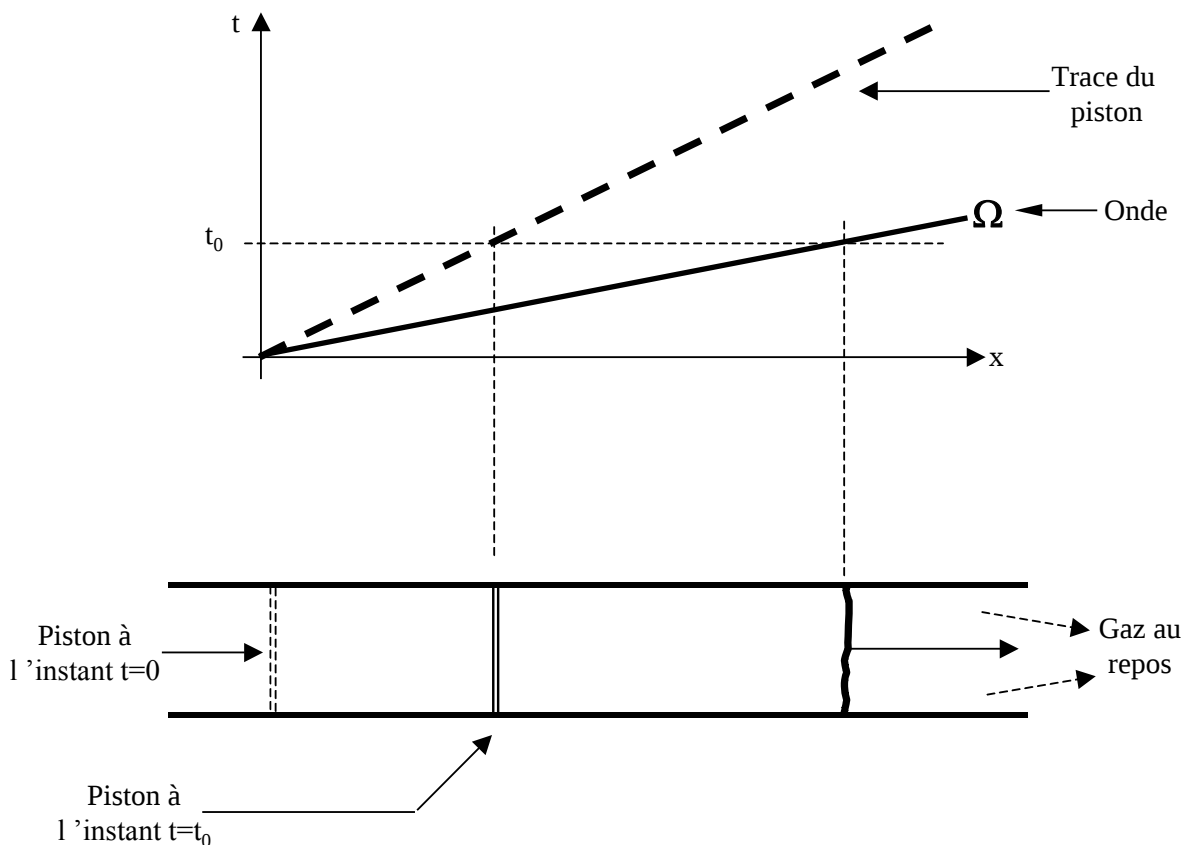


Chapitre 5 : Théorie de l'onde de choc droite

Introduction, historique, mise en évidence

En travaillant sur les ondes de compression instationnaires se propageant dans un tube à section constante, à la suite de la mise en mouvement brutale d'un piston, Hugoniot a montré qu'une focalisation apparaissait.

Ce regroupement des ondes de compressions provoquait une certains nombres de discontinuités des grandeurs physiques (vitesse, masse volumique, pression). Ces discontinuités n'étaient pas prévues par les théories classiques, fondées sur des évolutions continues.



Ainsi est mise en évidence la formation quasi-instantanée d'une onde de choc droite se propageant à une vitesse supérieure à la vitesse locale du son. Cette onde sépare le gaz non affecté et celui mis en vitesse par le piston.

Interprétation physique

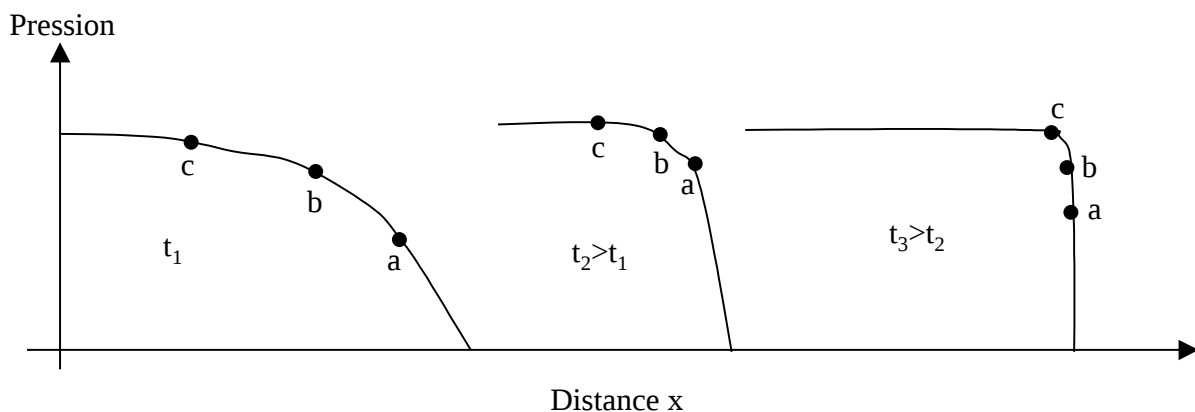
Le piston doit en quelque-sort « écarter » l'air sur son chemin, et la perturbation induite par ce phénomène est une variation brutale de pression, qui correspond à un front d'onde se déplaçant à la vitesse locale du son, avec une pression plus élevée en amont du front d'onde que dans la région non perturbée, c'est à dire non encore atteinte par l'onde.

Cependant, l'air laissé derrière le front d'onde est comprimé de manière adiabatique, ce qui provoque **l'augmentation de la température**.

Or, rappelons le, la vitesse du son augmente avec la température de l'air ($c = \sqrt{\gamma r T}$ pour un gaz calorifiquement parfait), ce qui signifie que la vitesse du son derrière le saut de pression sera plus élevée que dans la zone non perturbée. Cela veut dire que toute autre perturbation due à l'avance continue du piston dans le tube se déplacera plus vite que le front d'onde.

Sur le diagramme représentant des « photographies instantanées » du front d'onde, on peut observer que les régions de haute pression, à l'arrière, rattrapent le front d'onde au fur et à mesure que le temps passe. Finalement l'onde de compression adopte un profil très raide, qui devient à l'échelle macroscopique une discontinuité de certaines grandeurs physiques.

