

Chapitre 7 : Ecoulements en conduites à section constante

On s'intéresse à l'écoulement de gaz compressibles dans des conduites à section constante ou peu variables sur de grandes distances. On pourra citer les exemples suivants :

- gazoducs
- réseaux de distribution de vapeur (centrales nucléaires)

On s'intéressera, dans ce chapitre, aux fluides « presque parfaits », dans le sens où on ne prend pas en compte les phénomènes dissipatifs.

On ajoute simplement

- un terme de frottement dans le bilan de quantité de mouvement
- un apport de chaleur extérieur Q dans le bilan enthalpique.

On fera l'hypothèse d'un écoulement mono-dimensionnel : $\vec{V} = U\vec{x}$

Les équations de la mécanique des fluides donnent :

- **Continuité**

$$\frac{d(\rho U)}{dx} = 0 \quad (1)$$

- **Dynamique (quantité de mouvement)**

$$\rho U \frac{dU}{dx} = -\frac{dP}{dx} - \lambda \frac{1}{D} \frac{1}{2} \rho U^2 \quad (2)$$

- **Energie**

$$\rho C_p \frac{dT}{dx} = -\rho U \frac{dU}{dx} + \rho \frac{dQ}{dx} \quad (3)$$

avec :

D , diamètre hydraulique de la conduite, $D = \frac{4A}{C}$ où A est l'aire de la section droite de la conduite et C son périmètre.

λ , coefficient de perte de charge, défini par :

$$\lambda = \frac{-\Delta p}{\frac{1}{2} \rho U^2} \frac{D}{L} \quad \text{où } L \text{ est la longueur de conduite considérée,}$$

où $\Delta p = p_2 - p_1 < 0$.

dQ est l'apport de chaleur extérieur par unité de masse de fluide.

Exercice préliminaire : établissement de l'équation de l'énergie .

Pour cet exercice, on ne prendra pas en compte le terme de source de chaleur.

Les hypothèses sont : absence de frottements, de dissipation visqueuse et de forces de volumes.

- L'équation du mouvement est donnée par :

$$\rho \frac{DU_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (\text{pas de forces de volume, pas de forces visqueuses})$$

où « D » symbolise la dérivée particulaire.

- L'équation de l'énergie est donnée par :

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{U_i^2}{2} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_i} (p U_i) \quad \text{ou encore : } \rho \frac{De}{Dt} + \underbrace{\rho U_i \frac{DU_i}{Dt}}_{-\cancel{U_i \frac{\partial p}{\partial x_i}}} = \cancel{-U_i \frac{\partial p}{\partial x_i}} - p \frac{\partial U_i}{\partial x_i}$$

$$\text{soit en définitif : } \rho \frac{De}{Dt} = -p \frac{\partial U_i}{\partial x_i}$$

e désignant l'énergie interne massique.

- En transformant l'équation de l'énergie, en utilisant l'équation du mouvement :

- Introduisons maintenant l'enthalpie massique h :

$$h = e + \frac{p}{\rho}$$

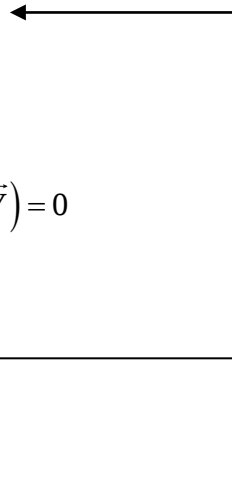
$$\text{soit : } \frac{Dh}{Dt} = \frac{De}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt}$$

$$\text{ou bien encore : } \rho \frac{Dh}{Dt} = \rho \frac{De}{Dt} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}$$

- Ecrivons l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad \text{soit encore : } \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad} \rho}_{\frac{D\rho}{Dt}} + \rho \text{div}(\vec{V}) = 0$$

$$\text{soit finalement : } \frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div}(\vec{V}) = 0$$



$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \rho \frac{De}{Dt} + \frac{Dp}{Dt} + \underbrace{\frac{p}{\rho} \rho \operatorname{div} \vec{V}}_{p \frac{\partial U_i}{\partial x_i}}$$

- Introduisons l'enthalpie dans l'équation de l'énergie :

