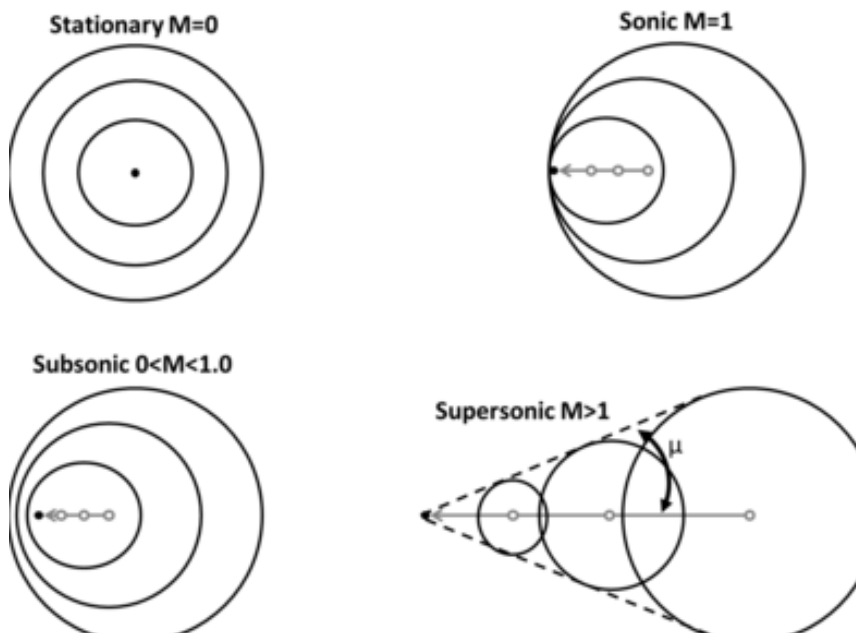
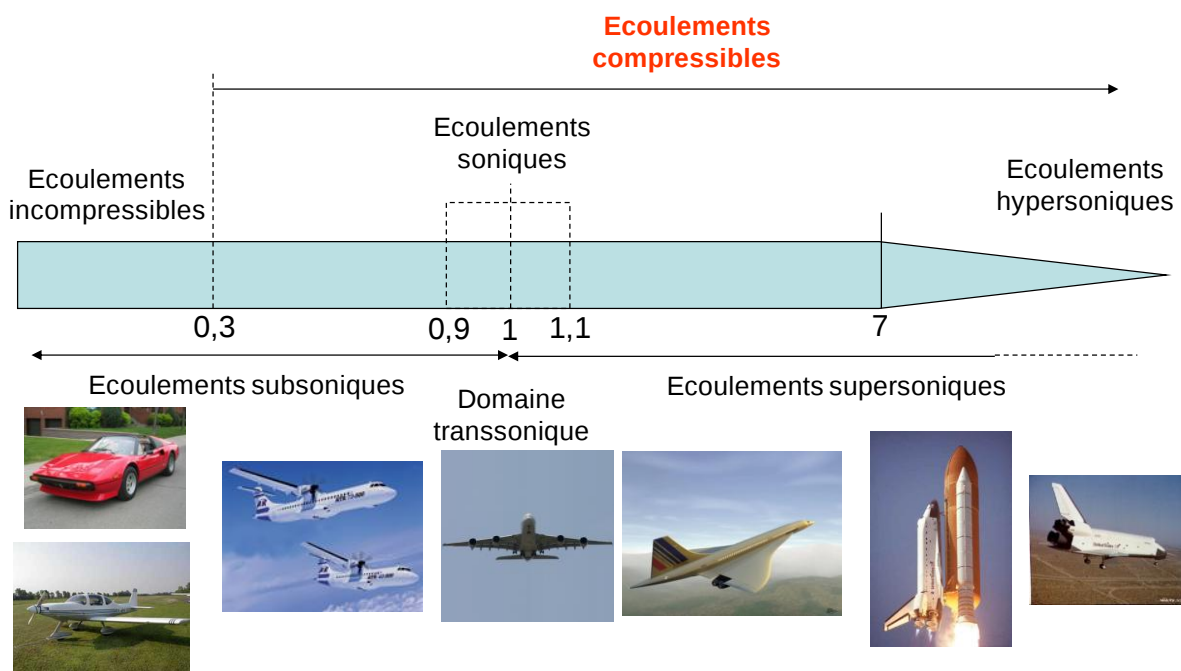


Chapitre I : Notions générales sur les écoulements compressibles

Les différents régimes d'écoulement, le nombre de Mach

Les différents régimes d'écoulements

Nombre de Mach: $M=V/C$
(V vitesse du mobile, C vitesse locale du son)



Propagation d'une onde de pression en fonction du régime d'écoulement.

Quelques rappels, outils et notations

Soit une particule fluide de masse δm , de volume δV . Plaçons nous de plus à un instant t fixé.

La masse volumique ρ peut être définie par la quantité :

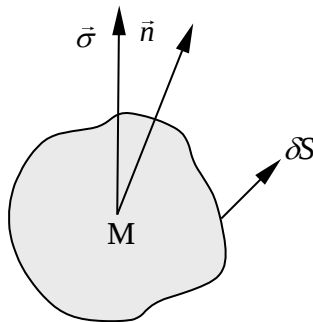
$$\rho = \frac{\delta m}{\delta V}$$

Efforts

Si sur un élément de surface δS orienté par le vecteur normal $\vec{n}$, la résultante des force est $\delta \vec{f}$, alors le vecteur contrainte $\vec{\sigma}$ peut être défini par :

$$\vec{\sigma} = \frac{\delta \vec{f}}{\delta S}$$

Si le fluide est parfait, alors $\vec{\sigma}$ est colinéaire à $\vec{n}$ et $|\vec{\sigma}| = p$, où p est la pression du fluide en M.



L'approximation du fluide parfait sera le cadre de travail de ce cours, bien que les effets de fluide réel seront abordés.

Travail des forces de pression

Il est ainsi possible de calculer le travail élémentaire effectué par les forces de pression, et ceci pour une déformation élémentaire du domaine fluide.

Soit S un élément de surface plane orientée par le vecteur normal $\vec{n}$ (convention de la **normale sortante ou extérieure**). Soit $\varepsilon(M)$ la déformation élémentaire du domaine fluide mesurée au voisinage du point M sur l'axe déterminé par $\vec{n}$.

Le travail W des forces de pression sur S est donné par :

$$W = - \iint_S P(M) \cdot \varepsilon(M) \cdot dS$$

On peut également écrire pour un domaine fluide suffisamment petit :

$$\delta W = -P dV$$

Ici, dV représente la variation élémentaire du volume du petit domaine au cours de la déformation élémentaire.

Notions de thermodynamique utiles dans le cadre de ce cours

Premier principe

- Faisons l'hypothèse d'un système **calorifiquement isolé** et que nous considérerons **au repos**, ce qui correspond au cas des faibles vitesses de déformation.

Soit U l'énergie interne du système. Le premier principe s'écrit :

$$U_2 - U_1 = W,$$

lorsque le système passe de l'état « 1 » à l'état « 2 ».

ou bien encore, écrit sous forme différentielle :

$$dU = dW$$

où W est le travail des forces de pression dans la déformation du système qui le fait passer de l'état « 1 » à l'état « 2 ».

- Lorsque le système n'est **pas calorifiquement isolé**, le fluide, dans sa déformation, reçoit une quantité de chaleur Q .

Sous forme différentielle le premier principe s'écrit alors :

$$dU = dQ + dW = dQ - p dV$$

En général, dQ n'est pas une différentielle exacte. Ainsi, le **deuxième principe** de la thermodynamique peut être introduit, qui spécifie que dQ/T est la différentielle exacte de la fonction S , appelée entropie du système :

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

où T est la température absolue du système.

Dans les transformation réelles on a $dS \geq 0$, ce qui traduit également la notion d'irréversibilité.

Si $dS=0$, la transformation est dite **réversible**.

Enthalpie

L'enthalpie est définie par :

$$H=U+PV$$

Deux relations thermodynamiques seront fréquemment utilisées dans ce cours :

$$dU=TdS-PdV, \text{ sachant que } dQ = TdS$$

ainsi : $dH=TdS-PdV+PdV+VdP$, soit :

$$dH=TdS+VdP$$

Il faut noter que U , S et Q sont des grandeurs extensives.

En général, ces quantités sont rapportées à l'unité de masse : on les nomme ainsi grandeurs spécifiques et nous utiliserons ces notations tout au long de ce cours, sans, volontairement, changer les notations.

Loi d'état

Pour les liquides, et donc en hydrodynamique, nous utilisons $\rho=\text{constante}$ (fluides isovolumes).

L'état d'un fluide compressible (gaz) peut être décrit par deux variables seulement : en choisissant comme variable ρ et S , on peut écrire la pression p sous la forme :

$$p=f(\rho,S)$$

Dans le cas des gaz réels, on pose :

$$c^2 = \frac{\partial f(\rho,S)}{\partial \rho}$$

c est appelé célérité du son et f est une fonction ne dépendant que du gaz considéré. Nous reviendrons plus en détail sur cette notion par la suite.

Dans tout ce développement, l'approximation des gaz parfaits sera considérée. L'équation d'état sera ainsi :

$$\frac{P}{\rho} = rT$$

où r est la constante des gaz parfaits utilisées par les aérodynamiciens :

$$r = \frac{R}{M}$$

où $R=8,32$ USI et M est la masse molaire ($M=29$ gr/mol dans le cas particulier de l'air). On aura donc ainsi $r \approx 287$ USI.

Une hypothèse plus forte, mais couramment admise sera également effectuée, celle des gaz calorifiquement parfaits : cette hypothèse stipule que les chaleurs spécifiques C_p et C_v (respectivement à pression et volume constant) ne dépendent pas de la température et sont des constantes ne dépendant que du fluide considéré. Pour ce type de gaz, on rappelle des relations liant l'énergie interne et l'enthalpie à la température absolue T :

$$U = C_v T$$

$$H = C_p T$$

De la même manière, en se ramenant à la masse unité, on désignera par V le volume massique, volume de 1kg de fluide.