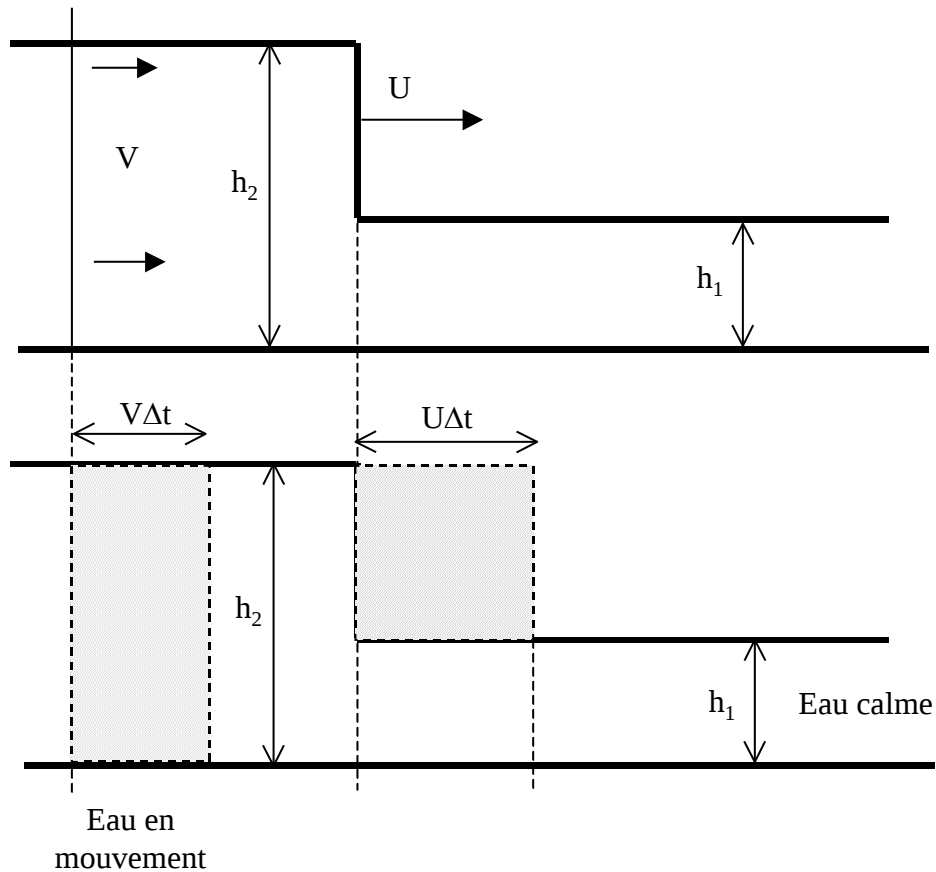
En fait, « l'épaisseur » du saut de pression peut être évalué à quelques libres parcours moyens.



« photographies instantannées »

Analogie avec les liquides

Nous allons dans ce cas considérer le déplacement d'une barre « d'eau », provoquée par exemple par la mise en mouvement brutale d'un corps dans un canal ouvert à section constante. L'eau mise en mouvement se déplace à une vitesse V et le front d'onde à une vitesse U .



Considérons le déplacement de la barre d'eau pendant une durée Δt :

- la conservation de la matière (zones hachurées) nous fournit :

$$(h_2 - h_1)U\Delta t = Vh_2\Delta t$$

- le théorème de conservation de la quantité de mouvement peut se formuler ainsi : quel est la quantité d'eau supplémentaire qui est passé du repos à la vitesse V pendant l'instant Δt ?

Le théorème de quantité de mouvement s'écrit alors :

$$\frac{d(MV)}{dt} = \sum F$$

où $\sum F$ est la somme des forces appliquées au volume fluide considéré.

On obtient ainsi :

$$\underbrace{\frac{(\rho U \Delta t h_2 - \rho V \Delta t h_2)V}{\Delta t}}_{\frac{d(MV)}{dt}} = \left(\frac{1}{2} \rho g h_2^2 - \frac{1}{2} \rho g h_1^2 \right)$$

Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement permettent de déduire la vitesse de propagation U :

$$U^2 = gh_2 \frac{(h_1 + h_2)}{2h_1}$$

Pour une petite perturbation, on a : $h_1 \approx h_2 \approx h$, ce qui donne : $U = \sqrt{gh}$.

On peut montrer que de part et d'autre du front d'onde, l'énergie n'est pas conservée, ce qui se traduit par un bouillonnement intenses (présence de tourbillons), qui correspond à un phénomène dissipatif.

Cas d'une onde de choc dans un gaz

Il y a également perte d'énergie à travers l'onde de choc, cette énergie servant à échauffer la gaz après le passage du choc, le système étant adiabatique.

Dans le gaz, on parlera de choc droit, quand l'onde de choc est normale à l'écoulement amont.

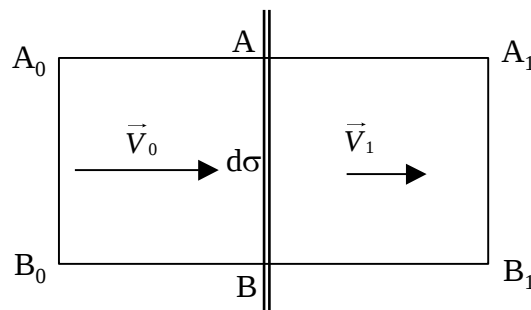
Onde de choc (ODC) droite stationnaire

Nous nous placerons sous les hypothèses suivantes :

- Les phénomènes visqueux et la conductivité thermique sont négligés.
- L'étude sera menée dans un repère lié à l'onde de choc.
- L'écoulement amont (avant le choc) sera caractérisé par : $p_0, T_0, \rho_0, \vec{V}_0$
- L'écoulement derrière l'ODC sera décrit par : $p_1, T_1, \rho_1, \vec{V}_1$

Considérons le fluide contenu dans le volume A_0B_0AB à l'instant t , qui deviendra à l'instant $t+dt$ le volume ABA_1B_1 .

Soit $d\sigma$, la surface appuyée sur AB .