Sachant que : $\rho \frac{De}{Dt} = -p \frac{\partial U_i}{\partial x_i}$,

on a alors : $\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + p \frac{\partial U_i}{\partial x_i} - p \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = \frac{Dp}{Dt}$ ←

- Les équations de l'énergie et du mouvement se résument donc ainsi :

$$\boxed{\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt}}$$

$$\boxed{\rho \frac{DU_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i}}$$

- En considérant le cas monodimensionnel stationnaire :

$$\rho \cancel{U} \frac{dh}{dx} = \cancel{U} \frac{dp}{dx} \quad (\text{équation de l'énergie})$$

$$\rho U \frac{dU}{dx} = -\frac{dp}{dx} \quad (\text{équation du mouvement})$$

Ecoulements de Fanno

Ce type d'écoulements est défini par :

- présence d'une perte de charge
- $dQ=0$, pas d'apport de chaleur extérieur.

En utilisant les hypothèses précédentes, on divise les équations (1), (2) et (3) par ρU^2 et on

utilise l'équation d'état des gaz calorifiquement parfaits $\rho = \frac{p}{rT} = \frac{\gamma p}{c^2}$ et la définition du

nombre de Mach $M = \frac{V}{c}$.

On obtient ainsi le système transformé :

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dU}{U} = 0 \\ \frac{1}{\gamma M^2} \frac{dp}{p} + \frac{dU}{U} + \frac{\lambda}{2D} dx = 0 \\ \frac{1}{(\gamma-1)M^2} \frac{dT}{T} + \frac{dU}{U} = 0 \end{cases}$$

On peut de nouveau transformer le système précédent en écrivant :

$$U^2 = \gamma r T M^2 \quad \text{soit} \quad 2 \frac{dU}{U} = \frac{dT}{T} + 2 \frac{dM}{M}$$

De plus, l'équation de l'énergie fournie : $\frac{dT}{T} = (1-\gamma) M^2 \frac{dU}{U}$.

Il est ainsi possible d'éliminer $\frac{dT}{T}$ entre ces deux équations.

Les valeurs de $\frac{dT}{T}$ et $\frac{d\rho}{\rho}$ s'obtiennent à l'aide de l'équation de continuité.

$\frac{dp}{p}$ s'obtient à l'aide de l'équation d'état.

Pour obtenir le coefficient de perte de charge λ , il suffit de substituer $\frac{dp}{p}$ et $\frac{dU}{U}$ dans

l'équation de la dynamique.

Ainsi, en définitif, on obtient les expressions différentielles suivantes, et ceci en fonction du nombre de Mach M exclusivement, pour :

- la vitesse

$$\frac{dU}{U} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) M^2} \frac{dM}{M} \quad (4)$$

- la pression

$$\frac{dp}{p} = - \frac{1 + (\gamma-1) M^2}{1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) M^2} \frac{dM}{M} \quad (5)$$

- la température

$$\frac{dT}{T} = - \frac{(\gamma-1)M^2}{1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right)M^2} \frac{dM}{M} \quad (6)$$

- La masse volumique

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{-1}{1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right)M^2} \frac{dM}{M} \quad (7)$$

- Le coefficient de perte de charge

$$\frac{\lambda dx}{2D} = \frac{(1-M^2)}{\gamma M^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)} \frac{dM}{M} \quad (8)$$

Variation d'entropie

On rappelle la formule de Gibbs : $Tds = dh - \frac{dp}{\rho}$

qui peut s'écrire dans le cas d'un gaz calorifiquement parfait, c'est à dire en utilisant les

identités $\left(\frac{dp}{\rho} = \frac{dp}{p} rT\right)$ et $(dh = C_p dT)$:

$$ds = C_p \frac{dT}{T} - r \frac{dp}{p}$$

En remplaçant par les expressions de $\frac{dT}{T}$ et $\frac{dp}{p}$ démontrées précédemment, on obtient la

variation d'entropie ds :

$$ds = r \frac{1-M^2}{1 + \left(\frac{\gamma-1}{2} M^2\right)} \frac{dM}{M}$$

En utilisant l'expression du coefficient de perte de charge, on peut obtenir une expression du type :

$$\boxed{\frac{ds}{dx} = \lambda \frac{\gamma r}{2c^2} \frac{U^2}{D} = \lambda \frac{\gamma r M^2}{2D}}$$

La perte de charge dans la conduite correspond donc à une variation d'entropie, ce qui généralise le régime incompressible.

