

Exercice 5 : Pendule oscillant

1) Établissement de l'équation différentielle

Avec les notations de l'exercice précédent.

$$\begin{aligned} E_m &= E_c + E_p \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + mg(z_{eq} - z_0) \\ &= \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + mg(z_{eq} - l \cos \theta) \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} E_m &= cst \\ \frac{dE_m}{dt} &= 0 \\ ml^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + mgl\dot{\theta}\sin(\theta) &= 0 \\ \ddot{\theta} &= -\frac{g}{l}\sin\theta \end{aligned}$$

en posant $\omega_\star = \sqrt{g/l}$ on obtient l'équation différentielle non linéaire du second ordre souhaitée :

$$\ddot{\theta} = -\omega_\star^2 \sin \theta \quad (8)$$

On cherche à écrire cette équation sous forme matricielle $\dot{X}(t) = F(t, X(t))$ où le vecteur X est défini par la position angulaire et la vitesse angulaire.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

On constate que $\dot{x}_1 = x_2$. Le système s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega_\star^2 \sin x_1 \end{cases}$$

On obtient le système :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\omega_\star^2 \sin x_1 \end{pmatrix} = F(t, X(t)) = F(X(t)) \quad (9)$$

F dépend uniquement de la variable X et non plus du couple (t, X) . Le système est dit autonome.

2) Analyse de stabilité

L'analyse se déroule en trois étapes :

- i) Linéarisation de l'EDO à l'aide d'un développement limité en (t_*, y_*)
 $\dot{X}(t) = F(t_*, y_*) + A(X - X_*)$ où A est la matrice jacobienne déduite de F .

$$A_{i,j} = \frac{\partial F_i}{\partial X_j}(t_*, y_*)$$

- ii) Calcul des valeurs propres de A
- iii) Analyse de stabilité du schéma à partir de l'équation $\dot{y} = \lambda y$.

3) Calcul de la matrice jacobienne

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(-\omega_*^2 \sin x_1)}{\partial x_1} & \frac{\partial(\omega_*^2 \sin x_1)}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_*^2 \cos x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

On trouve les valeurs propres en annulant le déterminant de $(A - \lambda I_2)$.

$$\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 + \omega_*^2 \cos x_1$$

Les valeurs propres sont alors : $\lambda = \pm \omega_* \sqrt{-\cos x_1}$. Ainsi, les valeurs propres peuvent être réelles (positive ou négative) ou complexe, selon les valeurs de x_1 .

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors l'analyse dans le cadre du cours n'est possible que si $\lambda < 0$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ alors l'analyse de stabilité s'effectue à partir de $\dot{y} = \lambda y$, mais avec λ complexe.

4) Cas des petites oscillations : $\theta \sim 0$

Si $\theta \sim 0$ alors $\sin \theta \sim \theta$. L'équation différentielle devient linéaire : $\ddot{\theta} = -\omega_*^2 \theta$.

Cette équation correspond au cas de l'oscillateur harmonique linéaire de l'*Exercice 4* sans frottement. La solution est : $\theta = A \cos(\omega_* t) + B \sin(\omega_* t)$

En ré-effectuant les calculs précédents, on en déduit la nouvelle forme de A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_*^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont alors immédiatement : $\lambda = \pm i\omega_*$

5) EP1 pour les problèmes oscillants

Pour établir les conditions de stabilité on s'intéresse au problème test : $\dot{y} = \lambda y$ avec $\lambda \in i\mathbb{R}$.

La solution est $y = e^{i\omega t}$, où $\lambda = i\omega$. Il s'agit d'une fonction oscillante qui ne tend pas vers 0. On ne peut, par conséquent, pas appliquer l'analyse proposée en cours.

6) Condition de stabilité de EP1

On écrit $\lambda = \lambda_{\mathbb{R}} + i\lambda_I$.