Equation de conservation de la masse

Ainsi, à l'instant t : $dm = \rho_0 [V_0 dt d\sigma]$

Ainsi, à l'instant $t+dt$: $dm = \rho_1 [V_1 dt d\sigma]$

Soit en définitif :

$$\boxed{\rho_0 V_0 = \rho_1 V_1}$$

Conservation de la quantité de mouvement

Ecrivons cette équation en projection sur l'axe perpendiculaire au choc :

$$m \frac{dV}{dt} = \sum F$$

➤ Nous appliquerons le théorème de conservation de la quantité de mouvement à la masse dm

➤ La somme des forces se réduit exclusivement aux forces de pression :

$$\frac{dm(V_1 - V_0)}{\Delta t} = (p_0 d\sigma - p_1 d\sigma)$$

Sachant que $dm = \rho_0 [V_0 dt d\sigma] = \rho_1 [V_1 dt d\sigma]$, on a alors :

$$\rho_1 V_1^2 dt d\sigma - \rho_0 V_0^2 dt d\sigma = (p_0 - p_1) dt d\sigma$$

soit finalement :

$$\boxed{p_0 + \rho_0 V_0^2 = p_1 + \rho_1 V_1^2}$$

Conservation de l'énergie

Ce principe affirme que la variation d'énergie totale E (interne + cinétique) est égale aux travaux des forces extérieures qui sont en l'occurrence réduites aux forces de pression :

$$\int_0^1 dE = \int_0^1 dW$$

Soit u_0 et u_1 , **l'énergie interne massique** respectivement avant et après le choc.

A l'instant t , l'énergie contenue dans le volume de gaz $A_0 B_0 A B$ est : $E_0 = \left(u_0 + \frac{V_0^2}{2} \right) dm$

A l'instant $t+dt$, cette masse de gaz occupe le volume $A B A_1 B_1$, et son énergie est alors :

$$E_1 = \left(u_1 + \frac{V_1^2}{2} \right) dm$$

Le travail des forces de pression s'exprime par : $dW = -p dv$ où v est le volume.

Le travail des forces de pression lors du passage de l'état 0 à l'état 1 est donc donné par :

$$\int_0^1 dW = - \iiint p d\tau = W_0 - W_1 = p_0 v_0 - p_1 v_1 = \frac{p_0 dm}{\rho_0} - \frac{p_1 dm}{\rho_1}$$

Le théorème de conservation de l'énergie s'écrit donc :

$$\left(u_1 + \frac{V_1^2}{2}\right)dm - \left(u_0 + \frac{V_0^2}{2}\right)dm = p_0 \frac{dm}{\rho_0} - p_1 \frac{dm}{\rho_1}$$

soit encore :

$$u_0 + \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{V_0^2}{2} = u_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2}$$

On peut également introduire l'enthalpie massique $h = u + \frac{p}{\rho}$, et dans ce cas la conservation de l'énergie s'exprime par :

$$h_0 + \frac{V_0^2}{2} = h_1 + \frac{V_1^2}{2}$$

On peut ainsi introduire la notion d'enthalpie d'arrêt (ou enthalpie génératrice) massique :

$$h_i = h + \frac{V^2}{2} \text{ (enthalpie de cet écoulement en un point d'arrêt).}$$

On montre alors qu'il y a conservation de l'enthalpie d'arrêt :

$$h_{i0} = h_{i1}$$

Equations générales, dans le cas d'un gaz non nécessairement parfait

Le système d'équation à résoudre est le suivant :

$$\begin{aligned}\rho_0 V_0 &= \rho_1 V_1 \\ p_0 + \rho_0 V_0^2 &= p_1 + \rho_1 V_1^2 \\ h_0 + \frac{V_0^2}{2} &= h_1 + \frac{V_1^2}{2}\end{aligned}$$

Discussion des solutions

Cette discussion s'effectue dans un diagramme de Clapeyron, $(p, \omega=1/\rho)$, où ω est le volume massique.

$$\text{On pose généralement : } \dot{m} = \rho_0 V_0 = \rho_1 V_1 = \frac{V_0}{\omega_0} = \frac{V_1}{\omega_1}$$

$$\text{La conservation de la quantité de mouvement donne : } p_0 + \rho_0 V_0^2 = p_0 + \dot{m}^2 \omega_0 = p_1 + \dot{m}^2 \omega_1$$

$$\text{D'où } \dot{m}^2 = -\frac{p_1 - p_0}{\omega_1 - \omega_0}$$

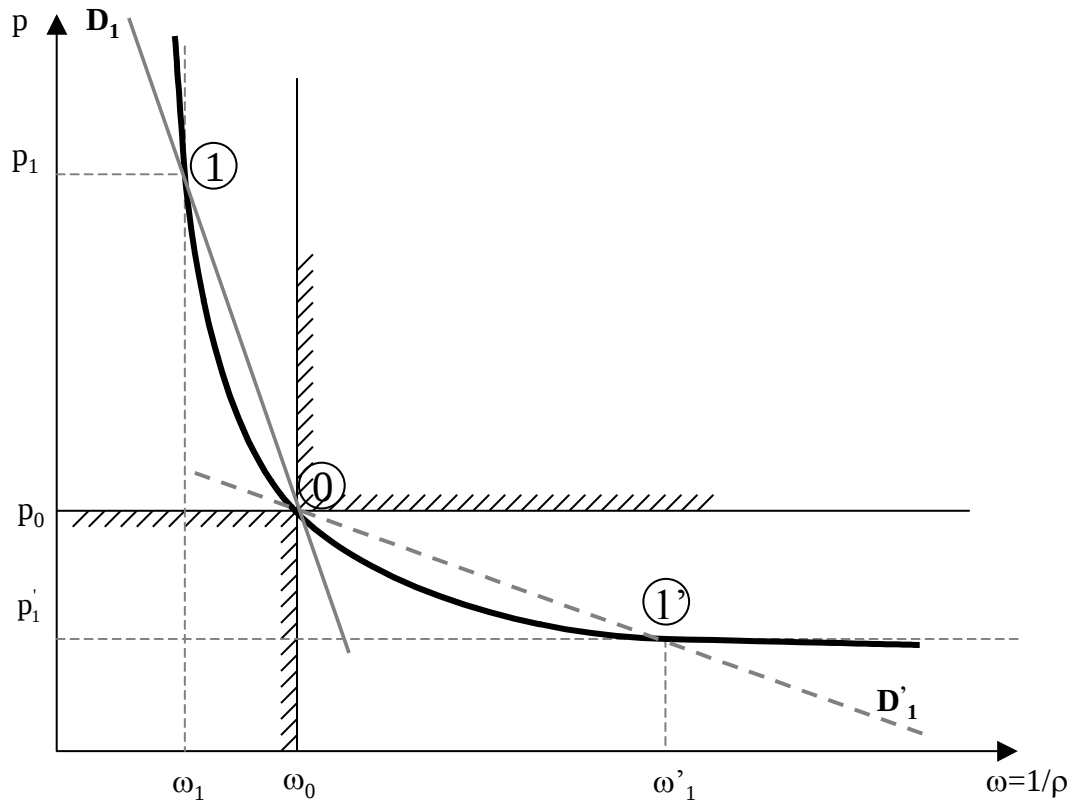
Cette équation est appelée équation de la droite d'impulsion ou droite de Rayleigh (D) passant par le point (p_0, ω_0) , de pente toujours négative $-\dot{m}^2$.