De l'identité thermodynamique $dU = TdS - pdV$, il vient :

$$dS = \frac{dU + pdV}{T}$$

$$\text{Or, } dU = C_v dT \text{ et } dV = d\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{d\rho}{\rho^2}$$

$$\text{L'équation d'état des gaz parfaits fournit : } \frac{p}{\rho} = rT \text{ soit } dT = \frac{1}{r\rho} dp - \frac{p}{r} \frac{d\rho}{\rho^2}$$

soit

alors :

$$dS = \frac{C_v \left(\frac{dp}{r\rho} - \frac{p}{r} \frac{d\rho}{\rho^2} \right) - p \frac{d\rho}{\rho^2}}{T} = C_v \left(\frac{dp}{\rho r T} - \frac{p}{r T \rho} \frac{d\rho}{\rho} \right) - \frac{p}{T} \frac{d\rho}{\rho^2} = C_v \left(\frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho} \right) - r \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\text{soit : } dS = C_v \frac{dp}{p} - (C_v + r) \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\text{On posera, d'une manière générale : } \gamma = \frac{C_v + r}{C_v}$$

$$\text{soit : } \frac{dS}{C_v} = \frac{dp}{p} - \gamma \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\text{Ce qui conduit après intégration à : } \boxed{\frac{S - S_0}{C_v} = \ln \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right)}$$

S_0 étant une constante.

On a ainsi pour un gaz parfait :

$$P = e^{\frac{S-S_0}{C_v}} \rho^\gamma$$

De plus, par définition, $H=U+PV=(C_vT+rT)=C_pT$

Ce qui en définitif donne : $\gamma=\frac{C_p}{C_v}$ et $C_p-C_v=r$, connu sous le nom de relation de Mayer.

Identités relatives à l'entropie

$$\text{On a : } dU=TdS-PdV \text{ soit } dS=\frac{dU}{T}+\frac{p}{T}dV=C_v\frac{dT}{T}+\frac{p}{T}dV$$

$$\text{Or, } \frac{p}{T}dV=r\rho\left(\frac{-d\rho}{\rho^2}\right)$$

$$\text{soit encore : } dS=C_v\frac{dT}{T}-r\frac{d\rho}{\rho}$$

$$\text{En définitif : } \boxed{S=C_v\ln T-r\ln \rho}$$

$$\text{De même, on a : } dH=TdS+Vdp \text{ soit : } dS=\frac{dH}{T}-\frac{V}{T}dp=\frac{C_p dT}{T}-\frac{V}{T}dp$$

$$\text{Sachant que } V=\frac{1}{\rho}, dS=\frac{C_p dT}{T}-\frac{dp}{\rho T}=\frac{C_p dT}{T}-r\frac{dp}{p}$$

$$\text{Soit finalement: } \boxed{S=C_p\ln T-r\ln p}$$

En utilisant les deux identité précédentes :

$$S=C_v\ln T-r\ln \rho$$

$$S=C_p\ln T-r\ln p$$

En effectuant la différence de ces deux identités :

$$C_vS-C_pS = -rS = -rC_v\ln p+rC_p\ln \rho \text{ soit finalement: } \boxed{S=C_v\ln p-rC_p\ln \rho}$$

Célérité du son pour un gaz parfait

La célérité du son est définie : $c^2=\frac{\partial p(\rho,S)}{\partial \rho}$ et de plus $p=e^{\frac{S-S_0}{C_v}} \rho^\gamma$

$$\text{Ainsi, } c^2=\frac{\partial p}{\partial \rho} = \gamma e^{\frac{S-S_0}{C_v}} \rho^{\gamma-1} = \frac{p}{\rho^\gamma} \gamma \rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma rT = (\gamma-1)H$$

$$\text{Soit en résumé : } \boxed{c^2 = \gamma rT = (\gamma-1)H}$$

Dans le cas de l'air, on retiendra absolument les valeurs suivantes, très usuelles :

$$\gamma=1,4$$

$$C_p=1000 \text{ J/kg}$$

$$r=R/M=287 \text{ USI.}$$

Notions physiques sur la compressibilité et la propagation des ondes sonores

Notions sur la compressibilité

La compressibilité d'un fluide correspond à la diminution du volume en réponse à un accroissement de la pression.

On introduit, pour définir cette propriété, deux grandeurs :

- le coefficient de compressibilité isotherme, définit par :

$$\left. \frac{\delta v}{v} \right|_T = -\chi_T \delta p$$

avec : $\frac{\delta v}{v}$ diminution relative du volume d'une unité de masse pour une augmentation de pression δp .

Dans le cas d'un gaz parfait, $p v = cte$ (pour $T = cte$), on a : $\chi_T = \frac{1}{p}$

- le coefficient de compressibilité isentropique, définit par :

$$\left. \frac{\delta v}{v} \right|_s = -\chi_s \delta p$$

Dans le cas d'un gaz parfait, $p v^\gamma = cte$,

soit : $dP = cte \cdot (-\gamma v^{-\gamma-1} dv)$

ou encore : $\frac{dP}{p v^\gamma} = -\gamma v^{-\gamma-1} dv$

On a ainsi : $\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V}$

Soit finalement :

$$\chi_s = -\frac{1}{\gamma p}$$

Attention, ces coefficients ont la dimension de l'inverse d'une pression.

Remarques

Pour les liquides, le coefficient de compressibilité isotherme est pratiquement indépendant de la pression.

Le mercure est 13,3 fois plus compressible que l'eau

L'éthanol est 2.3 fois moins compressible que l'eau.

Le son, propagation d'une onde sonore

Nous nous placerons volontairement dans le cas de la propagation d'une onde dans un milieu à une seule dimension.

Toutes les transformations thermodynamiques seront considérées comme isentropiques, c'est à dire réversibles.

Si un objet est déplacé doucement dans l'air, l'air s'écoule simplement autour de lui. Cependant, si l'écoulement est rapide, il n'y a pas assez de temps pour qu'un tel écoulement se produise.

Ainsi le mouvement comprime l'air, et il en résulte une variation de pression qui va « pousser » une quantité d'air supplémentaire d'air, qui se trouve donc à son tour comprimée, ce qui équivaut à nouveau à une surpression et donc en définitif à la propagation d'une onde de pression.

L'équation du milieu dans lequel se propage l'onde est caractérisé par une équation du type $p = f(\rho)$.

Nous décomposerons donc la pression p et la masse volumique ρ de la façon suivante :

$$p = p_0 + p_e$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_e$$

où p_e et ρ_e désignent les changements de pression et de masse volumique respectivement, **ces deux grandeurs étant petites** par rapport à p_0 et ρ_0 respectivement.

On écrira donc :

$$p_0 + p_e = f(\rho_0 + \rho_e)$$

que l'on peut linéariser sous la forme :

$$p_0 + p_e = f(\rho_0) + \rho_e \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho_0)$$

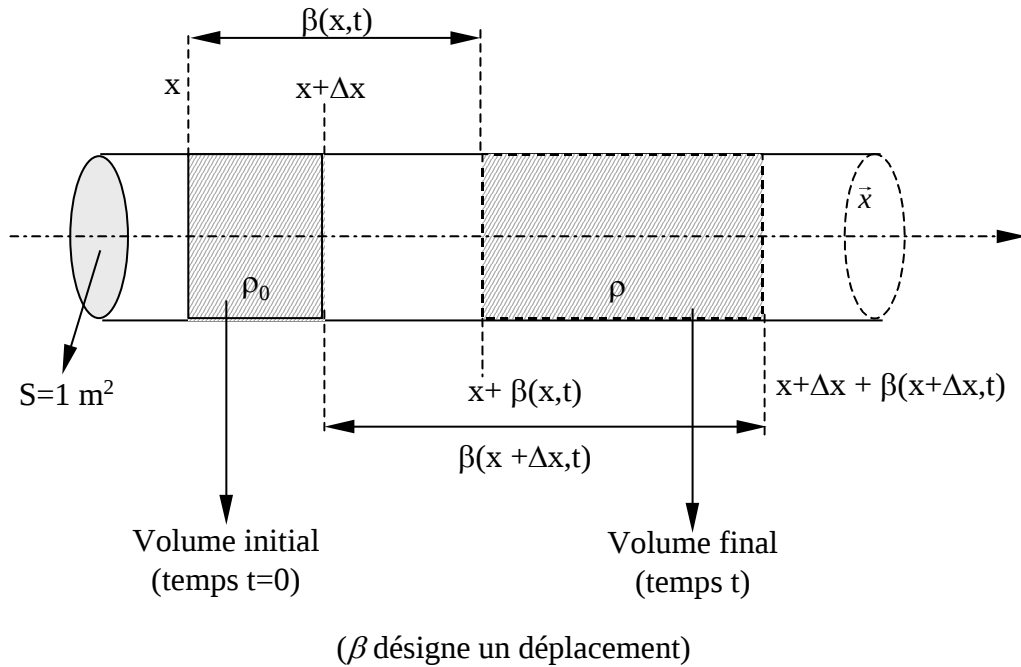
ainsi :

$$p_e = \rho_e \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho_0) = K \rho_e$$

(K étant une constante de proportionnalité)

ci qui montre que l'excès de la pression p_e est proportionnel à l'excès de densité ρ_e .

Effectuons maintenant un bilan sur une tranche d'épaisseur Δx se propageant dans un tube, en supposant toujours toutes les **transformations réversibles** donc isentropiques (sans phénomènes dissipatifs).