Remarques

- $\frac{ds}{dx} > 0$, d'après le second principe de la thermodynamique
- Si $M < 1$, $(1 - M^2) > 0$; de plus $ds > 0$ donc $dM > 0$: le nombre de Mach ne peut que croître.
- Si $M > 1$, $(1 - M^2) < 0$; de plus $ds > 0$ donc $dM < 0$: le nombre de Mach ne peut que décroître.
- Si $M = 1$, $\lambda = 0$: c'est incompatible avec les hypothèses du problème.

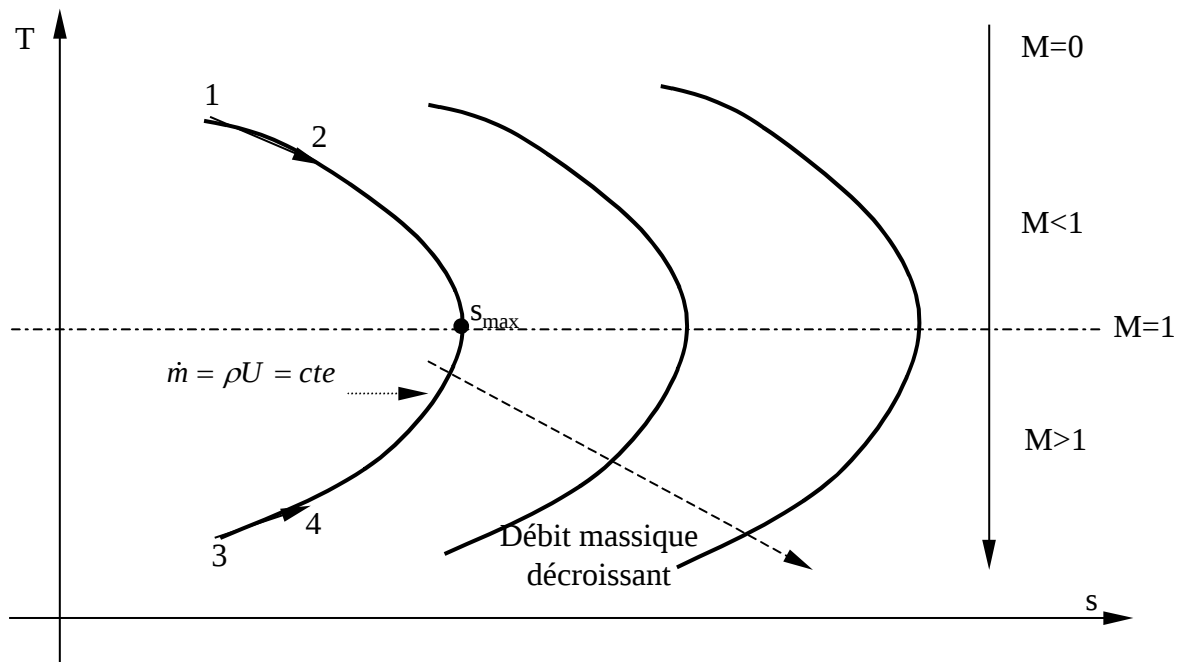
Conclusions

Tout au long d'une conduite cylindrique à section constante, le régime d'écoulement (sub ou super-sonique) se conserve.

Si le régime initial est subsonique, le nombre de Mach reste inférieur à 1 tout en augmentant continûment.

Si le régime initial est supersonique, le nombre de Mach reste supérieur à 1 tout en diminuant continûment.

On peut représenter ces conclusions sur un diagramme T-s sous la forme de courbes de Fanno, chacune de ces courbes correspondant à un débit massique $\dot{m} = \rho U = cte$.



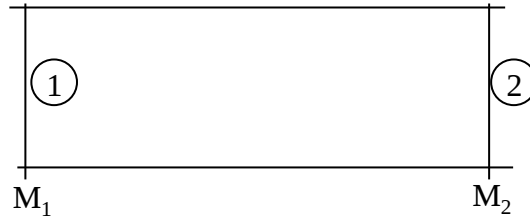
De 1 à 2 : on part du régime subsonique ; l'écoulement se fait dans le sens d'une augmentation de s.