Introduisons également $\dot{m}^2$ dans l'équation de conservation de l'énergie :

$$\underbrace{h_1 - h_0}_{cte} = \frac{1}{2}(V_0^2 - V_1^2) = \frac{1}{2}(\dot{m}^2 \omega_0^2 - \dot{m}^2 \omega_1^2) = -\frac{1}{2} \left(\frac{p_1 - p_0}{\omega_1 - \omega_0} \right) (\omega_0^2 - \omega_1^2)$$

soit encore : $\boxed{\underbrace{h_1 - h_0}_{cte} = \frac{1}{2}(p_1 - p_0)(\omega_0 + \omega_1)}$ ou $\boxed{(p_1 - p_0) = 2 \frac{(h_1 - h_0)}{(\omega_0 + \omega_1)}}$: cette relation est

appelée courbe d'Hugoniot, qui est de type hyperbolique et passe aussi par le point (p_0, ω_0) .



L'observation du diagramme de Clapeyron montre qu'il existe deux solutions possibles :

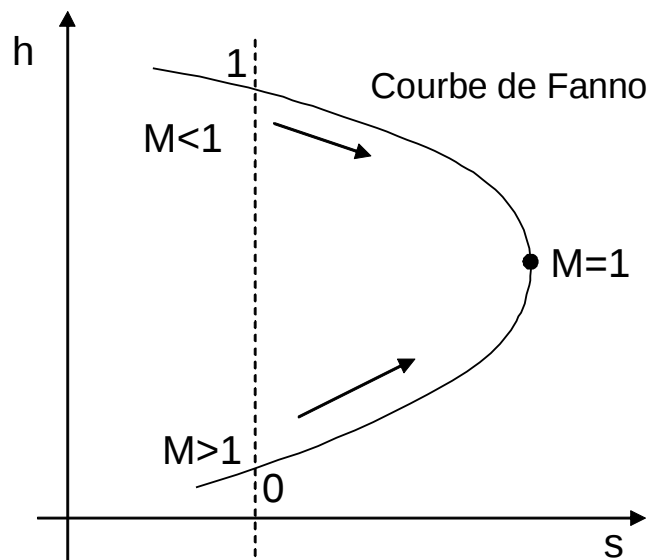
- une compression : cas de la courbe D_1
- une détente : cas de la courbe D'_1

On peut montrer, par des considérations thermodynamiques (voir le cas du gaz parfait traité ultérieurement) que la solution 1, correspondant à une compression, conduit à une augmentation de l'entropie ($s_1 > s_0$).

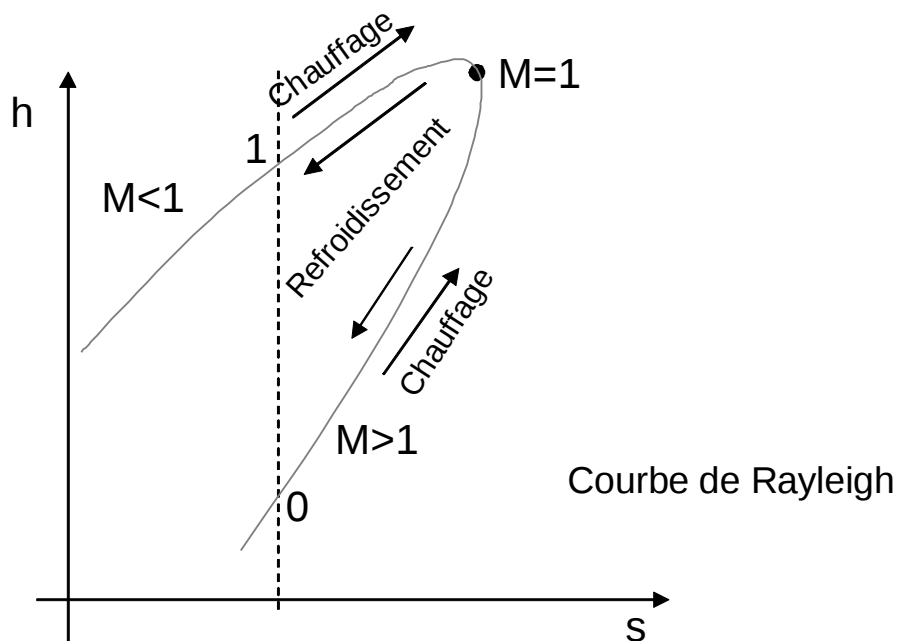
En revanche, la solution 1' (la détente), conduirait à une réduction d'entropie ; le phénomène étant considéré comme adiabatique, le second principe de la thermodynamique interdit cette deuxième possibilité.

Les équations de Rayleigh et d'Hugoniot peut être également discutée sur un diagramme de type entropie-enthalpie (h,s).

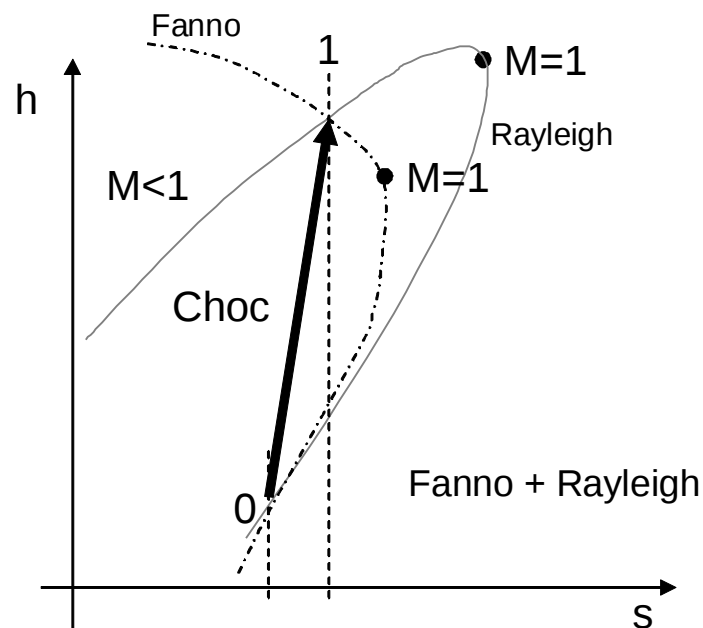
Dans le diagramme (h,s) l'équation de l'énergie combinée à l'équation de continuité s'appelle la courbe de Fanno. Sur une telle courbe, pour des conditions 0 fixées (conditions initiales) ; sont représentées l'ensemble des solutions possibles qui assurent la conservation de l'énergie du gaz, ceci quelque soit la quantité de mouvement.



La courbe de Rayleigh combine l'équation de continuité et celle de la quantité de mouvement. Cette courbe représente donc toutes les solutions possibles pour conserver le quantité de mouvement du gaz quelque soit l'énergie.



