

W. PAULI.

64. Pie's theory

Preliminary: théorie de Maxwell en notation tensorielle du langage de Minkowski,

$$\text{4-vektor} = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right) \quad \text{tg} \quad \begin{aligned} \vec{E} &= -\partial_t \vec{A} - \nabla \phi \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \end{aligned}$$

(205)

$$(206) \quad F_{ik} = \partial_i \phi_k - \partial_k \phi_i = \frac{\partial \phi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \phi_i}{\partial x^k}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \boxed{} \\ \boxed{} & \begin{matrix} 0 & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & 0 & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{---} \vec{B} \\ \text{---} \end{matrix}$$

↑
F_{ik}

$$(203) \quad \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0$$

$$\hookrightarrow \begin{aligned} \nabla \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} &= 0 & \text{éq. "constitutives"}, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

Éq. du mouvement (dynamique)

$$\delta S_0 = \delta \int - \frac{1}{4} F_{ik} F^{ik} d^4x = 0$$

$$= \sum_i \sum_k F_{ik} F^{ik} \quad \text{invariant de Lorentz.}$$

antiradiation.

L_0 = densité lagrangienne invariante

$d^4x = dt dx dy dz$ invariant

(130) $L_0 = - \frac{1}{4\epsilon_0} F_{ik} F^{ik} = \frac{1}{2} \epsilon_0 (|\vec{E}|^2 - c^2 |\vec{B}|^2)$
Schwarzschild 1903.

$$\delta S_0 = 0 : \quad \frac{\partial L_0}{\partial \phi_l} - \frac{\partial}{\partial x^m} \frac{\partial L_0}{\partial \left(\frac{\partial \phi_l}{\partial x^m} \right)} = 0$$

↓
zero

↓
 $k_i = l_m$
 $i k = l m$

$$\frac{\partial L_0}{\partial (\partial_m \phi_l)} = \frac{1}{\epsilon_0} F^{ml}$$

$$\boxed{\frac{\partial F^{ml}}{\partial x^m} = 0}$$

↪ $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

Maxwell sans sources.

Avec sources on ajoute une terme
interaction charges - champ (de jauge)

$$L = - \frac{1}{4\epsilon_0} F_{ik} F^{ik} - S_i \phi^i$$

$$s^i = (\rho c, \vec{j}) \text{ sources.}$$

(178)

$$\delta S = \delta \int \left(-\frac{1}{4\mu_0} F_{ik} F^{ik} - s^i \phi_i \right) d^4x$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \phi_l} = -s^l \right]$$

(208) $\left[\frac{\partial \bar{F}^{kl}}{\partial x^m} = \mu_0 s^l \right]$ Maxwell avec sources:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$$

(C) p 80

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}$$

Rq F^{ik} est antisymétrique de

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} &= \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{1}{2} F^{ik} - \frac{1}{2} \bar{F}^{ki} \right) \\ &\stackrel{\checkmark}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^{ik}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^{ki}}{\partial x^k \partial x^i} = 0 \end{aligned}$$

s^i

dc $\frac{\partial s^i}{\partial x^i} = 0$ (197) ou $\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ (A) p 76.

Exercice: Théorie de Nie

Pour assurer (197) avec des sources à l'échelle microscopique qui ne sont pas données à priori, Nie suppose une modification à courte distance de la théorie de Maxwell



particule
élémentaire

modification à l'intérieur
 δ^i est due à un H^{ik}

$$\delta^i = \frac{2H^{ik}}{2x^k} \quad (467)$$

mais à l'extérieur on
retrouve F^{ik} , ϕ^i de
Maxwell.

Nie demande que H^{ik} et δ^i soient des
pts universels de F^{ik} et ϕ^i

↓
ce terme brise

l'invariance de jauge de
la théorie. Ce n'est pas
un pb —

La lagrangien de Nie (World function)
est construit sur des invariants de Lorentz

$$\begin{aligned}
 L_{\text{tot}} = & \alpha \frac{1}{2} F_{ik} F^{ik} && \text{Maxwell} \\
 & + \beta \phi_i \phi^i && \text{terme de masse} \\
 & + \gamma F_{ir} \phi_s F^{is} \phi^r \\
 & + \delta (F_{ik} \phi_l + F_{li} \phi_k + F_{kl} \phi_i)^2 \leftarrow \text{ajout dû à Pauli.}
 \end{aligned}$$