De 3 à 4 : on part du régime supersonique ; l'écoulement se fait également dans le sens d'une augmentation de s.

Calcul du coefficient de perte de charge

Intégrons l'équation (8) faisant intervenir le coefficient de perte de charge :

$$\int_0^L \frac{\lambda dx}{2D} = \int_{M_1}^{M_2} \frac{(1-M^2)}{\gamma M^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)} \frac{dM}{M}$$



ce qui conduit à :

$$\frac{\lambda L}{2D} = \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{1}{M_1^2} - \frac{1}{M_2^2} \right) + \frac{\gamma+1}{4\gamma} \ln \left[\left(\frac{M_1}{M_2} \right)^2 \frac{1 + \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) M_2^2}{1 + \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) M_1^2} \right]$$

Le Mach aval, au niveau de la section 2 est borné dans tout les cas par $M_2=1$.

Il existe donc une limite de longueur de conduite L_{max} au delà de laquelle on sort des hypothèses du problème.

$$\frac{L_{max}}{D} = \frac{1}{\lambda \gamma} \left[\left(\frac{1}{M_1^2} - 1 \right) + \frac{\gamma+1}{2} \ln \left[\frac{\left(\frac{\gamma+1}{2} \right) M_1^2}{1 + \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) M_1^2} \right] \right]$$

Lorsque $L=L_{max}$, $M_2=1$ et on est à l'entropie maximale s_{max} .

Il faut alors que l'entropie continue à augmenter, ce qui ne peut se faire qu'en passant sur une autre courbe de Fanno, correspondant à un débit massique $\dot{m} = \rho U$ plus petit.

Il existe donc une longueur limite de conduite sur laquelle le débit massique ne se conserve plus, que l'on appelle **limite de blocage**, qui correspond aux conditions soniques.

Si la conduite a une longueur supérieure à la longueur de blocage, l'écoulement se poursuit avec une diminution du débit massique, pour les conditions données. Nous allons décrire physiquement ce qui se passe alors.

Interprétons ces phénomènes physiquement :

Cas subsonique

Considérons $M_1 < 1$ (écoulement subsonique). La pression de sortie P_2 doit donc être impérativement égale à la pression extérieure P_{ext} : $P_2 = P_{ext}$.

Si cette condition n'est pas réalisée, le débit massique sera modifié pour l'établir.

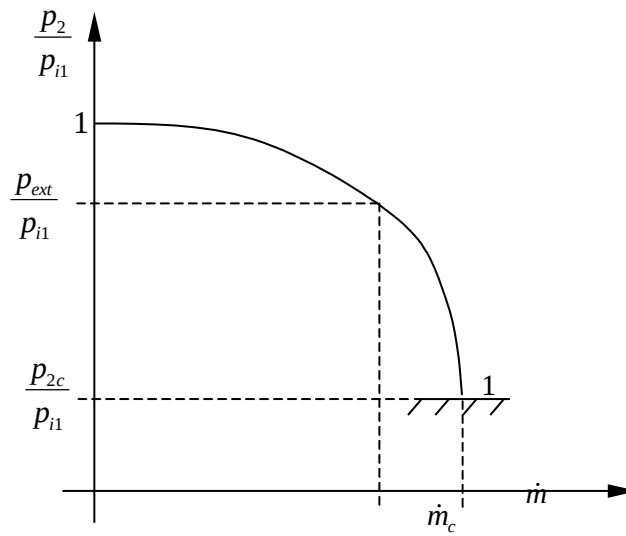
Si l'écoulement est bloqué ($M_2=1$), il suffit que la pression extérieure soit inférieure ou égale à la pression dans le plan de sortie pour assurer l'écoulement.

Ces remarques préliminaires montrent que le débit traversant une telle conduite n'est pas une donnée, mais plutôt un résultat qui est fonction de la géométrie de la conduite (L, D) et de la pression extérieure également.

Le débit se déduit de la courbe caractéristique $\left(\dot{m} ; \frac{p_2}{p_{i1}} \right)$, avec p_{i1} pression génératrice amont.