La combinaison des deux courbes sur un même diagramme permet de montrer que le passage à travers l'onde de choc conduit à un accroissement de l'entropie ($s_1 > s_0$).



Le cas des gaz parfaits (caloriquement parfaits, C_p et C_v sont des constantes)

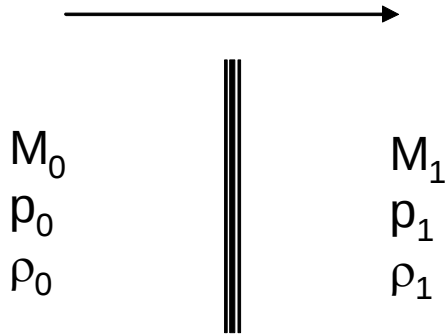
Dans ce cas on l'équation d'état : $\frac{p}{\rho} = rT$ et la relation : $h = C_p T$

ce qui conduit à : $\frac{p}{\rho} = \frac{c^2}{\gamma}$ et $h = \frac{c^2}{\gamma - 1}$ en utilisant la relation $C_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1}$

➤ L'équation de l'énergie $h_{i0} = h_{i1} = C_p T_{i0} = C_p T_{i1}$ donne finalement : $T_{i0} = T_{i1}$

Dans le cas d'un gaz caloriquement parfait, il y a donc conservation de la température génératrice à la traversée du choc.

Aspects thermodynamiques de l'onde de choc : cas des gaz caloriquement parfaits



Rappelons que :

En rapartant du système :

$$\begin{cases} \rho_0 V_0 = \rho_1 V_1 \\ p_0 + \rho_0 V_0^2 = p_1 + \rho_1 V_1^2 \\ h_0 + \frac{V_0^2}{2} = h_1 + \frac{V_1^2}{2} \end{cases}$$

Il vient :

$$\begin{cases} p_1 = p_0 + \rho_0 V_0^2 \left[1 - \frac{\rho_0}{\rho_1} \right] \\ h_1 = h_0 + \frac{V_0^2}{2} \left[1 - \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} \right)^2 \right] \end{cases}$$

Il s'en suit :

$$\frac{p_1}{p_0} = 1 + \frac{\rho_0}{p_0} V_0^2 \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1} \right) = 1 + \frac{V_0^2}{r T_0} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1} \right)$$

soit en introduisant le nombre de Mach :

$$\frac{p_1}{p_0} = 1 + \gamma M_0^2 \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1} \right) \quad (1)$$

En utilisant la définition de la vitesse du son : $\frac{\rho_0 V_0^2}{p_0} = \frac{V_0^2}{r T_0} = \frac{M_0^2 (\gamma r T_0)}{r T_0} = \gamma M_0^2$

$$\text{On obtient finalement : } \boxed{\frac{p_1}{p_0} = \omega(M_0) = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_0^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$$

De même :

$$h_1 = h_0 + \frac{V_0^2}{2} \left[1 - \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} \right)^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
\frac{h_1}{h_0} &= \frac{C_p T_1}{C_p T_0} = \frac{p_1}{p_0} \frac{\rho_0}{\rho_1} = 1 + \frac{V_0^2}{2C_p T_0} \left[1 - \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} \right)^2 \right] \\
&= 1 + \frac{V_0^2 (\gamma - 1)}{2\gamma r T_0} \left[1 - \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} \right)^2 \right] \\
&= 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2 \left[1 - \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{2}$$

De (1) et (2), il est possible d'éliminer le Mach M_0 :

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{1 + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{p_1}{p_0}}{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} + \frac{p_1}{p_0}}$$

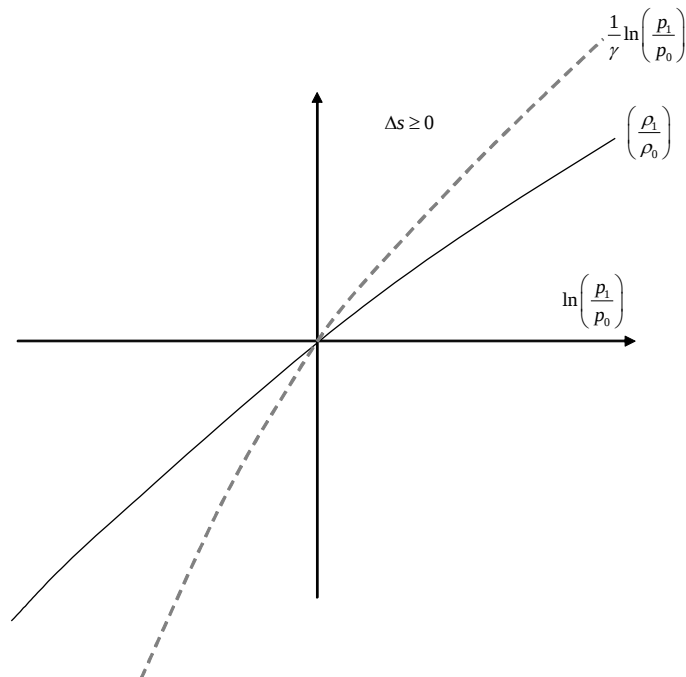
(avec $\gamma=1.4$)

La variation de l'entropie lors de la transformation s'exprime par :

$$\Delta s = C_v \ln \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right)$$

Afin de respecter le deuxième principe, on doit avoir :

$$\Delta s \geq 0 \quad \text{soit} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{\ln \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \right) \leq \frac{1}{\gamma} \ln \left(\frac{p_1}{p_0} \right)}$$



donc $\Delta s \geq 0$ conduit à : $\ln\left(\frac{p_1}{p_0}\right) \geq 0$ et $\ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right) \geq 0$

soit $p_1 \geq p_0$ et $\rho_1 \geq \rho_0$.

Il s'agit donc bien d'une compression.

De plus, le rapport des sauts de pression à la traversée du choc est donné par :

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_0^2 - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right) \approx 1.16 M_0^2 - 0.16$$

$$\text{Si } \frac{p_1}{p_0} \geq 0 \text{ alors } M_0 \geq 1 \text{ et } M_1 \leq 1$$

Relation de passage à la traversée d'un choc : cas du gaz calorifiquement parfait

➤ Le rapport membre à membre des équations de conservation de la quantité de mouvement et de conservation de la masse fournit :

$$\frac{p_0 + \rho_0 V_0^2}{\rho_0 V_0} = \frac{p_1 + \rho_1 V_1^2}{\rho_1 V_1}$$

$$\text{ou encore : } \frac{p_0}{\rho_0 V_0} + V_0 = \frac{p_1}{\rho_1 V_1} + V_1$$

$$\text{En utilisant les propriétés des gaz parfaits, on obtient : } \frac{c_0^2}{\gamma V_0} + V_0 = \frac{c_1^2}{\gamma V_1} + V_1 \quad (3)$$