➤ Equation de conservation de la matière

$$\rho_0 \Delta x = \rho \left[(x + \Delta x + \beta(x + \Delta x, t)) - (x + \beta(x, t)) \right]$$

Comme Δx est petit, $\beta(x + \Delta x, t) - \beta(x, t) = \frac{\partial \beta}{\partial x} \Delta x$

soit : $\rho_0 \Delta x = \rho \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} \Delta x + \Delta x \right)$

ou encore, en développant l'expression précédente avec $\rho = \rho_0 + \rho_e$:

$$\rho_0 = (\rho_0 + \rho_e) \frac{\partial \beta}{\partial x} + \rho_0 + \rho_e$$

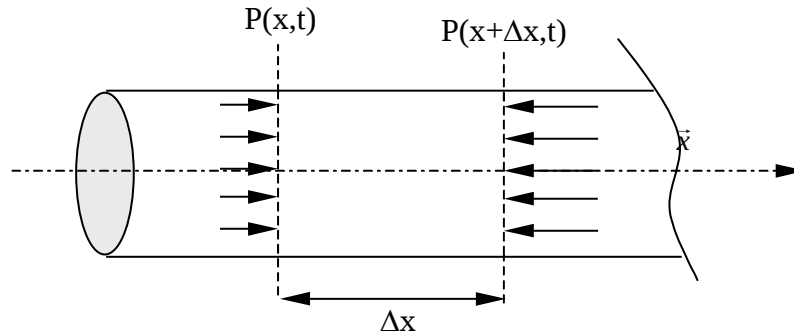
ce qui conduit à : $\rho_e = -\rho_0 \frac{\partial \beta}{\partial x} - \rho_e \frac{\partial \beta}{\partial x}$

Comme $\rho_0 \frac{\partial \beta}{\partial x} \gg \rho_e \frac{\partial \beta}{\partial x}$

Ce qui donne finalement : $\boxed{\rho_e = -\rho_0 \frac{\partial \beta}{\partial x}}$

➤ Equation du mouvement

$$\underbrace{(\rho_0 \Delta x) \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2}}_{\text{Inertie}} = \underbrace{p(x, t) - p(x + \Delta x, t)}_{\text{Somme des forces}} = -\frac{\partial p}{\partial x} \Delta x$$



En utilisant la décomposition précédente de la pression : $p = p_0 + p_e$

$$\text{on obtient : } (\rho_0 \Delta x) \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = -\frac{\partial p_e}{\partial x} \Delta x = -K \frac{\partial \rho_e}{\partial x} \Delta x \quad (\text{rappel : } p_e = K \rho_e)$$

$$\text{En utilisant : } \rho_e = -\rho_0 \frac{\partial \beta}{\partial x}$$

$$\text{il vient : } \frac{\partial \rho_e}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}$$

soit en définitif :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = K \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2}}$$

Il s'agit d'une équation de propagation (Equation d'Alembert).

$$\text{Rappelons que } K = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s \quad (\text{les transformations sont isentropiques}) \text{ et on posera } K = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s = c^2,$$

qui correspond à la vitesse de propagation des ondes sonores appelée tout simplement « célérité du son ».

$$\text{L'écoulement étant isentropique, on a : } \frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cte}$$

$$\text{soit encore : } \frac{dp}{p} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0, \text{ ce qui revient à : } \frac{\partial p}{\partial \rho} = \gamma \frac{p}{\rho}$$

En utilisant la définition du coefficient de compressibilité isentropique χ_s , il vient :

$$\boxed{c^2 = \frac{1}{\rho \chi_s}}$$

On remarquera ainsi que moins un milieu est compressible, plus la célérité des ondes de pression est élevée.

Quelques valeurs

(T=20°C)	χ_T (Pa ⁻¹)	c (m/s)
Air	10 ⁻⁵	330
Eau	5.10 ⁻¹⁰	1420

Chapitre 2 : Equations de la dynamique des gaz compressibles

Rappels

Ecoulements stationnaires

En tout point M fixe de l'écoulement, les grandeurs attachées au fluide sont indépendantes du temps (le champ de vitesse par exemple).

Dérivée particulaire

Cas d'une grandeur vectorielle

Il s'agit de la variation d'une grandeur vectorielle $\vec{A}$ par rapport au temps lorsque l'on suit la particule fluide sur sa trajectoire.

Son expression est donnée par :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\overline{\text{grad} \vec{A}}) \cdot \vec{V}$$

ou en notation d'Einstein :

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j}$$

Cas particulier du vecteur vitesse

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\overline{\text{grad} \vec{V}}) \cdot \vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overline{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} \right) + \overrightarrow{\text{rot} \vec{V}} \wedge \vec{V}$$

Cas d'une grandeur scalaire

Il s'agit de la variation d'une grandeur scalaire φ par rapport au temps lorsque l'on suit la particule fluide sur sa trajectoire.

Son expression est donnée par :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overline{\text{grad} \varphi}$$

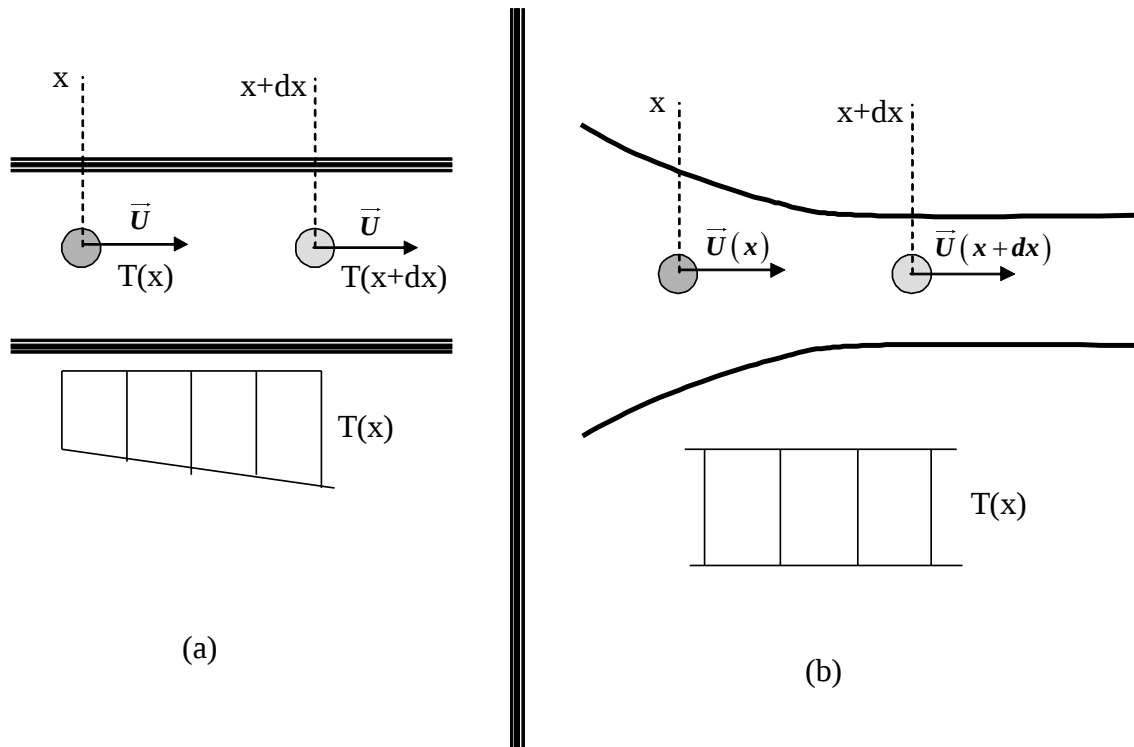
Illustration des deux origines de variation de la dérivée particulaire

Cas du régime stationnaire : $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$

Ici, la fonction scalaire est la température.

Le cas (a) correspond à un cas de convection dans un champ de vitesse constant. Il y a un gradient de température.

Le cas (b) correspond à un champ isotherme, la variation particulaire est de nature purement advective. Cette variation est nécessairement liée à une variation de vitesse dans le sens de l'écoulement. Par exemple, dans le cas illustré, il s'agit d'une accélération du fluide par passage dans le convergent.



Equations générales

- **Conservation de la masse**

L'équation de **conservation de la masse**, dite « de continuité » s'écrit ainsi :

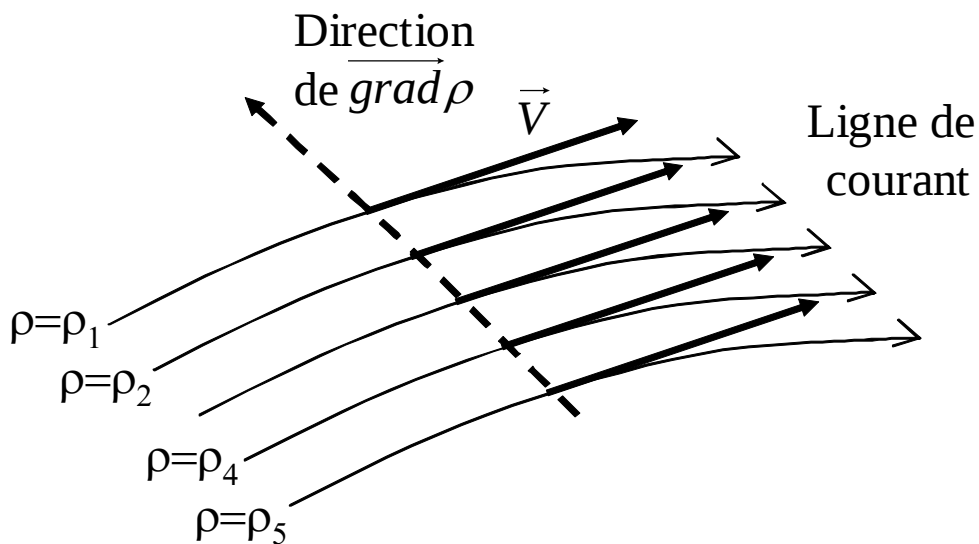
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0$$

Dans le cas d'un fluide « isovolume » (masse volumique constante dans le temps et l'espace) :

$$\text{div}(\vec{V}) = 0$$

Cependant la réciproque n'est pas vraie, c'est-à-dire que tout fluide vérifiant $\text{div}(\vec{V}) = 0$ n'est pas isovolume. Par exemple, dans un écoulement stratifié en masse volumique vérifiera cette équation et ne sera pas isovolume pour autant.