Rq, Pauli prend la convention

$$L_0 = \frac{1}{2} F_{ik} F^{ik} \quad \text{de} \quad \frac{\partial L_0}{\partial F_{ik}} = 2 \frac{1}{2} F^{ik} = F^{ik}$$

et du coup le Lagrangien complet vaut

$$\begin{aligned}
 L &= L_0 - 2 s^i \phi_i \\
 &= \frac{1}{2} F_{ik} F^{ik} - 2 s^i \phi_i
 \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad s^i = -\frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial \phi_i}$$

Π^i_e va donc devenir

$$(468) \quad H^{ik} = \frac{\partial L}{\partial F_{ik}} \quad \text{et garde} \quad s^i = -\frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial \phi_i}$$

d'où si on des variations de F_{ik} et de ϕ_i prend la forme

$$(468a) \quad \delta L = H^{ik} \delta F_{ik} - 2 s^i \delta \phi_i + \text{autres sources de variations possibles.}$$

et ce L doit être tel que

$$\int L d^4x = 0 \quad (469)$$

Pauli propose ensuite une extension dans le formalisme de la relativité générale (il se réfère à Hilbert et Weyl) mais tout en restant dans le cadre de l'espace. Il s'agit de Poincaré pour retrouver les résultats de Dirac. C'est une extension de forme, mais elle est toujours la dernière de la relativité restreinte.

→ introduction de $\sqrt{-g}$ car

$$\int d^4x \sqrt{-g} L = \int d^4x \mathcal{L} \quad (469a)$$

même
invariante
q- g_{ik} général

↑
"gothique"

$\mathcal{L} = \sqrt{-g} L$ et il en résulte d'autres quantités. Par exemple la loi de conservation (194) devient

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0 \quad (194a) \text{ avec } \mathcal{L} = \sqrt{-g} L$$

et la densité de courant (464) devient

$$\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{H}^{ik}}{\partial x^k} \quad (464b) \text{ avec } \mathcal{H}^{ik} = \sqrt{-g} H^{ik}$$

On peut écrire $\delta \mathcal{L} = \tau_{ik} \delta g^{ik}$ pour que $\mathcal{L}$ varie si la métrique varie. C'est un terme additionnel à (468a).

Le principe de moindre action devient, pour une variation de la métrique

$$\begin{aligned} \delta \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} &= \delta \int d^4x \mathcal{L} \\ &= \int d^4x \left[\frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right)} + \dots \right] \delta g^{ik} \end{aligned}$$

$$\tau_{ik} = \sqrt{-g} T_{ik}$$

qui définit le "stress-energy tensor"

$$T_{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right)} + \dots \right)$$

Ces termes disparaissent car en l'absence de gravitation $\mathcal{L}$ ne dépend pas des dérivées de g_{ik} .

$$\text{donc } T_{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} L}{\partial g^{ik}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(L \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g^{ik}} + \sqrt{-g} \frac{\partial L}{\partial g^{ik}} \right)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial g^{ik}} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}} (-g) g_{ik} \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ik} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{avec } \delta g = -g g_{ik} \delta g^{ik} \quad (72) \\ & \delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{ik} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(-\frac{1}{2} \sqrt{-g} L g_{ik} \right) + \frac{\partial L}{\partial g^{ik}} \\ &= \frac{\partial L}{\partial g^{ik}} - \frac{1}{2} L g_{ik} \quad (470) \end{aligned}$$

$$T_i{}^k = g^{kl} T_{il} = \frac{\partial L}{\partial g^{il}} g^{kl} - \frac{1}{2} L \underbrace{g^{kl} g_{il}}_{\delta_i^k} \quad (470)$$

On revient maintenant à δL dans (468 c) avec aussi la contribution de la variation de la métrique $\frac{\partial L}{\partial g^{ik}} \delta g^{ik}$

Donc

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial g^{ik}} \delta g^{ik} + H^{ik} \delta F_{ik} - 2 \delta^i \delta \phi_i \quad (1000)$$

On considère maintenant une variation infinitésimale des coordonnées pour obtenir l'équation

$$x'^i = x^i + \epsilon \xi^i(x) \quad (160)$$

$$\begin{aligned} \text{alors} \quad \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} &= \delta_k^i + \epsilon \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} \\ \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} &= \delta_i^k - \epsilon \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \end{aligned} \quad (161)$$

d'où la variation d'un vecteur (163) et celle d'un tenseur de rang 2 (164) soit, pour ceux qui apparaissent dans (1000)

$$\delta \phi_i = - \epsilon \frac{\partial \xi^r}{\partial x^i} \phi_r$$

$$\delta F_{ik} = - \epsilon \left(\frac{\partial \xi^r}{\partial x^i} F_{rk} + \frac{\partial \xi^r}{\partial x^k} F_{ir} \right)$$