A ce stade, il est nécessaire de faire apparaître la vitesse du son critique que l'on note c_c , qui correspond à la vitesse du son où les Mach locaux sont égaux à 1, et qui est identique de part et d'autre du choc.

$$\text{La conservation de l'énergie donne : } h_0 + \frac{V_0^2}{2} = h_1 + \frac{V_1^2}{2} = \underbrace{h_c + \frac{V_c^2}{2}}_{\text{Conditions critiques}} = cte$$

en utilisant : $M_c = \frac{V_c}{c_c} = 1$, il vient :

$$\text{soit : } \frac{c_0^2}{\gamma-1} + \frac{V_0^2}{2} = \frac{c_1^2}{\gamma-1} + \frac{V_1^2}{2} = \frac{c_c^2}{\gamma-1} + \frac{c_c^2}{2} = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} c_c^2$$

$$c_0^2 = \frac{\gamma+1}{2} c_c^2 - \frac{\gamma-1}{2} V_0^2$$

On en déduit ainsi :

$$c_1^2 = \frac{\gamma+1}{2} c_c^2 - \frac{\gamma-1}{2} V_1^2$$

En introduisant les relations donnant c_0^2 et c_1^2 dans la relation (3), nous obtenons une relation simplifiée : $(V_1 V_0 - c_c^2)(V_1 - V_0) = 0$

Dans le cas d'une onde de choc droite, on a : $V_1 \neq V_0$

On obtient alors la relation de Prandtl :

$$\boxed{V_0 V_1 = c_c^2}$$

Rapport des masses volumiques

L'équation de continuité fourni :

$$\frac{\rho_0}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_0} = \frac{V_1 V_0}{V_0^2} = \frac{c_c^2}{V_0^2}$$

On rappelle de plus que : $\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} c_c^2 = \frac{c_0^2}{\gamma-1} + \frac{V_0^2}{2}$

On en déduit le rapport des masses volumiques amont et aval du choc :

$$\boxed{\frac{\rho_0}{\rho_1} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \left[1 + \frac{2}{(\gamma-1) M_0^2} \right]}$$

Attention : cette relation n'est valable que si l'écoulement amont est supersonique ($M_0 \geq 1$)

On pourra remarquer que si M_0 tend vers l'infini, alors le rapport $\frac{\rho_0}{\rho_1}$ tend vers $\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$, soit 1/6 pour $\gamma=1,4$.

Rapport des pressions statiques à la traversée du choc

En utilisant l'équation de quantité de mouvement : $p_0 + \rho_0 V_0^2 = p_1 + \rho_1 V_1^2$

Sachant que : $\rho_0 V_0 = \rho_1 V_1$, S

Il vient : $p_1 = p_0 + \rho_0 V_0^2 \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1} \right)$

ce qui conduit à : $\frac{p_1}{p_0} = 1 + \frac{\rho_0 V_0^2}{p_0} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1} \right)$

or, en utilisant en particulier la vitesse du son : $\frac{\rho_0 V_0^2}{p_0} = \frac{V_0^2}{r T_0} = \frac{M_0^2 (\gamma r T_0)}{r T_0} = \gamma M_0^2$

$$\text{d'où : } \boxed{\frac{p_1}{p_0} = \omega(M_0) = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_0^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$$

Rapport des températures statiques

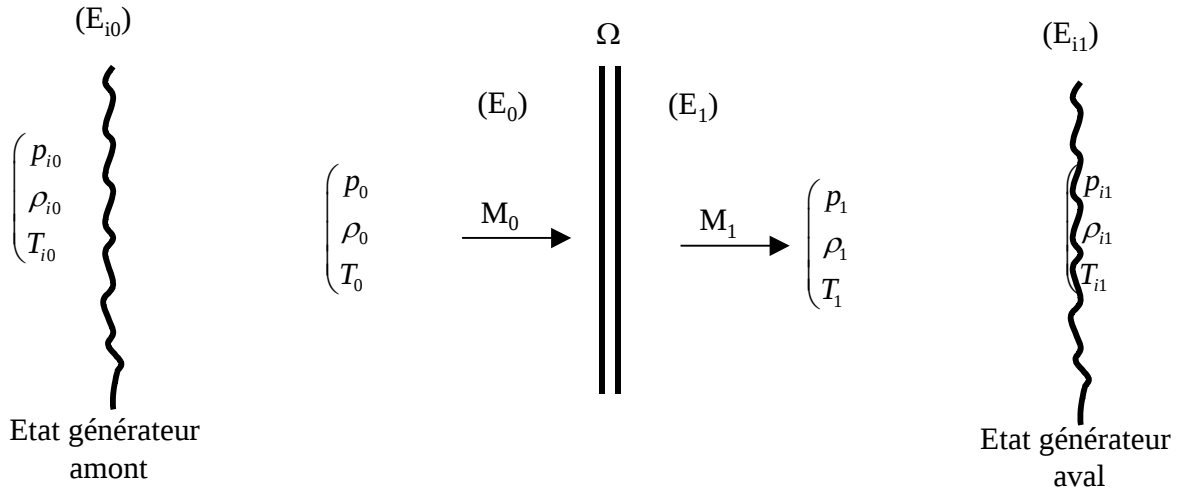
Il se déduit directement du rapport des masses volumique et des pressions statiques, en y

ajoutant l'équation d'état. : $\frac{p}{\rho} = rT$, ce qui conduit à :

$$\boxed{\frac{T_1}{T_0} = \theta(M_0) = \left(\frac{p_1}{p_0}\right) \cdot \left(\frac{\rho_0}{\rho_1}\right)}$$

Rapport des pressions génératrices

Considérons les états générateurs (E_{i0}) et (E_{i1}) correspondant respectivement aux écoulements en amont (E_0) et en aval (E_1) de l'onde de choc.



Le saut d'entropie entre les deux états générateurs est égal à celui du choc, les évolution entre les conditions génératrices (E_i) et les conditions locales (E) étant isentropiques :

$$s_{i0} - s_{i1} = \underbrace{(s_{i0} - s_0)}_0 + (s_0 - s_1) + \underbrace{(s_1 - s_{i1})}_0 = (s_0 - s_1)$$

La variation d'entropie entre les deux états générateurs sera donnée par :

$$\Delta s]_{i_0}^{i_1} = C_p \ln T - r \ln p]_{i_0}^{i_1}$$

Sachant de plus que pour un gaz calorifiquement parfait, la température génératrice se conserve à la traversée du choc ($T_{i0}=T_{i1}$) :

$$\Delta s]_{i_0}^{i_1} = \Delta s]_0^1 = C_p \ln T - r \ln p]_{i_0}^{i_1}, \text{ ce qui conduit à : } \Delta s]_{i_0}^{i_1} = r \ln \left(\frac{p_{i0}}{p_{i1}} \right) \quad (4)$$

