

Exercice 4 : Performance des méthodes itératives

1) Calcul du déterminant

Résultat admis

$$A_1 = (b) \Rightarrow D_1 = b$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} b & c \\ a & b \end{pmatrix} \Rightarrow D_2 = b^2 - 4ac$$

Dans le cas général :

$$\begin{aligned} D_N &= \begin{vmatrix} b & c & & & \\ a & b & c & & \\ & a & b & c & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & c \\ & & & & a & b \end{vmatrix}_N \\ &= bD_{N-1} - a \begin{vmatrix} c & & & & \\ a & b & c & & \\ & a & b & c & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a & b & c \\ & & & & a & b \end{vmatrix}_{N-1} \\ &= bD_{N-1} - acD_{N-2} \end{aligned}$$

2) Relation de récurrence explicite

Résultat admis

Pour $N = 1$

$$D_1 = \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} r = 2r \cos \theta = b$$

Pour $N = 2$

$$D_1 = \frac{\sin 3\theta}{\sin \theta} r^2$$

On utilise le développement : $\sin 3\theta = \sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta$ et sachant que $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ on obtient

$$D_2 = 2 \cos^2 \theta r^2 + \cos 2\theta \sin \theta = (4 \cos^2 \theta - 1)r^2 = b^2 - 4ac$$

Note : $\cos \theta = 2 \cos^2 \theta - 1$.

Pour $N \geq 3$ on utilise la relation de récurrence.

$$bD_{N-1} - acD_{N-2} = \frac{b \sin N\theta r^{N-1}}{\sin \theta} - r^2 \frac{\sin(N-1)\theta}{\sin \theta} r^{N-2}$$

or $b = 2r \cos \theta$

$$= \frac{r^N}{\sin \theta} [2 \cos \theta \sin N\theta - \sin(N-1)\theta]$$

On sait que : $\sin(N+1)\theta + \sin(N-1)\theta = 2 \cos \theta \sin N\theta$

On obtient bien :

$$bD_{N-1} - acD_{N-2} = \frac{r^N \sin(N+1)\theta}{\sin \theta}$$

$$= D_N$$

3) Valeurs propres de A

Résultat admis

4) Cas de la matrice K

En remplaçant les coefficients a , b et c par leurs valeurs numériques on obtient bien :

$$\lambda_k = 2(1 - \cos k\pi h) , \quad k = 1, \dots, N$$

avec $h = 1/(N+1)$.

$\forall k$ les valeurs propres sont positives. De plus, la matrice est symétrique. K est donc bien symétrique définie positive.

On ne peut rien affirmer à ce stade quant à la convergence de la méthode de Jacobi. Il faut connaître les valeurs propres de la matrice d'itération. En revanche, la méthode de Gauss-Seidel (et S.O.R) converge, d'après le théorème du cours.

5) Nombre de conditionnement

A l'aide d'un cercle trigonométrique on montre que $\cos N\pi h = -\cos \pi h$.

Le nombre de conditionnement χ est défini à partir des valeurs extrémales des valeurs propres de la matrice (symétrique définie positive)

$$\chi(K) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

Or $\lambda_{max} = 2 - 2 \cos N\pi h = 2 + 2 \cos \pi h$ et $\lambda_{min} = 2 - 2 \cos \pi h$.

$$\chi(K) = \frac{1 + \cos \pi h}{1 - \cos \pi h}$$

Pour les grandes valeurs de N , $h \rightarrow 0$. On peut alors effectuer un développement limité en 0 de $\chi(K)$:

$$\chi(K) \sim \frac{1 + 1 - \pi^2 h^2/2}{1 - 1 + \pi^2 h^2/2} \sim \frac{2 - \pi^2 h^2/2}{\pi^2 h^2/2} \sim \frac{4}{\pi^2 h^2}$$

Donc lorsque $N \rightarrow \infty$ le nombre de conditionnement aussi. Ainsi, le système est mal conditionné pour les matrices de grande taille. Ceci entraîne des erreurs d'arrondis lors de la résolution par des méthodes directes (cf. cours). Intéressons-nous au cas des méthodes itératives.