A titre d'exemple, l'océan présentant une stratification massique du fait du gradient de salinité ainsi qu'une stratification thermique. L'atmosphère terrestre présente également ce type de stratification thermique.



- **Equations du mouvement**

$$\underbrace{\rho \frac{d\vec{V}}{dt}}_{\text{Forces d'inertie par unité de volume}} = \underbrace{\rho \vec{F}}_{\text{Forces à distance}} + \underbrace{\underbrace{-\overrightarrow{\text{grad } p}}_{\text{Forces de pression}} + \underbrace{\mu \overrightarrow{\Delta V}}_{\text{Forces de viscosité}}}_{\text{Forces de contact}} = \underbrace{\rho \vec{F} - \overrightarrow{\text{grad } p}}_{\text{Forces extérieures par unité de volume}} + \mu \overrightarrow{\Delta V}$$

avec μ , viscosité dynamique et $\frac{d}{dt}$ désigne la dérivée particulaire.

La gravité appartient aux forces de volume.

Dans le cas d'un fluide parfait, on obtient l'équation d'Euler :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad } p}$$

$\vec{F}$: champ de force «   distance », tel que la gravité.

- **Equation de l'énergie cinétique**

$$\rho \frac{d\vec{V}^2}{dt} = \rho \vec{V} \cdot \vec{F} - \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad } p} - \mu \vec{V} \cdot \overrightarrow{\Delta V}$$

- **Equation de l'énergie interne**

Soit e l'énergie interne par unité de masse. L'application du premier principe de la thermodynamique, en l'absence de flux radiatif, conduit à :

$$\rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{U_i U_i}{2} \right) = \underbrace{\rho U_i F_i - \frac{\partial (p U_i)}{\partial x_i}}_A + \underbrace{\mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left[U_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right]}_B + \underbrace{\lambda_c \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i}}_C$$

où λ_c est la conductivité thermique.

Les termes A et B représentent les puissances mécaniques échangées vers l'extérieur.

Le terme C représente la puissance thermique échangée vers l'extérieur.

On rappelle par ailleurs la loi de Fourier donnant la densité de flux thermique par conduction $\vec{q}_c$:

$$\vec{q}_c = -\lambda_c \overrightarrow{\text{grad} T}$$

Dans notre cadre ce cours, nous ferons les hypothèses suivantes :

- **Fluide parfait (non visqueux et non conducteur de la chaleur)**
- **Fluide non pesant (aérodynamique)**
- **Fluide compressible**

Cas du fluide parfait compressible (Equation d'Euler)

L'équation du mouvement, ou **équation d'Euler** :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad} p}$$

$$\text{où : } \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad} \vec{V}} \cdot \vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \frac{\vec{V}^2}{2} - \vec{V} \wedge \text{rot} \vec{V}$$

ce qui revient à écrire l'équation d'Euler sous la forme :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{grad} \frac{\vec{V}^2}{2} - \vec{V} \wedge \text{rot} \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p$$

Equations de la thermodynamique

Hypothèses de base

- Le fluide est en mouvement : il est donc nécessaire de tenir compte de son énergie cinétique
- La conductivité thermique du fluide sera supposée nulle : ainsi une masse de fluide en mouvement n'échangera pas de chaleur avec les autres particules fluides de l'écoulement : le système est dit calorifiquement isolé.
- Cette dernière hypothèse ($\delta Q = 0$) conduit à conclure que l'entropie d'une particule fluide se conserve le long de sa trajectoire, ce qui se traduit par :

$\frac{dS}{dt} = 0$ soit en développant la dérivée particulaire :

$\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad} S = 0$ ce qui est identique à écrire la **conservation de l'énergie**.

Soit D un domaine fluide.

Le premier principe stipule que la variation d'énergie totale (énergie interne et énergie cinétique) est opposée au travail des forces de pression fourni à l'extérieur du domaine D .

Si, de plus, le système est isolé, alors l'échange de chaleur est nul : $dQ = 0$.

Soit U l'énergie interne du domaine D , en utilisant $-\iiint_{\tau} p d\tau = -\iint_S p \vec{V} \cdot \vec{n} dS$:

$$\underbrace{U}_{\text{Energie interne}} + \underbrace{\frac{1}{2} \iiint_D \rho V^2 d\tau}_{\text{Energie cinétique}} + \underbrace{\iint_S p \vec{n} \cdot \vec{V} dS}_{\text{Travail des forces de pression}} = 0$$

Bilan global équations/inconnues

Inconnues : 6

- 3 composantes de vitesse (vecteur $\vec{V}$)
- pression p
- masse volumique ρ
- entropie S

Equations : 6

- 1 équation d'état
- 1 équation de conservation de la masse
- 3 équations du mouvement (Euler)
- 1 équation de conservation de l'énergie

Le problème est donc soluble à priori !!!

Cas des écoulements stationnaires : théorème de Bernoulli (attention, différent du théorème de Bernoulli pour les fluides isovolumes)

Pour un écoulement stationnaire et sur une ligne de courant : $\vec{V} \wedge \overrightarrow{rot\vec{V}} = \vec{0}$

L'équation du mouvement donne donc :

$$\overrightarrow{grad} \left(\frac{\vec{V}^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{grad} P \quad (1)$$

Sur une ligne de courant, l'entropie S est constante (écoulement adiabatique), et la pression p n'est donc que fonction de ρ . On a donc $dS=0$:

$$dH = TdS + Vdp = \frac{dp}{\rho} \quad (\text{avec } V \text{ volume massique, } V = \frac{1}{\rho})$$

De plus :

$$dH = \overrightarrow{grad} H \cdot d\vec{M}$$

où $d\vec{M}$ est un déplacement sur la trajectoire, $d\vec{M} \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix}$

$$\text{Alors : } \frac{1}{\rho} (\overrightarrow{grad} p) \cdot d\vec{M} = \frac{1}{\rho} dp = dH = (\overrightarrow{grad} H) \cdot d\vec{M}$$

ce qui permet de déduire :

$$\frac{1}{\rho} \overrightarrow{grad} p = \overrightarrow{grad} H$$

L'équation **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** permet ainsi d'écrire sur la trajectoire d'une particule fluide:

$$\overrightarrow{grad} \left(\frac{\vec{V}^2}{2} + H \right) = 0$$

Pour un écoulement stationnaire, les trajectoires sont confondues avec les lignes de courants, ainsi donc, sur une ligne de courant :

$$H + \frac{V^2}{2} = H_i = cte$$

H_i est appelée **enthalpie génératrice (ou enthalpie d'arrêt ou enthalpie totale qui sont synonymes)** qui correspond à l'**enthalpie d'un point de vitesse nulle** sur la ligne de courant. Cette constante dépend à priori de la ligne de courant considérée.

Hypothèse : les écoulements stationnaires que nous étudierons sont à enthalpie génératrice constante, ce qui signifie de en somme que « toutes les particules fluides proviennent du même réservoir ».

La relation $H + \frac{V^2}{2} = H_i$ est donc valable pour tout le champ de l'écoulement.

Lien entre rotationnel et entropie

Transformons l'équation du mouvement :

De $\overrightarrow{\text{grad}} \frac{\vec{V}^2}{2} - \vec{V} \wedge \text{rot} \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p$, il vient :

$$\overrightarrow{\text{grad}} H = -\vec{V} \wedge \text{rot} \vec{V} + \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p \text{ sachant que : } \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\vec{V}^2}{2} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} H$$

De plus :

$$dH = TdS + \frac{1}{\rho} dp \text{ ce est équivalent à : } \overrightarrow{\text{grad}} H = T \overrightarrow{\text{grad}} S + \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p$$

$$\text{Ainsi : } \overrightarrow{\text{grad}} H = -\vec{V} \wedge \text{rot} \vec{V} + \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p = T \overrightarrow{\text{grad}} S + \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p$$

$$\text{ce qui conduit à : } T \overrightarrow{\text{grad}} S = -\vec{V} \wedge \text{rot} \vec{V}$$

Cas des écoulements irrationnels

Dans ce cas $\text{rot} \vec{V} = \vec{0}$, ce qui implique que :

- L'entropie S est constante dans tout l'espace (soit $dH = \frac{1}{\rho} dp$)
- p n'est fonction que de ρ , la masse volumique et pour les gaz parfaits on adoptera une équation de Poisson : $p = k \rho^\gamma$

- $\vec{V}$ dérive d'un potentiel des vitesses, c'est à dire qu'il existe fonction $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ tel que : $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\Phi$ (cette propriété ne sera pas utilisée directement dans le cadre de ce cours).

L'équation de Bernoulli $H + \frac{V^2}{2} = H_i$ donne : $dH + \vec{V}.d\vec{V} = 0$

Or $dH = \frac{dp}{\rho}$ et $c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$, ce qui conduit à :

$$\frac{dp}{\rho} + \vec{V}.d\vec{V} = 0$$

Sachant que p ne dépend que de ρ ($dS = 0$) : $dp = \frac{\partial p}{\partial \rho} d\rho = c^2 d\rho$, on a ainsi :

$$c^2 \frac{d\rho}{\rho} + \vec{V}.d\vec{V} = 0 \quad (2)$$

$$\text{ce qui est équivalent à écrire : } \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}}\rho = -\frac{1}{2c^2} \overrightarrow{\text{grad}}V^2 \quad (3)$$

De plus, l'équation de continuité s'écrit :

$$\text{div}(\rho\vec{V}) = 0 \text{ ou encore : } \rho \text{div}\vec{V} + \vec{V}.\overrightarrow{\text{grad}}\rho = 0 \quad (4)$$

Les équations (3) et (4) permettent d'écrire :

$$\rho \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\Phi) - \frac{1}{2c^2} \rho \vec{V}.\overrightarrow{\text{grad}} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)^2 \right] = 0$$

En notant les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}$ de la façon suivante : $\vec{V} \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{vmatrix}$, et en

développant l'équation précédente :

$$\left(c^2 - U_1^2 \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \left(c^2 - U_2^2 \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \left(c^2 - U_3^2 \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} - 2U_1 U_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} - 2U_2 U_3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial x_3} - 2U_1 U_3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_3} = 0 \quad (5)$$

Il s'agit ainsi d'une équation aux dérivées partielles en Φ , car c^2 s'exprime en fonction de $\vec{V}$ (qui s'exprime en fonction de Φ).