Selon les variables utilisées, l'entropie peut s'écrire :

$$s = C_p \ln T - r \ln p = C_v \ln T - r \ln \rho = C_v \ln p - C_p \ln \rho$$

En utilisant $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, il vient (en prenant l'état de référence à 0) : $\Delta s = C_v \ln \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right)$

Appliquons cette dernière relation au saut d'entropie de part et d'autre du choc :

$$\Delta s]_0^1 = C_v \ln \left[\left(\frac{p_1}{p_0} \right) \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} \right)^\gamma \right] = r \ln \left(\frac{p_{i0}}{p_{i1}} \right) \text{ d'après l'équation (4)}$$

$$\text{soit : } \frac{p_{i1}}{p_{i0}} = \left[\frac{p_1}{p_0} \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} \right)^\gamma \right]^{-C_v/r}$$

En utilisant : $\frac{C_v}{r} = \frac{1}{\gamma - 1}$, il vient :

$$\boxed{\frac{p_{i1}}{p_{i0}} = \pi(M_0) = \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \text{ qui peut se traduire en terme de nombre de Mach amont}$$

M_0 en utilisant les rapports de pression et de masse volumique.

Nombre de Mach aval M_1

La conservation de la quantité de mouvement donne : $p_0 + \rho_0 V_0^2 = p_1 + \rho_1 V_1^2$

Ou en utilisant la définition du nombre de Mach et de la vitesse du son :

$$p_0 (1 + \gamma M_0^2) = p_1 (1 + \gamma M_1^2)$$

$$\text{d'où : } 1 + \gamma M_1^2 = \frac{p_0}{p_1} (1 + \gamma M_0^2)$$

En utilisant le rapport $\left(\frac{p_0}{p_1} \right)$ déjà établi et après simplification :

$$M_1^2 = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2}{\gamma M_0^2 - \frac{\gamma-1}{2}}$$

Applications

Les applications telles que le tube de Pitot en régime supersonique, dédié à la mesure de vitesse, ainsi que la tuyère à deux cols seront traitées spécifiquement en travaux dirigés.

Nous allons par contre aborder le problème de l'amorçage d'une tuyère supersonique.

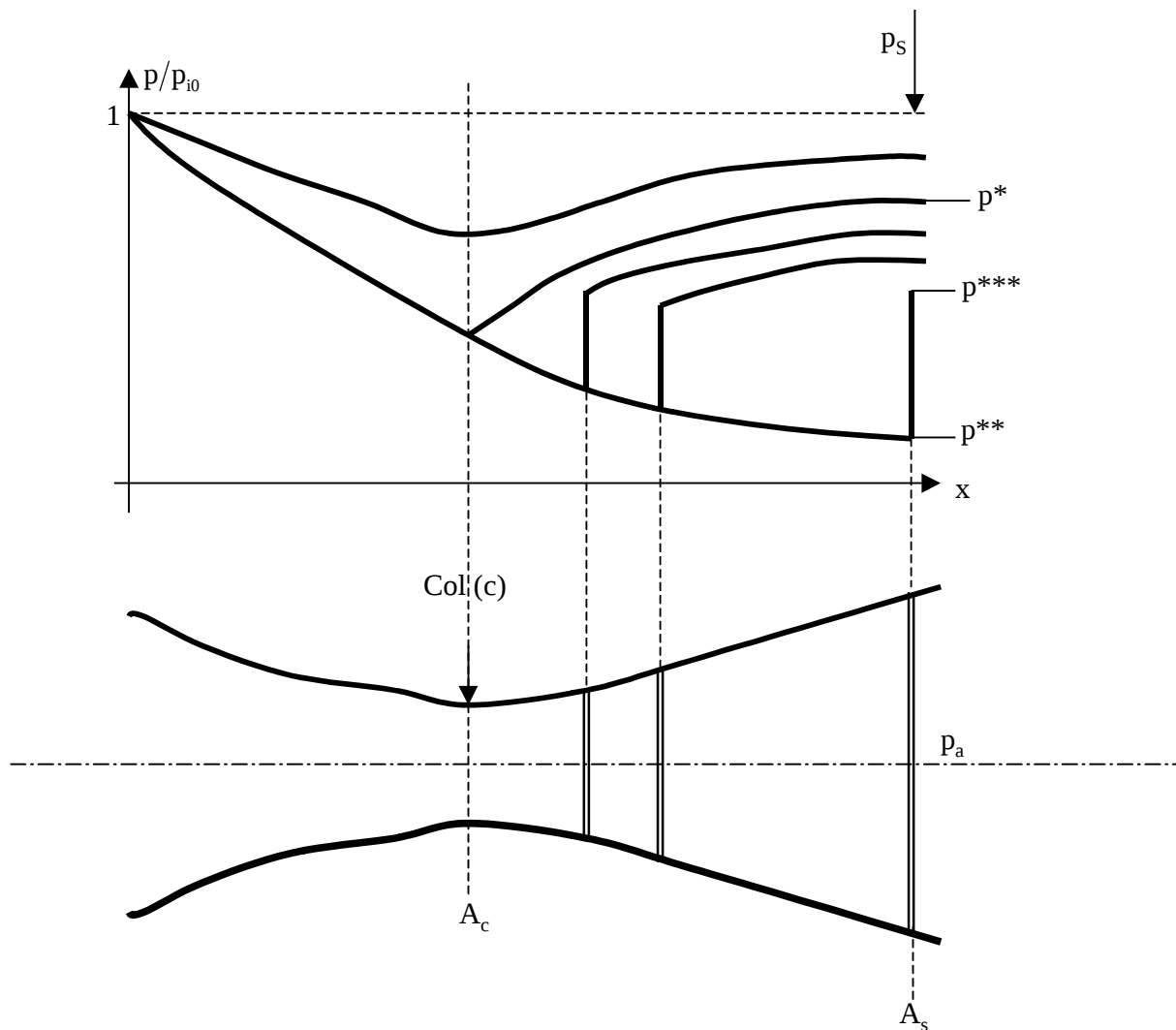
Amorçage d'une tuyère supersonique

Considérons une tuyère de Laval, tube à section variable, d'abord convergent, puis divergent, la partie de plus petite section droite étant nommée « col de la tuyère ».

La tuyère débouche dans la pression ambiante (p_a) et soit p_{i0} , la pression génératrice amont.

On s'intéresse à l'évolution de la pression p en chaque section droite de la tuyère repérée sur un axe horizontale, de coordonnée x . Pour cela, considérons le diagramme p en fonction de x .

Soit p_s , la pression atteinte dans le plan de sortie de la tuyère.