$$\delta g^{ik} = + \epsilon \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^r} g^{rk} + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^r} g^{ir} \right)$$

que l'on reporte dans (1000) on obtient

$$\delta L = \epsilon \left[\frac{\partial L}{\partial g^{ik}} \left(\frac{\partial \zeta^i}{\partial x^r} g^{rk} + \frac{\partial \zeta^k}{\partial x^r} g^{ir} \right) - H^{ik} \left(\frac{\partial \zeta^r}{\partial x^i} \bar{F}_{rk} + \frac{\partial \zeta^r}{\partial x^k} \bar{F}_{ir} \right) + 2s^i \frac{\partial \zeta^r}{\partial x^i} \phi_r \right]$$

$$= \epsilon \frac{\partial \zeta^i}{\partial x^k} \left[\underbrace{\frac{\partial L}{\partial g^{il}} g^{kl} + \frac{\partial L}{\partial g^{li}} g^{lk}}_{\substack{i \rightarrow i, \quad k \rightarrow i \\ r \rightarrow k, \quad r \rightarrow k \\ k \rightarrow l, \quad i \rightarrow l}} \right]$$

$$\underbrace{- H^{kl} \bar{F}_{il} - H^{lk} \bar{F}_{li}}_{-2H^{kl} \bar{F}_{il}} + 2s^k \phi_i \Big]$$

$\begin{matrix} r \rightarrow i \\ i \rightarrow k \\ k \rightarrow l \end{matrix}$
 $\begin{matrix} r \rightarrow i \\ k \rightarrow k \\ i \rightarrow l \end{matrix}$
 $\begin{matrix} r \rightarrow i \\ i \rightarrow k \end{matrix}$

$$0 = 2\epsilon \frac{\partial \zeta^i}{\partial x^k} \left[\frac{\partial L}{\partial g^{il}} g^{lk} - H^{kl} \bar{F}_{il} + s^k \phi_i \right] \quad (\text{loop})$$

hence $\frac{\partial L}{\partial g^{il}} g^{lk} = H^{kl} \bar{F}_{il} - s^k \phi_i$

reporté dans (470)

$$T_i^k = H^{kl} F_{il} - S^k \phi_i - \frac{1}{2} L \delta_i^k \quad (470a)$$

l'équation de conservation

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^l} = 0 \quad (341)$$

devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} &= 0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} T_i^k}{\partial x^k} - \frac{1}{2} T^{rs} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i} \end{aligned} \quad (341c)$$

à savoir nous sommes liés à

$$\frac{\partial S^k}{\partial x^k} \rightarrow \frac{\partial S^k}{\partial x^k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} S^k}{\partial x^k} + \Gamma^k_{ll} S^l$$

(74).

$$\frac{1}{2} g^{km} \frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^l}$$

Après tout, comme les H^k et les S^k et suffirait
être des fonctions universelles de F^k et ϕ^k , le
lagrangien prend la forme générale (1999)
à courte distance.

Il semble que Nye ait considéré des expressions
du type

$$L = \frac{1}{2} F_{ik} F^{ik} + \beta (\phi_k \phi^k)^3$$

qui conduisent à des solutions solitons (équations
du mouvement non linéaires) qui pourraient
représenter des particules élémentaires.

Deux soucis majeurs : on ne semble
pas obtenir la droite de la constante β et du
couple n'importe quelle charge nulle possible,
ce qui n'est pas le cas dans la nature.

Autre problème plus grave d'après Pauli : il
n'y a pas d'invariance de jauge.

Born a popularisé la théorie de Nye à Göttingen,
notamment auprès de Hilbert qui a pu
être influencé par Nye / Born dans son

présentation variationnelle de l'énergie
unitaire,

Plus tard Born (avec Infeld) reprendra
ces idées de modifications non locales
à courte distance de la théorie de Maxwell
pour éviter les divergences liées aux particules
ponctuelles.

Par analogie avec le Lagrangien de la
particule libre en dynamique newtonienne

$$L_0 = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$$

corrigé en relativité restreinte en

$$L = - m c^2 \sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}$$

où c est une vitesse limite, Born et
Infeld partant du Lagrangien de
Schwarzschild du champ