En effet : $c^2 = (\gamma - 1)H$ et $H + \frac{V^2}{2} = H_i = cte$.

Ainsi tout écoulement stationnaire et irrotationnel est solution de (5) et réciproquement.

Théorème de Bernoulli : conséquences

Le théorème de Bernoulli s'exprime par : $H + \frac{V^2}{2} = H_i$

On notera $q = |\vec{V}|$ (notation habituelle dans la littérature sur le sujet) et on rappelle que :

$$c^2 = (\gamma - 1)H$$

Ce qui conduit à :

$$\boxed{\frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{q^2}{2} = H_i = cte} \text{ appelée équation de Busemann.}$$

Représentation dans le plan (q,c)

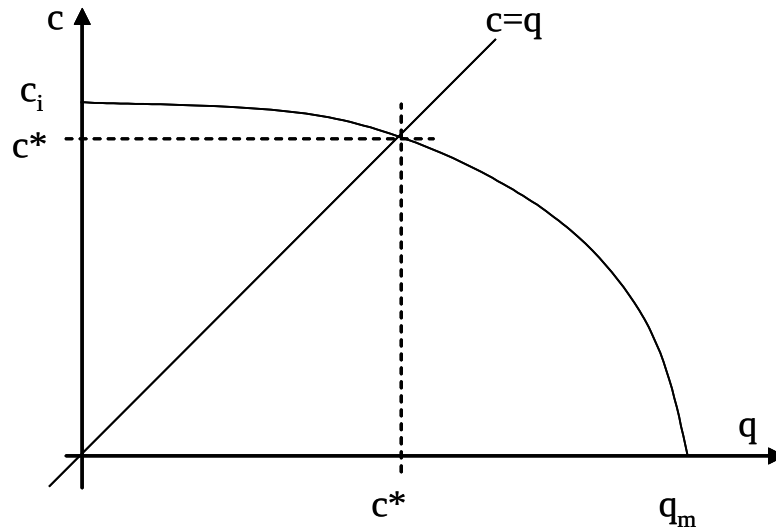
Cette équation est celle d'une ellipse dont q_m et c_i désignent les demis axes principaux.

$$\text{On aura alors : } \frac{q_m^2}{2} = \frac{c_i^2}{\gamma - 1} = H_i$$

$$\text{et } c^* = \sqrt{2 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} H_i} \text{ point d'intersection de l'ellipse et de la première bissectrice } q=c.$$

q_m désigne la vitesse maximum atteinte par le fluide

c_i désigne la célérité du son au point de vitesse nul.



En remplaçant $q = c = c^*$ dans l'équation de Busemann :

$$\frac{c^{*2}}{\gamma - 1} + \frac{c^{*2}}{2} = H_i$$

ce qui conduit à :

$$c^{*2} \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right) = H_i$$

ou encore : $\boxed{\frac{q_m}{c^*} = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}}$

c^* est appelée vitesse critique et on a la propriété :

$$\begin{cases} q < c & \Leftrightarrow & q < c^* \\ q > c & \Leftrightarrow & q > c^* \end{cases}$$

Nombre de Mach

Le nombre de Mach M est défini par le rapport $M = \frac{q}{c}$

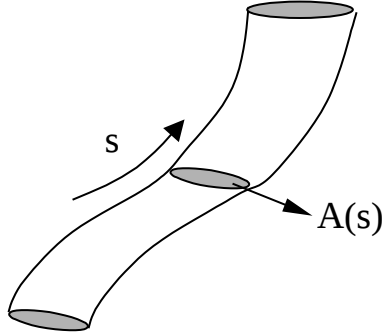
Si $M < 1$: on a le régime subsonique

Si $M = 1$: régime sonique

Si $M > 1$: régime supersonique

Théorème d'Hugoniot

Considérons l'écoulement dans un tube de courant ; soit s l'abscisse curviligne repérant l'aire du tube $A(s)$.



La vitesse du fluide est constante et uniforme en tout point de la section $A(s)$.

Le principe de conservation de la matière (de la masse) s'écrit :

$$\rho q A = cte$$

ou encore : $\ln(A) + \ln(\rho) + \ln(q) = cte$

soit en calculant la différentielle :

$$\frac{dA}{A} + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dq}{q} = 0 \quad (6)$$

On rappelle que $c^2 \frac{d\rho}{\rho} + \vec{V} \cdot d\vec{V} = 0$ (équation (2)) soit : $\frac{d\rho}{\rho} = -q dq \frac{1}{c^2}$

soit en reportant dans l'équation (6) : $\frac{dA}{A} - \frac{q}{c^2} dq + \frac{dq}{q} = 0$

en utilisant la définition du nombre de Mach : $q = Mc$, on obtient finalement :

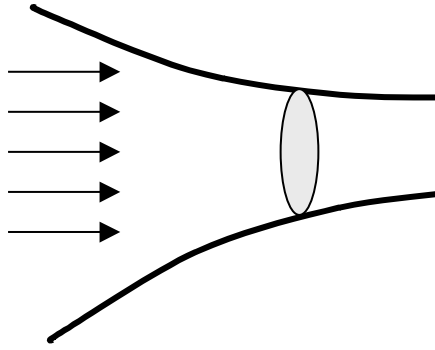
$$\boxed{\frac{dA}{A} + \frac{dq}{q} (1 - M^2) = 0}$$

appelé **théorème d'Hugoniot**.

Considérations pratiques

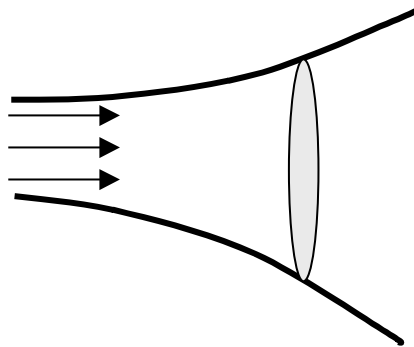
Le théorème d'Hugoniot s'écrit : $\frac{dq}{q} = \left(\frac{1}{M^2 - 1} \right) \frac{dA}{A}$

Pour un tube de courant convergent : $\frac{dA}{A} < 0$



- Si $M < 1$ (écoulement subsonique) alors $\frac{dq}{q} > 0$, il y a **accélération du fluide**
- Si $M > 1$ (écoulement supersonique) alors $\frac{dq}{q} < 0$, il y a **décélération du fluide**

Pour un tube de courant divergent : $\frac{dA}{A} > 0$



- Si $M < 1$ (écoulement subsonique) alors $\frac{dq}{q} < 0$, il y a **décélération du fluide**
- Si $M > 1$ (écoulement supersonique) alors $\frac{dq}{q} > 0$, il y a **accélération du fluide**

Chapitre 3 : Ecoulements monodimensionnels stationnaires

Considérons un tube de courant T et sa ligne médiane (L) . En un point R de cette ligne l'écoulement est caractérisé par les valeurs de :

La vitesse $\vec{V}$

La pression p

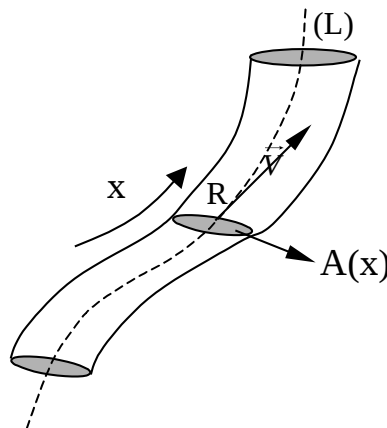
La masse volumique ρ

La température T

L'aire de la section droite A

Etc...

La théorie monodimensionnelle suppose que les variations de ces grandeurs ($\vec{V}$, p , ρ , T) sont négligeables sur la section droite A considérée et qu'elles ne sont fonctions que de l'abscisse curviligne x sur (L) soit : $\vec{V}(x)$, $p(x)$, $T(x)$, $\rho(x)$, $A(x)$.



Cette théorie est bien évidemment imparfaite, puisqu'elle néglige les gradients transversaux, mais néanmoins constitue une bonne approximation pour définir les écoulements dont la section droite évolue lentement.