Cette caractéristique s'établit ainsi :

- Si $p_2 = p_{i1}$, il n'y a pas d'écoulement (par définition des conditions génératrices)
- Si $\dot{m}$ augmente, on trace l'évolution de $\frac{p_2}{p_{i1}}$. Pour une conduite donnée, il existe une valeur du débit $\dot{m}_c$ qui va assurer le blocage avec $M_2=1$; la pression dans le plan de sortie sera alors p_{2c} . Comme la conduite est bloquée, le débit ne peut plus augmenter.
- Comme cette caractéristique est établie pour une conduite donnée, en se fixant le rapport $\frac{p_{ext}}{p_{i1}}$, on peut obtenir le débit traversant le tube et ainsi les conditions d'entrée $p_1, T_1, \dots$
- Si $\frac{p_{ext}}{p_{i1}} \leq \frac{p_{2c}}{p_{i1}}$, le débit est fixé à $\dot{m}_c$.



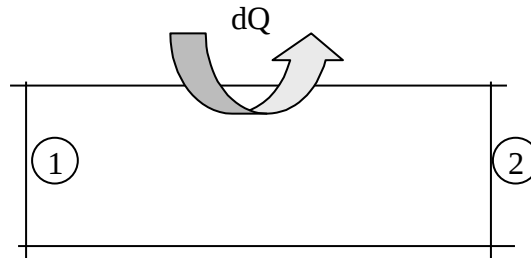
Cas supersonique

Si $M_1 > 1$ (régime supersonique), l'écoulement décélère jusqu'aux conditions de blocage.

Dans le cas où $M_2 > 1$, l'écoulement demeure possible même si $P_2 \geq P_{ext}$; l'égalité stricte, comme dans le cas précédent n'est pas nécessaire.

Ecoulements de Rayleigh

Il s'agit d'écoulements en conduite à section constante, avec apport de chaleur extérieure, mais sans frottement.



➤ L'équation de la dynamique devient alors :

$$\rho U \frac{dU}{dx} = -\frac{dp}{dx} \quad \text{ou bien encore en introduisant le nombre de Mach } M :$$

$$\frac{1}{\gamma M^2} \frac{dp}{p} + \frac{dU}{U} = 0$$

Remarque : l'équation du mouvement peut également s'écrire de la manière suivante, en considérant que :

$$\rho U \frac{dU}{dx} = \frac{d(\rho U^2)}{dx} - U \frac{d(\rho U)}{dx}$$

Sachant que $\frac{d(\rho U)}{dx} = 0$ d'après l'équation de continuité, on a également :

$$\frac{d(\rho U^2)}{dx} = -\frac{dp}{dx}$$

➤ L'équation de l'énergie s'écrit :

$$\rho C_p \frac{dT}{dx} = -\rho U \frac{dU}{dx} + \rho \frac{dQ}{dx}$$

Ainsi comme dans le cas des écoulements de Fanno, on peut établir un jeu d'équations transformées pour :

- la vitesse

$$\frac{dU}{U} = \frac{1}{1-M^2} \frac{dQ}{C_p T}$$

- la pression

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\gamma M^2}{1-M^2} \frac{dQ}{C_p T}$$

- la température

$$\frac{dT}{T} = \frac{1-\gamma M^2}{1-M^2} \frac{dQ}{C_p T}$$

- La masse volumique

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{-1}{1-M^2} \frac{dQ}{C_p T}$$

- Le nombre de Mach

$$\frac{dM}{M} = \frac{1+\gamma M^2}{2(1-M^2)} \frac{dQ}{C_p T}$$

Intégrons maintenant ces équations entre deux section 1 et 2 :

$$p_1 + \rho_1 U_1^2 = p_2 + \rho_2 U_2^2$$

ou bien encore en introduisant le nombre de Mach : $p_1(1+\gamma M_1^2) = p_2(1+\gamma M_2^2)$

soit enfin :

$$\boxed{\frac{p_2}{p_1} = \frac{(1+\gamma M_1^2)}{(1+\gamma M_2^2)}}$$

En utilisant la définition du nombre de Mach :

$$M_1 = \frac{U_1}{c_1} \text{ et } M_2 = \frac{U_2}{c_2}$$

$$\text{d'où : } \frac{M_2}{M_1} = \frac{U_2}{U_1} \cdot \frac{c_2}{c_1} = \frac{U_2}{U_1} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

L'équation de continuité peut ainsi s'écrire, en utilisant l'équation d'état des gaz calorifiquement parfait :

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{p_1}{p_2} \cdot \frac{T_2}{T_1}$$

Cela permet en définitif le calcul du rapport des températures :

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{M_2}{M_1} \cdot \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2$$

Deux valeurs intéressantes se dégagent de l'analyse précédente :

- $M=1$: toutes les grandeurs tendent vers l'infini...
- $M = 1/\sqrt{\gamma}$ est spécifique de l'évolution de la température : en effet on a $\frac{dT}{T} = 0$ (ou $T = cte$) quelque soit l'apport de chaleur extérieur.