$$L_0 = \frac{1}{2} \epsilon_0 (|\vec{E}|^2 - c^2 |\vec{B}|^2)$$

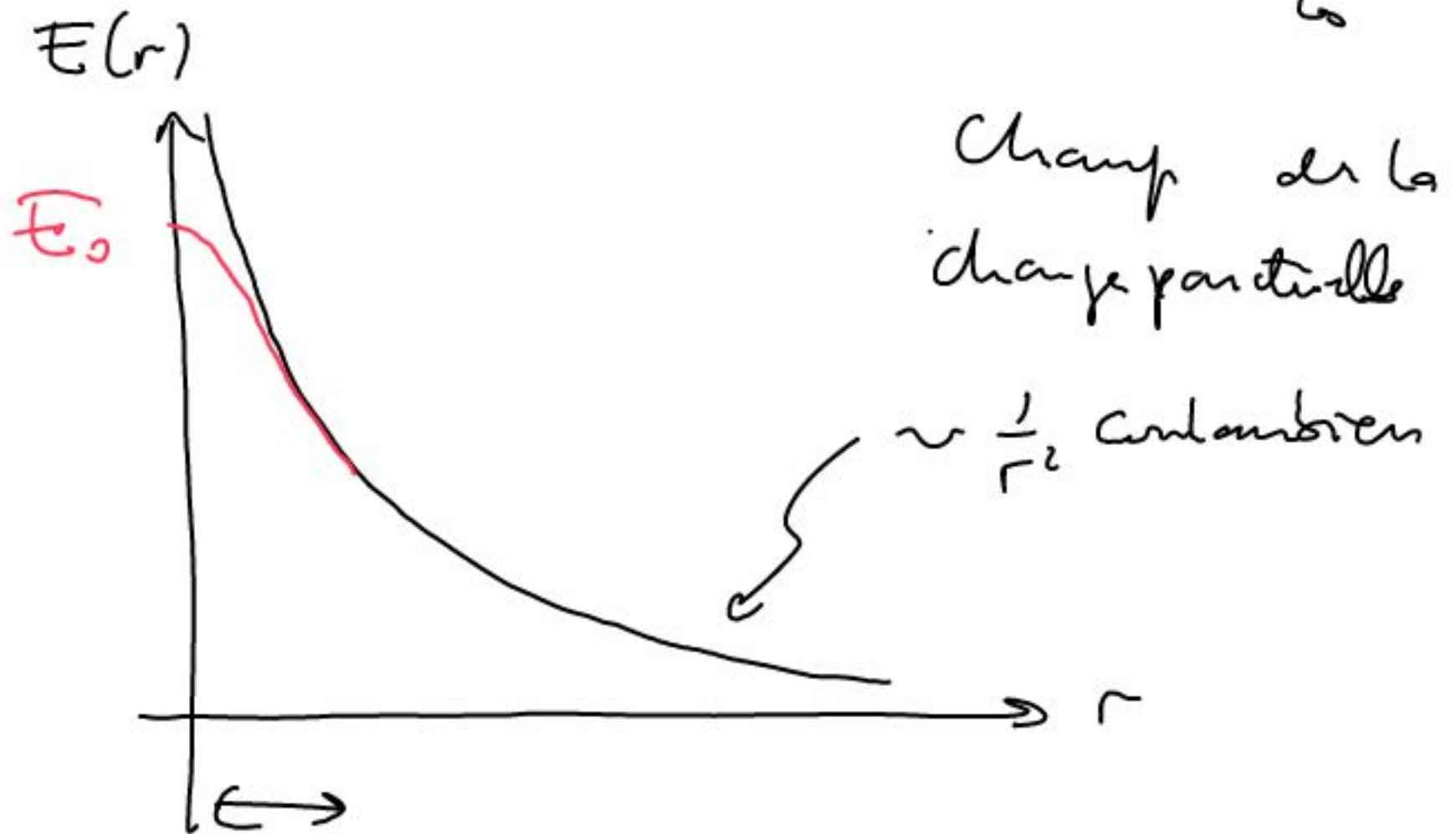
qui admet des solutions non bornées pour le
champ et généralisant en

$$L = - \epsilon_0^2 \sqrt{1 - \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{|\vec{E}|^2 - c^2 |\vec{B}|^2}{\epsilon_0^2}}$$

en outre E_0 est la valeur maximale de
 électrique (qui pourrait être considérable).

Born et Infeld impliquent même les termes
 non quadratiques

$$L = - E_0^2 \sqrt{1 - \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{(|\vec{E}|^2 - c^2 |\vec{B}|^2)}{E_0^2}} + \frac{1}{2} c^2 \frac{(\vec{E} \cdot \vec{B})^2}{E_0^4}$$



Donc on se rend compte que la théorie de
 Born - Infeld s'écarte de la
 théorie de Maxwell.

L. Corry Arch. Hist. Ex. Sc. 53 489 1999
P. Born Annales de l'IHP 7 (1982) 155
V. Vitzum Unified field theories