Les hypothèses classiques demeureront valables :

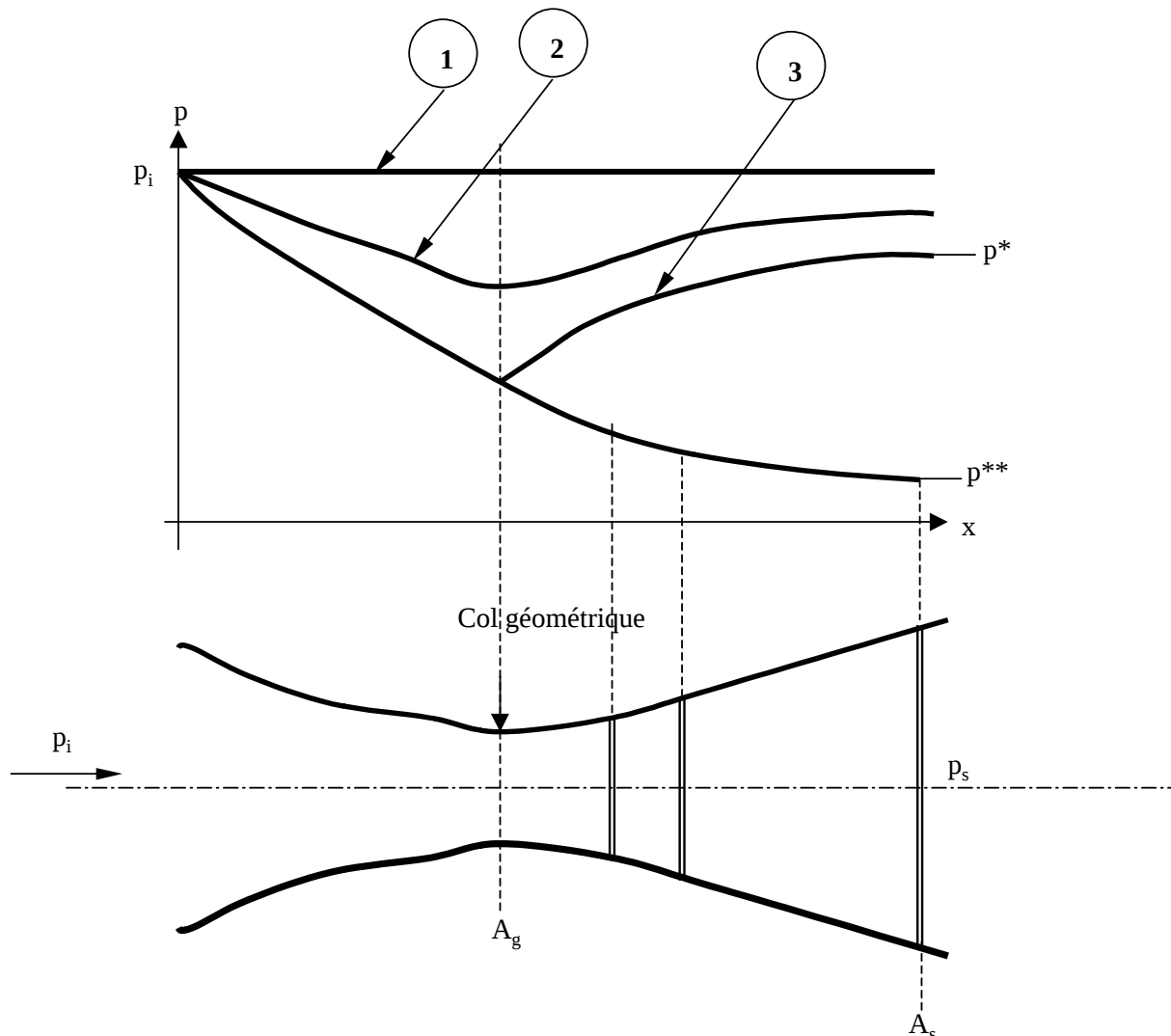
- Ecoulement stationnaire
- Fluide non pesant
- Fluide non visqueux
- Gaz calorifiquement parfait
- Pas d'apports de chaleurs

- Absences de discontinuités physiques (onde de chocs, qui feront l'objet d'un traitement particulier)

Détente stationnaire monodimensionnelle continue dans une tuyère de Laval

Pour accélérer un écoulement, il est nécessaire de disposer d'une tuyère convergente/divergente (dite tuyère de Laval). Dans le convergent l'écoulement s'accélère en régime subsonique, puis sous certaine condition passe à Mach 1 au niveau du col pour poursuivre son accélération dans le divergent en régime supersonique. On parle alors d'une tuyère amorcée.

Soit p_i la pression génératrice de l'écoulement amont, faisons évoluer la pression p_s à la sortie de la tuyère.



- Si $p_s = p_i$, il n'y a pas d'écoulement [**courbe 1**]

- Si p_s est légèrement inférieur à p_i , un courant d'air de l'amont vers l'aval va s'établir dans la tuyère.
- Lorsque l'on fait décroître p_s , L'écoulement s'accélère dans la tuyère jusqu'à la section minimal, appelée col géométrique. Il s'agit d'une détente. Si le Mach au col n'est pas sonique, l'écoulement va décélérer en subsonique dans le divergent et la pression va croître à nouveau. **[courbe 2]**
- Si p_s continue à décroître, le débit dans la tuyère continue à augmenter. Pour une certaine valeur de $p_s = p^*$, on atteint Mach 1 au col : le col géométrique A_g est devenu une col aérodynamique A_c (c : critique, ou col, $M_c=1$). On dit alors que le col est bloqué ou amorcé. Sachant que le produit ρV est maximal lorsque $M=1$, on a donc le maximum de débit qui peut passer dans la tuyère : $\dot{m} = \dot{m}_c$ =débit maximal. **[courbe 3]**
- Si p_s décroît encore très nettement et atteint la pression p^{**} , on obtient alors une tuyère complètement amorcée, mais le débit n'est plus modifié : $\dot{m} = \dot{m}_c$; il s'agit du régime supercritique. Ainsi, l'évolution dans le convergent est indépendante de la pression aval p_s , dès lors que $p_s < p^{**}$.
- Lorsque $p^{**} \leq p_s \leq p^*$, des ondes de chocs apparaissent , cas qui sera traité dans le chapitre dédié à la théorie de l'onde de choc droite.

Relations des grandeurs par rapport à l'état générateur

L'équation de Busemann $\frac{c^2}{\gamma-1} + \frac{q^2}{2} = H_i = cte$ peut encore être écrite :

$$\boxed{V^2 + \frac{2c^2}{\gamma-1} = cte} \text{ Equation de Saint Venant.}$$

La constante peut être aisément exprimée à l'aide de l'état générateur «i», soit $V=0$, $c=c_i$, $T=T_i$, soit :

$$V^2 + \frac{2c^2}{\gamma-1} = 0 + \frac{2c_i^2}{\gamma-1}$$

En introduisant le nombre de Mach $M = V/c$, il vient :

$$\boxed{\frac{c^2}{c_i^2} = \frac{T}{T_i} = \theta(M) = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-1}}$$

Remarque importante : cette relation est valable même si l'entropie évolue, car elle ne fait intervenir en aucun cas la conservation de l'énergie : elle est en particulier valable lorsque la viscosité est prise en compte.

Si maintenant on ajoute l'hypothèse d'isentropie de l'écoulement (pas d'apport de chaleur, pas de frottements, pas d'irréversibilités, telles que des ondes de choc), on alors :

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cte} = \frac{p_i}{\rho_i^\gamma}$$

En ajoutant la relation et la loi des gaz parfaits, nous obtenons le rapport de pression et celui de masse volumique :

$$\frac{p}{p_i} = \varpi(M) = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{\rho}{\rho_i} = R(M) = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{-1}{\gamma-1}}$$

Une section quelconque du tube de courant peut également être comparée à la section du col (indice c, section minimale où $M=1$), en écrivant la conservation du débit.

La conservation du débit impose :

$$\rho VA = \rho_c V_c A_c$$

soit encore : $\frac{A}{A_c} = \frac{\rho_c}{\rho_i} \frac{\rho_i}{\rho} \frac{c_c}{c_i} \frac{c_i}{c} \frac{1}{M}$ (sachant que $M_c = 1$, et A_c est la section droite au col)

$$\text{ou bien : } \frac{A}{A_c} = \frac{R(1)}{R(M)} \left(\frac{\theta(1)}{\theta(M)} \right)^{1/2} \frac{1}{M}$$

que l'on peut bien évidemment exprimer en fonction de γ et de M :

$$\frac{A}{A_c} = \Sigma(M) = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \frac{1}{M} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

appelée **loi des aires**.

Débit massique

Le débit massique traversant le tube de courant étant constant, il est possible de l'exprimer dans toute autre section droite, telle que le col sonique par exemple :

$$\dot{m} = \rho V A = \rho_c V_c A_c$$

Il est maintenant possible de faire apparaître les conditions génératrices et au col :

$$\dot{m} = \left[\frac{\rho_c}{\rho_i} \frac{p_i}{r T_i} \right] \left[\frac{c_c}{c_i} \sqrt{\gamma r T_i} \right] A_c$$

On obtient alors une relation donnant le débit massique sous la forme :

$$\dot{m} = \frac{\delta(\gamma)}{\sqrt{C_p T_i}} p_i A_c$$

$$\text{avec } \delta(\gamma) = \gamma(\gamma-1)^{-1/2} \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Attention : cette relation n'est valable que dans le cas d'une tuyère amorcée (Mach 1 au col) ! Néanmoins, M=1 peut être atteint asymptotiquement par valeur inférieure ou supérieure (M=1⁻ ou 1⁺)

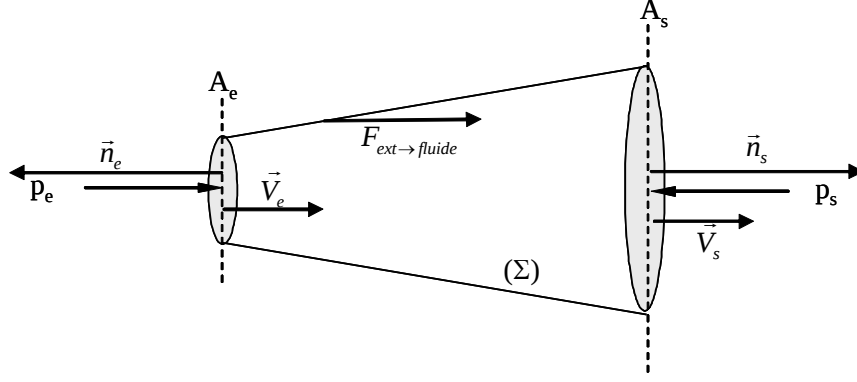
Pour l'air, sachant que $\gamma = 1,4$ et $C_p = 1000 \text{ J / kg / K}$, on écrit le débit massique de la façon suivante :

$$\dot{m} = 0,0404 \frac{p_i A_c}{\sqrt{T_i}}$$

Dynalpie, calcul de la poussée d'un tube de courant

La but est de calculer la résultante des actions sur un tube de courant de ligne moyenne rectiligne, afin d'en déduire une force de poussée.