On peut donc résumer la situation dans un tableau de variation.

M →		0	$1/\sqrt{\gamma}$	1	∞
U (M)	dQ>0				
	dQ<0				
p ou ρ	dQ>0				
	dQ<0				
T	dQ>0				
	dQ<0				

En résumé :

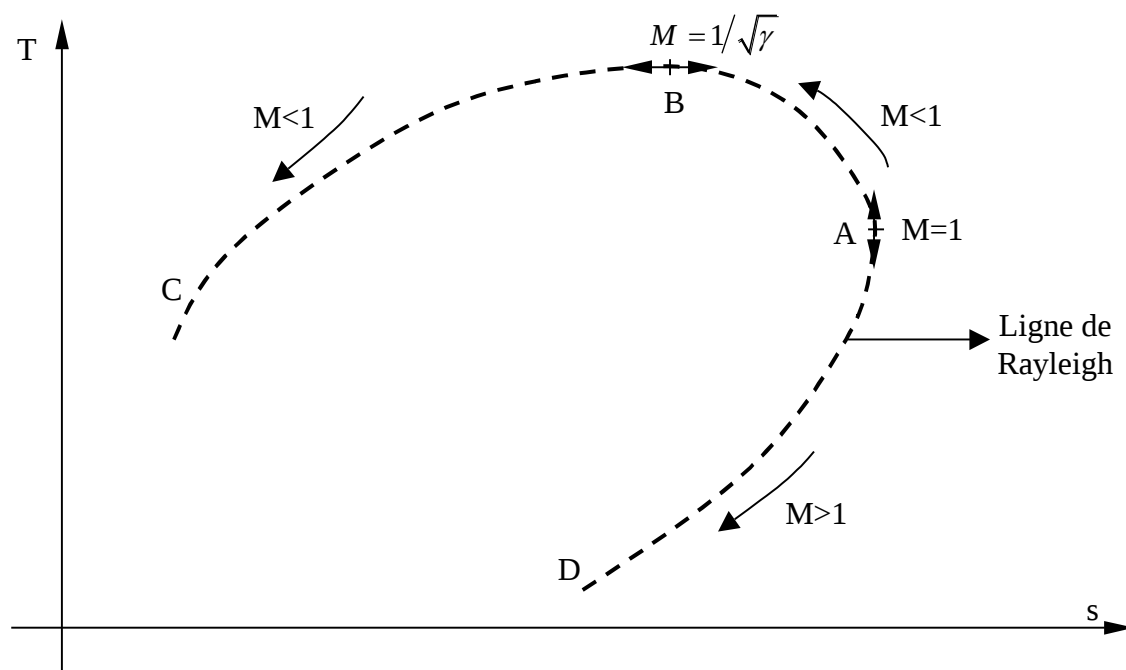
- en subsonique, tout apport de chaleur provoque une augmentation du nombre de Mach
- en supersonique, l'apport de chaleur provoque une diminution du nombre de Mach.

Dans ces deux situations, l'écoulement a tendance à évoluer vers des conditions soniques ($M=1$), qui correspond à une situation de **blocage thermique**.

On peut représenter ce comportement sur le diagramme T-s, sous la forme d'une ligne de Rayleigh.

Pour interpréter ce diagramme, on se souviendra que : $ds = C_p \frac{dT}{T} - r \frac{dp}{p} = \frac{dQ}{T}$ (en utilisant les expressions de $\frac{dT}{T}$ et $\frac{dp}{p}$). Un accroissement d'entropie correspond donc directement à un apport de chaleur.

On peut ainsi observer sur le diagramme T-s :



- de C→B : s augmente, T augmente
- de B→A : s augmente, T diminue
- de A→D : s diminue, T diminue

L'une des applications usuelles des écoulements de Rayleigh est le statoréacteur, qui sera traité en travaux dirigés.