\tau}\right) = -\Gamma_{rs}^i \frac{dx^r}{d\tau} \frac{dx^s}{d\tau}$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma_{rs}^i \frac{dx^r}{d\tau} \frac{dx^s}{d\tau} = 0$$

Courbure

Prenons quatre points P , P_1 , P_2 et $P_{12} = P_{21}$ infiniment voisins, et donnons-nous un vecteur $\vec{\xi}$ basé en P . On peut transporter parallèlement ce vecteur de P à $P_{12} = P_{21}$ en passant par P_1 ou par P_2 . Les vecteurs résultant de ces deux transports ne coïncideront généralement pas. La courbure sera la mesure de ce désaccord.



Appelons $\vec{\xi}_1$ (resp. $\vec{\xi}_2$) l'image de $\vec{\xi}$ par le transport parallèle de P à P_1 (resp. P_2) puis $\vec{\xi}_{12}$ (resp. $\vec{\xi}_{21}$) l'image de $\vec{\xi}_1$ (resp. $\vec{\xi}_2$) par le transport parallèle de P_1 (resp. P_2) à $P_{12} = P_{21}$. On a

$$\begin{aligned}\xi_{12}^i &= \xi_1^i + \delta \xi_1^i = (\xi^i + d\xi^i) + \delta(\xi^i + d\xi^i) \\ \xi_{21}^i &= \xi_2^i + d\xi_2^i = (\xi^i + \delta \xi^i) + d(\xi^i + \delta \xi^i)\end{aligned}$$

donc le désaccord entre ces vecteurs est

$$\begin{aligned}\Delta \xi^i &= \xi_{12}^i - \xi_{21}^i = \delta(d\xi^i) - d(\delta \xi^i) = -\delta(\Gamma_{jk}^i \xi^j dx^k) + d(\Gamma_{jk}^i \xi^j \delta x^k) \\ &= (d\Gamma_{jk}^i \delta x^k - \delta \Gamma_{jk}^i dx^k) \xi^j + \Gamma_{jk}^i (d\xi^j \delta x^k - \delta \xi^j dx^k) + \Gamma_{jk}^i (d\delta x^k - \delta dx^k) \xi^j.\end{aligned}$$

Comme $d\delta x^k - \delta dx^k = 0$ par l'absence de torsion, on a

$$\Delta \xi^i = \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} dx^l \delta x^k - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} \delta x^l dx^k \right) \xi^j - \Gamma_{jk}^i (\Gamma_{rl}^j \xi^r dx^l \delta x^k - \Gamma_{rl}^j \xi^r \delta x^l dx^k) = R_{jk}^i \xi^j$$

où

$$R_{jk}^i = R_{jkl}^i dx^k \delta x^l \quad \text{avec} \quad R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} + \Gamma_{rk}^i \Gamma_{jl}^r - \Gamma_{rl}^i \Gamma_{jk}^r \quad (9)$$

Il est clair que R^i_{jkl} change de signe par permutation de j et k , ce qui permet d'écrire

$$R^i_j = \frac{1}{2} R^i_{jkl} \Delta x^{kl}.$$

En utilisant (9) il est ensuite très simple de vérifier qu'en permutant circulairement les indices j, k, l , on a

$$\boxed{R^i_{jkl} + R^i_{klj} + R^i_{ljk} = 0}$$

Avec un peu de patience, on peut s'assurer à l'aide de (8) et (9) que R^i_{jkl} est un tenseur (de Riemann) de type $(1, 3)$. Il est de poids 0 puisque les symboles de Christoffel sont invariants par dilatation. Par contraction, $R_{i,jkl} = g_{ir} R^r_{jkl}$ est un tenseur de type $(0, 4)$ et de poids 1.