Appliquons la théorème de la quantité de mouvement entre les sections d'entrée (e) et de sortie (s), sans préciser à priori la nature des forces extérieures F agissant sur la frontière de la portion du tube de courant considéré (force exercée sur le domaine fluide) :



Appliquons le théorème de la quantité de mouvement au tube de courant délimité par les sections A_1 et A_2 :

$$\oint_{\Sigma} \rho \vec{V} \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \Sigma \vec{F}_{ext}$$

Soit en projection sur l'axe horizontal et en ne considérant que les forces de pression:

$$\rho_s V_s^2 A_s - \rho_e V_e^2 A_e = P_e A_e - P_s A_s + F_{ext \rightarrow fluide}$$

d'où, sachant que $\dot{m} = \rho_e V_e A_e = \rho_s V_s A_s$:

$$F_{ext \rightarrow fluide} = \dot{m}(V_s - V_e) + (p_s A_s - p_e A_e)$$

avec : $\dot{m} = \rho_e A_e V_e = \rho_s A_s V_s$

$$\text{soit : } F_{ext \rightarrow fluide} = A_s (p_s + \rho_s V_s^2) - A_e (p_e + \rho_e V_e^2)$$

La quantité $D = p + \rho V^2$ est appelée dynalpie, ce qui permet d'écrire que la force extérieure exercée sur le fluide est égale à la différence des flux de dynalpie sortant et entrant :

$$F_{ext \rightarrow fluide} = \Omega_s - \Omega_e$$

où $\Omega = D.A$ est le flux de dynalpie.

Le flux de dynalpie peut aussi s'écrire :

$$\Omega = (p + \rho V^2) A = pA \left(1 + \frac{\rho V^2}{p} \right) = pA \left(1 + \frac{V^2}{rT} \right) = pA (1 + \gamma M^2)$$

soit, en faisant apparaître les conditions aux col et les conditions génératrices :

$$\Omega = p_i A_c \left[\varpi(M) \Sigma(M) (1 + \gamma M^2) \right]$$

En posant $\Phi(M) = \varpi(M) \Sigma(M) (1 + \gamma M^2)$, on a : $\Omega = p_i A_c \Phi(M)$

Dans un tube de courant iso-énergétique (cas d'un gaz calorifiquement parfait, $T_i = cte$). De plus, on a $p_i A_c = cte$ qui exprime la conservation du débit massique. La force exercée sur le domaine fluide est donc exprimée par :

$$F_{ext. \rightarrow Fluide} = p_i A_c \left[\Phi(M_s) - \Phi(M_e) \right]$$

Chapitre 4 : Ecoulements plans isentropiques supersoniques : détente de Prandtl-Meyer

Un écoulement sera dit « plan », si par un choix judicieux des axes de coordonnées, toutes les grandeurs relatives au fluide ne dépendent que des coordonnées (x, y) .

Pour ce type d'écoulements, le potentiel des vitesses est solution de l'équation :

$$\left(c^2 - u^2 \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left(c^2 - v^2 \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 2uv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0$$

Nous ferons de plus l'hypothèse d'un écoulement supersonique, c'est à dire :

$$q^2 = u^2 + v^2 > c^2$$

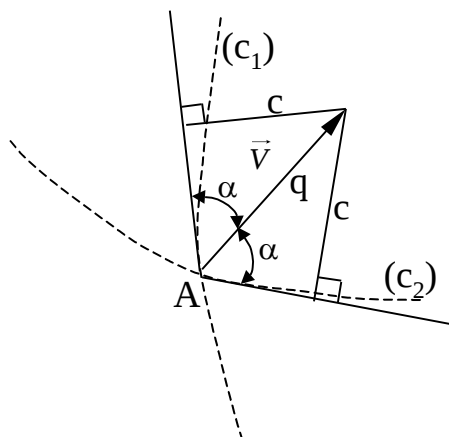
Définition d'une caractéristique ?

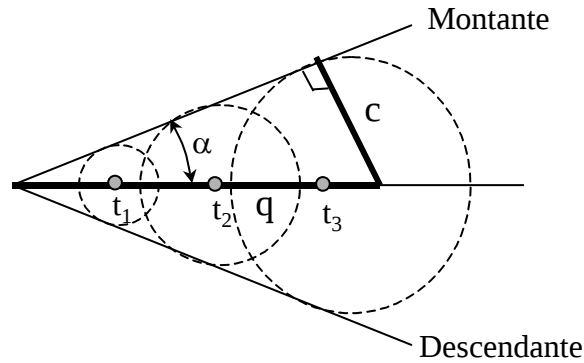
On se place dans le plan (x, y) . Soit un écoulement supersonique dans ce plan. On appelle « caractéristique » de cet écoulement les courbes le long desquelles la composante normale de la vitesse est égale à la célérité locale du son.

Si $\vec{V}$ est le vecteur vitesse en un point A, les caractéristiques passant par A sont donc les courbes tangentes à l'une ou à l'autre des droites faisant avec $\vec{V}$ un angle α défini par :

$$\sin \alpha = \frac{c}{q} = \frac{1}{M}$$

α est appelé l'angle de Mach au point A.





➤ Il y a deux types de caractéristiques :

(C_1) que l'on nommera « montantes »

(C_2) que l'on nommera « descendantes »

Ainsi une caractéristique correspond à une ligne sur-laquelle se propage une perturbation élémentaire (variation élémentaire de pression) en écoulement supersonique.

Equations des caractéristiques

Soit dx et dy , les composantes d'un déplacement élémentaire le long d'une caractéristique. La normale unitaire à celui ci sera définie par :

$$\frac{1}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \begin{vmatrix} -dy \\ dx \end{vmatrix}$$

Sur une caractéristique, $(\vec{V} \cdot \vec{n})^2 = c^2$

si bien que : $\frac{(vdx - udy)^2}{dx^2 + dy^2} = c^2$

$$\text{ou encore : } (c^2 - u^2)dy^2 + 2uv dxdy + (c^2 - v^2)dx^2 = 0 \quad (7)$$

Si u et v sont connus, on peut obtenir par intégration de cette équation les caractéristiques dans le plan (x,y) .

Equation des caractéristiques

On rappelle l'équation (7) : $(c^2 - u^2)dy^2 + 2uv dxdy + (c^2 - v^2)dx^2 = 0$

qui est valable quelque soit le déplacement dx , dy le long des caractéristiques.

Il y a donc deux types de solution à cette équation :

$$dy = \lambda_1 dx \quad \text{et} \quad dy = \lambda_2 dx$$

λ_1 et λ_2 sont alors les racines de l'équation :

$$(c^2 - u^2)\lambda^2 + 2uv\lambda + (c^2 - v^2) = 0 \quad (8)$$

On remarquera bien sur que λ_1 et λ_2 sont des fonctions de u et v .

La somme des racines est donné par : $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{-uv}{(c^2 - u^2)}$

et le produit des racines par : $\lambda_1\lambda_2 = \frac{(c^2 - v^2)}{(c^2 - u^2)}$

si bien que l'équation des potentiels, $(c^2 - u^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + (c^2 - v^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - 2uv\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = 0$, s'écrit:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + (\lambda_1 + \lambda_2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} + \lambda_1\lambda_2\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0$$

ou bien encore :

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial y}}_{\text{I}} + \lambda_2 \underbrace{\left(\lambda_1 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)}_{\text{II}} = 0$$

Ainsi, le long d'une caractéristique (C_1) :

$$dy = \lambda_1 dx$$

$$\text{Or } du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial y} \right)}_{\text{I}} dx$$

$$\text{et : } dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_{\text{II}} dx$$

On a donc, le long d'une caractéristique (C_1) :

$$du + \lambda_2 dv = 0$$

et par un raisonnement analogue, le long d'une caractéristique (C_2) :

$$du + \lambda_1 dv = 0$$

L'équation des caractéristique dans le système de coordonnées (u, v) peut être déterminée par intégration de :

$$(c^2 - u^2)\lambda^2 + 2uv\lambda + (c^2 - v^2) = 0$$

de plus : $\lambda = -\frac{du}{dv}$

ce qui conduit à : $(c^2 - u^2) \left(\frac{du}{dv} \right)^2 - 2uv \left(\frac{du}{dv} \right) + (c^2 - v^2) = 0$

ou encore $(c^2 - u^2) du^2 - 2uv du dv + (c^2 - v^2) dv^2 = 0$

qui s'écrit aussi : $c^2 (du^2 + dv^2) = (u du + v dv)^2 = (\vec{V} \cdot d\vec{V})^2$

En introduisant le module de la vitesse $q = \sqrt{u^2 + v^2}$ et l'angle $\theta = \arctg \left(\frac{v}{u} \right)$,

le couple (q, θ) correspond coordonnées polaires dans le plan (u, v) .