D'après le cours, on sait que le facteur d'amplification σ doit être inférieur à 1 et vaut :

$$\begin{aligned}\sigma &= 1 + \lambda h \\ &= 1 + \lambda_{\mathbb{R}} h + i\lambda_I h\end{aligned}$$

La condition de stabilité est donnée par

$$|\sigma| = \sqrt{(1 + \lambda_{\mathbb{R}} h)^2 + (h\lambda_I)^2} < 1$$

cas 1 : $\lambda \in \mathbb{R}$

On retrouve l'analyse du cours. A savoir : $h < -\frac{2}{\lambda}$

cas 2 : $\lambda \in i\mathbb{R}$ (imaginaire pure)

$|\sigma| = \sqrt{1 + (\lambda_I h)^2} > 1$ quelles que soient les valeurs de λ_I

EP1 est donc toujours instable pour des valeurs propres imaginaires pures. C'est un schéma à déconseiller quand on travaille avec des valeurs propres complexes.

7) Stabilité des schémas ER-1 et C-N

ER-1 :

D'après le cours, le facteur d'amplification vaut :

$$\sigma = \frac{1}{1 - \lambda h}$$

Le module de σ est inférieur à 1 si et seulement si $\sqrt{(1 - \lambda_{\mathbb{R}} h)^2 + (\lambda_I h)^2} < 1$; ce qui est toujours vérifié. Conséquemment, le schéma ER-1 est toujours stable.

C-N :

D'après le cours, le facteur d'amplification vaut :

$$\sigma = \frac{1 - \lambda h/2}{1 + \lambda h/2}$$

Le module de σ est inférieur à 1 si et seulement si $|1 - \lambda h/2| < |1 + \lambda h/2|$; ce qui est toujours vérifié. Conséquemment, le schéma C-N est toujours stable.

8) Méthode de Runge-Kutta

La méthode proposée est une méthode de type RK. Elle est donc explicite (cf. cours).

9) Facteur d'amplification de RK-4

On applique le schéma à l'équation test : $\dot{y} = \lambda y$. Ceci revient à remplacer la fonction f exprimée dans les constantes K_i par la fonction $f(t, y(t)) = f(y(t)) = \lambda y(t)$

On exprime ensuite chacune des constantes en fonction des puissances de λh .

$$\begin{aligned} K_1 &= hf(t_n, y_n) \\ &= h\lambda y_n \\ &= (\lambda h)y_n \end{aligned} \qquad \begin{aligned} K_2 &= hf(t_n + h/2, y_n + K_1/2) \\ &= h\lambda(y_n + 1/2(\lambda h y_n)) \\ &= \left(\lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2}\right)y_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_3 &= hf(t_n + h/2, y_n + K_2/2) \\ &= \lambda h \left[y_n + \frac{1}{2} \left(\lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2} \right) y_n \right] \\ &= \left(\lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^3}{4} \right) y_n \end{aligned} \qquad \begin{aligned} K_4 &= hf(t_n + h, y_n + K_3) \\ &= \lambda h \left[y_n + \left(\lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^3}{4} \right) y_n \right] \\ &= \left(\lambda h + (\lambda h)^2 + \frac{(\lambda h)^3}{2} + \frac{(\lambda h)^4}{4} \right) y_n \end{aligned}$$

On peut désormais introduire ces expressions dans la formule de récurrence :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6} (K_1 + K_2 + K_3 + K_4) \\ &= y_n + \frac{1}{6} \left(6\lambda h + 3(\lambda h)^2 + (\lambda h)^3 + \frac{(\lambda h)^4}{4} \right) y_n \\ &= \left(1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2!} + \frac{(\lambda h)^3}{3!} + \frac{(\lambda h)^4}{4!} \right) y_n \\ &= \sigma y_n \end{aligned}$$

Ainsi le facteur d'amplification est égal au DL en 0 de la fonction $\lambda h \mapsto e^{\lambda h}$ à l'ordre 4 :

$$\sigma = 1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2!} + \frac{(\lambda h)^3}{3!} + \frac{(\lambda h)^4}{4!}$$

Par conséquent, le schéma est bien précis à l'ordre 4.