6) Méthode de Jacobi

La matrice d'itération dans le cadre de la méthode de Jacobi, B_J s'écrit :

$$\begin{aligned} B_J &= I_N - D^{-1}K \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il s'agit d'une matrice tridiagonale où $a = -1/2$, $b = 0$ et $c = -1/2$. Ses valeurs propres sont donc (question 3) : $\lambda_k = -\cos k\pi h$.

On en déduit le facteur de réduction $\rho(B_J) = \max |\lambda_k| = \cos \pi h$. Qui est strictement inférieur à 1 car h est toujours différent de 0. On constate également que plus la taille de la matrice augmente, plus le facteur de réduction se rapproche de 1. La méthode de Jacobi est alors de moins en moins efficace pour les systèmes mal conditionnés.

7) Méthode de Gauss-Seidel et Méthode S.O.R

a) Facteur de réduction de la méthode Gauss-Seidel

Le facteur de réduction de Gauss-Seidel correspond à celui de la méthode S.O.R pour $\omega = 1$ (cf. cours). On remplace alors dans la formule (5a) pour obtenir :

$$\begin{aligned}\rho_{GS} &= \rho_{S.O.R}(1) \\ &= 1 - 1 + \frac{\rho_J^2}{2} + 1 \times \rho_J \sqrt{1 - 1 + \frac{\rho_J^2}{4}} \\ &= \frac{\rho_J^2}{2} + \frac{\rho_J^2}{2} \\ \rho_{GS} &= \rho_J^2\end{aligned}$$

Lorsque $h \rightarrow 0$ le facteur de réduction de Gauss-Seidel peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\rho_{GS} &\sim \left(1 - \pi^2 h^2 / 2 + o(h^2)\right)^2 \\ &\sim 1 - \pi^2 h^2 + o(h^2)\end{aligned}$$

La méthode de Gauss-Seidel converge bien (confirmation du résultat vu en cours). De plus, puisque $\rho_J < 1$, $\rho_{GS} < \rho_J$. Ainsi, la méthode de Gauss-Seidel est plus performante.

b) Facteur de relaxation de la méthode S.O.R

D'après la question 6) : $\rho_J = \cos \pi h$. A l'aide de la formule (5b) on en déduit que le paramètre ω_{opt} s'écrit :

$$\begin{aligned}\omega_{opt} &= \frac{2}{1 + \sqrt{1 - (\cos \pi h)^2}} \\ &= \frac{2}{1 + \sin \pi h}\end{aligned}$$

D'où le facteur de réduction optimal :

$$\begin{aligned}\rho_{S.O.R}(\omega_{opt}) &= \omega_{opt} - 1 \\ &= \frac{2 - \sin \pi h}{1 + \sin \pi h}\end{aligned}$$

Pour les matrices de grande dimension, le développement limité du facteur de réduction

donne :

$$\begin{aligned}
 \rho_{S.O.R}(\omega_{opt}) &= \frac{1 - \sin \pi h}{1 + \sin \pi h} \\
 &\sim \frac{1 - \pi h}{1 + \pi h} \\
 &\sim (1 - \pi h)(1 - \pi h) \\
 &\sim (1 - 2\pi h)
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\rho_{S.O.R}(\omega_{opt}) < \rho_{GS} < \rho_J$. La méthode S.O.R est la plus efficace des trois. Néanmoins, dès que N croît, toutes les méthodes deviennent de moins en moins performantes.

8) Réduction de l'erreur initiale par 1000

D'après le résultat de l'exercice 2, question 4) , on sait que :

$$k = -\frac{\ln(1000)}{\ln(\rho)}$$

Méthode	Facteur de réduction	Nombre d'itérations
Jacobi	$\cos \frac{\pi}{32} \sim 0.995$	1378
Gauss-Seidel	$\left(\cos \frac{\pi}{32}\right)^2 \sim 0.990$	688
S.O.R	$\frac{1 - \sin \pi/32}{1 + \sin \pi/32} \sim 0.82$	35

Conclusion : La méthode S.O.R est de loin la plus indiquée. A utiliser sans hésitation.