Les composantes du vecteur vitesse s'expriment alors par :

$$U = q \cos \theta \quad \text{et} \quad V = q \sin \theta$$

En conservant les notations précédentes, on a : $du = dq \cos \theta - q \sin \theta d\theta = dq \cos \theta - V d\theta$,

$$dv = dq \sin \theta + q \cos \theta d\theta = dq \sin \theta + U d\theta \quad \text{et} \quad \vec{V} \cdot d\vec{V} = q dq.$$

Ainsi, $c^2 (du^2 + dv^2) = (u du + v dv)^2 = (\vec{V} \cdot d\vec{V})^2$ qui correspond à l'équation des caractéristiques dans le plan (u, v) , s'écrit :

$$\boxed{c^2 (dq^2 + q^2 d\theta^2) = q^2 dq^2}$$

$$\text{qui équivaut à : } d\theta^2 = -\frac{dq^2}{q^2} + \frac{q^2}{c^2} \frac{dq^2}{q^2} = \frac{dq^2}{q^2} (M^2 - 1).$$

$$\text{Ainsi : } d\theta = \pm \sqrt{M^2 - 1} \frac{dq}{q}$$

Introduisons le nombre de Mach M :

$$q = cM \quad \text{soit : } \ln q = \ln M + \ln c$$

$$\text{En passant à la différentielle : } \frac{dq}{q} = \frac{dM}{M} + \frac{dc}{c}$$

Introduisons le rapport des températures :

$$\frac{c}{c_i} = \left(\frac{T}{T_i} \right)^{1/2} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-1/2} \quad \text{soit : } c = c_i \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-1/2}$$

$$\text{Evaluons ainsi : } \frac{dc}{c} = -M \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-1} dM$$

$$\text{Calculons ensuite } \frac{dq}{q} : \quad \frac{dq}{q} = \frac{dM}{M} + \frac{dc}{c}$$

$$\text{soit : } \frac{dq}{q} = \left[\frac{1}{M} - M \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right] dM$$

soit après développement et simplifications :

$$\boxed{\frac{dq}{q} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM}{M}}$$

Utilisons l'équation de la caractéristique $d\theta = \sqrt{M^2 - 1} \frac{dq}{q}$ en ne conservant que la solution

positive (la solution négative se déduisant de même)

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \int_{M_1}^{M_2} \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM}{M} = \omega(M)$$

$$\text{soit encore : } \theta_2 - \theta_1 = \omega(M_2) - \omega(M_1)$$

$$\text{avec } \omega \text{ la fonction de Prandtl-Meyer définie par : } \omega(M) = \int \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM}{M}$$

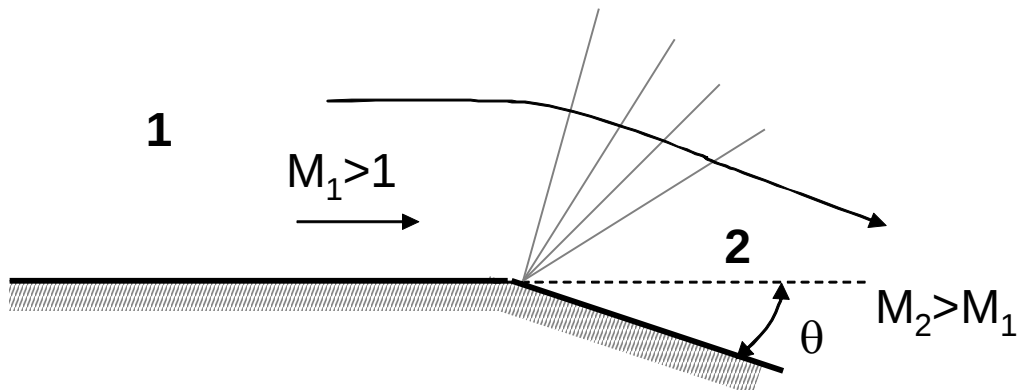
Remarque : si on avait pris l'équation $d\theta = -\sqrt{M^2 - 1} \frac{dq}{q}$, on aurait :

$$\theta_2 - \theta_1 = \omega(M_1) - \omega(M_2)$$

En intégrant l'équation précédente, et en utilisant la condition $M=1$, $\omega=0$, il vient :

$$\omega(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctg \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M^2 - 1)} \right) - \arctg \left(\sqrt{M^2 - 1} \right)$$

Si $\theta_1 = 0$, on alors : $\theta_2 = \omega(M_2) - \omega(M_1)$



M_1 et θ_2 étant connus, M_2 peut être déterminé à l'aide des tables, tel que :

$$\omega(M_2) = \theta_2 + \omega(M_1)$$

Exemple :

$M_1=2$ et $\theta=15^\circ$

D'après les tables, $\omega(M_1)=26,38^\circ$ ce qui conduit à : $\omega(M_2) = \theta + \omega(M_1) = 41,38^\circ$.

D'après les tables, le Mach M_2 est donc de l'ordre de 2,595.

Nombre de Mach

$\omega(M)$

Angle
de Mach

M	$\omega = \frac{p}{p_1}$	$R = \frac{\rho}{\rho_1}$	$\theta = \frac{T}{T_1}$	$\Sigma = \frac{A}{A_c}$
1.90	.14924E 00	.25699E 00	.58072E 00	.15553E 01
1.91	.14695E 00	.25417E 00	.57816E 00	.15677E 01
1.92	.14470E 00	.25138E 00	.57561E 00	.15804E 01
1.93	.14247E 00	.24861E 00	.57307E 00	.15932E 01
1.94	.14028E 00	.24588E 00	.57054E 00	.16062E 01
1.95	.13813E 00	.24317E 00	.56802E 00	.16193E 01
1.96	.13600E 00	.24049E 00	.56551E 00	.16326E 01
1.97	.13390E 00	.23784E 00	.56301E 00	.16461E 01
1.98	.13184E 00	.23521E 00	.56051E 00	.16597E 01
1.99	.12981E 00	.23262E 00	.55803E 00	.16735E 01
2.00	.12780E 00	.23005E 00	.55556E 00	.16875E 01
2.01	.12583E 00	.22751E 00	.55309E 00	.17016E 01
2.02	.12389E 00	.22499E 00	.55064E 00	.17160E 01
2.03	.12197E 00	.22250E 00	.54819E 00	.17305E 01
2.04	.12009E 00	.22004E 00	.54576E 00	.17451E 01
2.05	.11823E 00	.21760E 00	.54333E 00	.17600E 01
2.06	.11640E 00	.21519E 00	.54091E 00	.17750E 01
2.07	.11460E 00	.21281E 00	.53851E 00	.17902E 01
2.08	.11282E 00	.21045E 00	.53611E 00	.18056E 01
2.09	.11107E 00	.20811E 00	.53373E 00	.18212E 01
2.10	.10935E 00	.20580E 00	.53135E 00	.18369E 01
2.11	.10766E 00	.20352E 00	.52898E 00	.18529E 01
2.12	.10599E 00	.20126E 00	.52663E 00	.18690E 01
2.13	.10434E 00	.19902E 00	.52428E 00	.18853E 01
2.14	.10273E 00	.19681E 00	.52194E 00	.19018E 01
2.15	.10113E 00	.19463E 00	.51962E 00	.19185E 01
2.16	.99562E-01	.19247E 00	.51730E 00	.19354E 01
2.17	.98017E-01	.19033E 00	.51499E 00	.19525E 01
2.18	.96495E-01	.18821E 00	.51269E 00	.19698E 01
2.19	.94997E-01	.18612E 00	.51041E 00	.19873E 01

(Table du dessus)

ω	μ
23.586	31.76
23.869	31.57
24.151	31.39
24.432	31.21
24.712	31.03
24.992	30.85
25.271	30.68
25.549	30.51
25.827	30.33
26.104	30.17
26.380	30.00
26.655	29.84
26.930	29.67
27.203	29.51
27.476	29.35
27.748	29.20
28.020	29.04
28.290	28.89
28.560	28.74
28.829	28.59
29.097	28.44
29.364	28.29
29.631	28.14
29.896	28.00
30.161	27.86
30.425	27.72
30.688	27.58
30.951	27.44
31.212	27.30
31.473	27.17

(Table du dessous)

Extrait de la table isentropique

Déviati3n maximale d'un écoulement

La fonction de Prandtl-Meyer est nulle lorsque le nombre de Mach M vaut 1 :

$$\omega(1) = 0$$

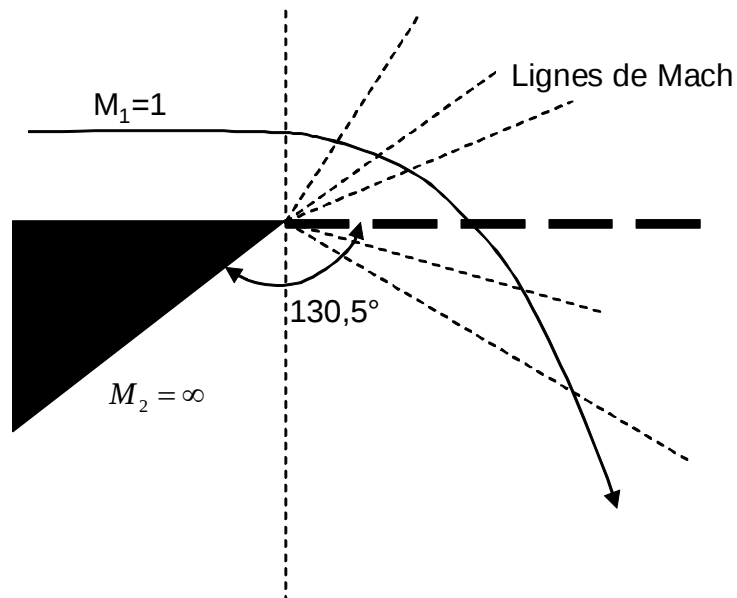
et ω est une fonction croissante du nombre de Mach : $\omega(M = \infty) \approx 130,5^\circ$

Ainsi, dans le cas de lignes caractéristiques montantes, la déviation maximale de l'écoulement sera donnée par :

$$(\theta_2 - \theta_1)_{\max} = \omega_2(M_2 = \infty) - \omega_1(M_1 = 1) \approx 130,5^\circ$$

Ainsi, deux cas peuvent se présenter :

- 1- L'angle du dièdre est exactement $180-130,5^\circ$: dans ce cas, la température, la pression et la masse volumique deviennent nulles sur le dièdre.



- 2- Si l'angle de dièdre est plus petit que $180-130,5^\circ$, il existe une ligne telle que la pression, la température et la masse volumique sont nulles. Entre cette ligne et le dièdre, s'installe le vide.