10) Stabilité de EP-1 dans $\mathbb{C}$

On a établi précédemment que EP-1 est stable dans $\mathbb{C}$ si

$$\sqrt{(1 + \lambda_{\mathbb{R}} h)^2 + (\lambda_I h)^2} < 1 \tag{10}$$

Rappel : L'équation d'un cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon R dans le plan (x, y) est l'ensemble des points qui vérifient :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Ainsi, l'équation (10) correspond au cercle de centre $(-1; 0)$ et de rayon 1 dans le plan $(\lambda_{\mathbb{R}}, \lambda_I)$.

11) Conditions de stabilité des schémas RK.

Par lecture graphique

RK-2 α

- $\lambda \in \mathbb{R} : h < -2/\lambda$
- $\lambda \in i\mathbb{R} : \text{schéma visiblement instable. Une analyse ultérieure le confirmera.}$

RK-4

- $\lambda \in \mathbb{R} : h < -2.79/\lambda$
- $\lambda \in i\mathbb{R} : h < -2.83/|\lambda_I|$

12) Instabilité de RK-2 α pour les problèmes oscillants

On sait que le facteur d'amplification vaut :

$$\sigma = 1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2}$$

Les problèmes oscillants correspondent au cas où λ est un imaginaire pur : $\lambda = i\lambda_I$.

Le facteur d'amplification dans ce cas devient :

$$\begin{aligned} \sigma &= 1 + i\lambda_I h + \frac{(i\lambda_I h)^2}{2} \\ &= \left(1 - \frac{(\lambda_I h)^2}{2}\right) + i\lambda_I h \end{aligned}$$

Le schéma est stable si et seulement si son module est inférieur à 1 :

$$\begin{aligned} |\sigma| &= \sqrt{\left(1 - \frac{(\lambda_I h)^2}{2}\right)^2 + (\lambda_I h)^2} \\ &= \sqrt{1 + \frac{\lambda^4 h^4}{4}} > 1 \end{aligned}$$

Ainsi, le schéma RK-2 est toujours instable lorsque les valeurs propres sont des imaginaires purs.

13) Application numérique et choix d'ue schéma

Parmi les schémas étudiés durant cette séance, seul RK-4 est explicite et stable pour les problèmes oscillants. Il s'agit donc du meilleur choix.

Application numérique :

- Calcul de la valeur de ω_* : $\omega_* = \sqrt{9.81/0.6} \simeq 4.04$
- *Oscillateur linéaire* : $\lambda = \pm i\omega_*$
On peut utiliser RK-4 si $h < 2.83/\omega_*$
 $\Rightarrow h < 0.7$
- *Oscillateur non-linéaire* : $\lambda = \pm\omega_*\sqrt{-\cos x_1}$ ce qui implique que $|\lambda| < \omega_*$
Cas réel : la condition de stabilité s'exprime : $h < 2.83/|\omega_*| \simeq 0.69$
Cas complexe : la condition de stabilité s'exprime : $h < 2.79/|\omega_*| \simeq 0.7$
Le cas le plus restrictif correspond à $h < 0.69$.

Exercice 6

Schémas	Type	ordre	$\sigma(\lambda h)$	$\lambda \in \mathbb{R}^{-*}$	$\lambda \in i\mathbb{R}^*$
EP-1	Explicite	1	$1 + \lambda h$	$h < -\frac{2}{\lambda}$	Non
ER-1	Implicite	1	$\frac{1}{1 - \lambda h}$	Oui	Oui
CN	Implicite	2	$\frac{1 + \lambda h/2}{1 - \lambda h/2}$	Oui	Oui
RK2 α	Explicite	2	$1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2}$	$h < -\frac{2}{\lambda}$	Non
RK4 α	Explicite	4	$\sum_{j=1}^4 \frac{(\lambda h)^j}{j!}$	$h < -\frac{2.79}{\lambda}$	$h < \frac{2.83}{ \lambda }$

TABLE 1 – Principales propriétés des schémas numériques pour EDO.