Plusieurs cas peuvent se présenter :

- $p_s < p^*$: l'écoulement accélère dans le convergent, n'atteint pas $M=1$ au col, et décélère dans le divergent ; l'écoulement est donc subsonique dans toute la tuyère.
- $p_s = p^*$: le col de la tuyère est amorcé, c'est à dire $M_c=1$, le débit maximal passe dans la tuyère. Cette condition est obtenue pour $p_s = p_a$.
L'écoulement est subsonique dans le divergent si $M_c=1-\varepsilon$ et l'écoulement est supersonique si $M_c=1+\varepsilon$ (ε petit).
- $p_s = p^{**}$: la tuyère est cette fois totalement amorcée : l'écoulement est supersonique dans tout le divergent. Ceci est possible pour $p_s \geq p_a$.
- Considérons maintenant la pression p^{***} résultant d'un choc droit positionné exactement dans le plan de sortie de la tuyère.
L'écoulement, débouchant à l'atmosphère est ainsi ralenti jusqu'à vitesse nulle. P^{***} doit ainsi correspondre à la pression génératrice derrière le choc droit, tel que :

$$\frac{p^{***}}{p_{i0}} = \pi(M_s) \text{ où } M_s \text{ est le Mach dans le plan de sortie de la tuyère.}$$

- Si maintenant la pression ambiante p_a est comprise entre p^* et p^{***} , le jet sortant de la tuyère est subsonique (on a toujours $p_s = p_a$) mais traverse une onde de choc droite qui se positionne dans la tuyère.

La conservation du débit (pour un gaz calorifiquement parfait) impose :

$$p_{i0} A_{c0} = p_{i1} A_{c1}$$

(A_{c0} , section du col de la tuyère, A_{c1} section du col fictif qui amènerait dans les conditions derrière la choc).

$$\text{soit } p_{i0} A_{c0} = \frac{p_{i1}}{p_s} p_s \frac{A_{c1}}{A_s} A_s$$

ou encore en utilisant les rapports de pression et de section isentropiques :

$$p_{i0} A_{c0} = \frac{p_s A_s}{\omega(M_s) \Sigma(M_s)}$$

Ainsi :

$$\omega(M_s) \Sigma(M_s) = \frac{p_s A_s}{p_{i0} A_{c0}}$$

Connaissant p_{i0} , A_{c0} , A_s et sachant que $p_s = p_a$, on peut déterminer M_s , puisque les fonctions $\omega(M)$ et $\Sigma(M)$ sont connues.

On obtient p_{i1} (pression génératrice derrière le choc) par : $p_{i1} = \frac{p_s}{\omega(M_s)}$.

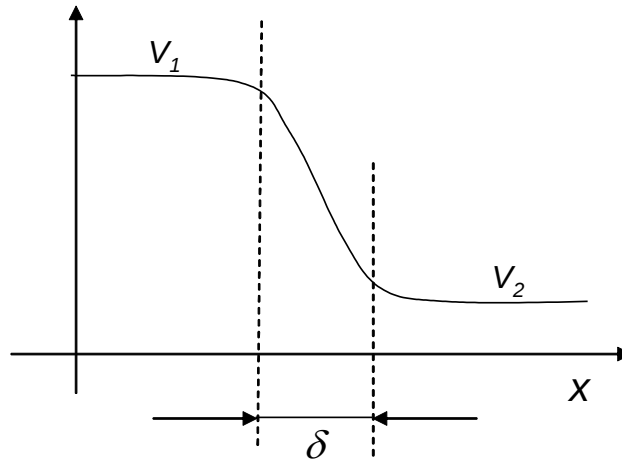
On pourra donc caractériser le choc par le Mach de choc M_{choc} et par la section A_{choc} dans laquelle il se produit.

M_{choc} sera déterminé par : $\frac{p_{i1}}{p_{i0}} = \pi(M_{choc})$ et A_{cho} par $\frac{A_{choc}}{A_{c0}} = \Sigma(M_{choc})$.

- Si maintenant p_a est comprise entre p^{**} et p^{***} , des choc obliques vont apparaître. Ce type de cas de figure sera traité dans la section dédiée à la théorie de l'onde de choc oblique.

Épaisseur d'une onde de choc

L'écoulement à l'intérieur du choc est de nature **visqueuse** et **non adiabatique**.



A l'intérieur d'un choc, les forces visqueuses prennent un aspect non négligeable du fait des très forts gradients de vitesse. Ainsi, il y a équilibre entre les forces visqueuses qui tendent à épaissir le profil de vitesse à l'intérieur du choc et les forces d'inertie qui tendent à le rendre plus brutal.

L'ordre de grandeur des forces d'inertie est donnée par:

$$\rho \frac{dV}{dt} \propto \rho V \frac{dV}{dx} \propto \rho_0 V_0 \frac{V_1 - V_2}{\delta} \quad (\text{on a } V \propto \frac{dx}{dt} \text{ et donc } dt \propto \frac{dx}{V})$$

où ρ_0 et V_0 sont des valeurs caractéristiques de la masse volumique et de la vitesse à l'intérieur du choc.

L'ordre de grandeur des forces visqueuses est donné par :

$$|\mu \vec{\Delta V}| \propto \mu_0 \frac{V_1 - V_2}{\delta^2}$$

soit si ces deux forces sont à l'équilibre à l'intérieur du choc :

$$\mu_0 \frac{V_1 - V_2}{\delta^2} \propto \rho_0 V_0 \frac{V_1 - V_2}{\delta}$$

$$\text{soit encore : } \text{Re}_\delta \propto \frac{\rho_0 V_0 \delta}{\mu_0} = 1$$

Le nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur du choc est donc de l'ordre de l'unité.

Soit μ , la définition microscopique de la viscosité, déterminée à l'aide de la théorie cinétique des gaz:

$$\mu \propto \frac{1}{3} \rho \bar{u} \lambda$$

avec :

λ , libre parcours moyen des molécules

$\bar{u}$: vitesse statistique moyenne des molécules dans le gaz :

$$\bar{u} = \left(\frac{8}{\pi} r T \right)^{1/2} = \left(\frac{8}{\pi \gamma} \right)^{1/2} (\gamma r T)^{1/2} = \left(\frac{8}{\pi \gamma} \right)^{1/2} c$$

où c est la célérité du son.

Ainsi :

$$\mu_0 \propto \frac{\rho_0 V_0 \delta}{\text{Re}_\delta} \propto \frac{1}{3} \rho \bar{u} \lambda$$

soit : $\frac{\delta}{\lambda} \propto \frac{1}{3} \frac{\bar{u}}{V_0} \text{Re}_\delta$

soit encore : $\frac{\delta}{\lambda} = \underbrace{\frac{1}{3} \left(\frac{8}{\pi \gamma} \right)^{1/2}}_{0,45} \underbrace{\left(\frac{c}{V_0} \right)}_{1/M} \text{Re}_\delta$

Le nombre de Mach M étant de l'ordre de 1, l'épaisseur δ du choc est de l'ordre du libre parcours moyen λ des molécules.