

ENRS8AB : Éléments de base du génie électrique

S. Dufour

2A - Département Energie - Année 2024/2025



Sommaire

1	Production, transport et consommation d'énergie électrique	3
1.1	Les niveaux de tension	3
1.2	Les lignes	3
1.3	Les transformateurs	6
1.4	Répartition des puissances dans le réseau	7
1.5	Références	8
1.6	Exercices	9

Introduction et plan de l'enseignement

Le propos de l'enseignement est de décrire l'essentiel de ce qu'il faut savoir des différents objets du génie électrique ainsi que de leurs connexions en vue d'utilisations usuelles. Ce polycopié a été élaboré par G. Vinsard et S. Dufour spécifiquement pour dans ce but.

Il y a sept séances école et une séance de travaux pratiques, correspondant à

1. les circuits électriques monophasés ; le couplage inductif ;
2. les circuits électriques triphasés équilibrés ;
3. la production, le transport et la consommation d'énergie électrique (modèles de réseaux électriques) ;
4. la transformation de l'énergie électrique (convertisseurs statiques : transformateurs et dispositifs électroniques) ;
5. la machine asynchrone (son fonctionnement du point de vue de l'utilisateur) ;
6. l'alternateur synchrone ;
7. une séance de démonstration (à l'ENSEM) où les objets et leur fonctionnement seront montrés ;

1 Production, transport et consommation d'énergie électrique

Un réseau électrique est constitué de producteurs d'électricité et de consommateurs qui sont reliés entre eux par des lignes et des transformateurs. Le cours se concentre sur les modèles équivalents des lignes et des transformateurs, assorti d'une introduction au problème de répartition des puissances dans le réseau.

1.1 Les niveaux de tension

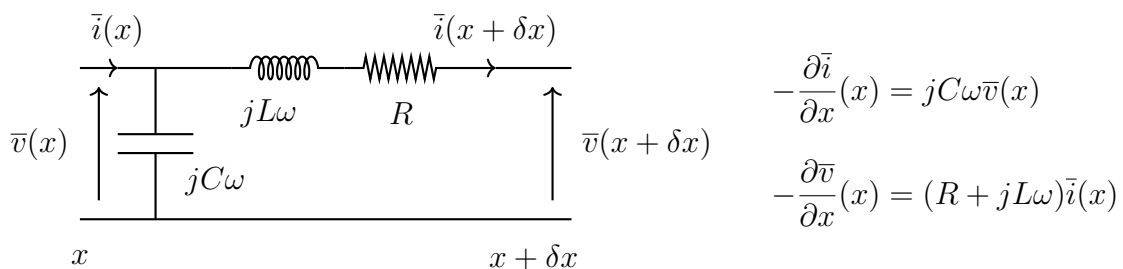
On distingue trois niveaux de tension. La basse tension (BT) pour les tensions (de ligne) inférieures à 1kV, la haute tension niveau A (HTA) de 1kV à 50kV, et la haute tension niveau B (HTB) au delà. La production se fait via des alternateurs a des tensions usuelles de 15.5kV et 20kV. Le transport d'électricité se fait grâce à des lignes de transport et d'interconnexion de 400kV (HTB3) et 225kV (HTB2), puis de répartition 90kV (HTB1), 63kV (HTB1). Le réseau de distribution se fait en 20kV (HTA) et 400V (BT).

1.2 Les lignes

Une ligne permet le transport de l'électricité en haute tension niveau B (HTB1,2,3) d'un point à un autre sur de grandes distances, ou la distribution en haute tension niveau A sur des distances plus courtes. Les lignes sont exploitées en régime triphasé équilibré : la description du schéma monophasé équivalent suffit à décrire le comportement de la ligne.

Equation des ondes

Le schéma monophasé équivalent d'un tronçon de ligne de longueur δx en régime sinusoïdal établi (où $(\bar{v}(x), \bar{i}(x))$ désignent la tension et le courant de phase au point x de la ligne, L l'inductance cyclique par mètre de longueur, C la capacité cyclique par mètre de longueur, R la résistance de phase par mètre de longueur, ω la pulsation) est :



Ordres de grandeurs pour une ligne aérienne :

$L \simeq 1\text{mH/km}$ ($L\omega \simeq 0.4\Omega/\text{km}$), $C \simeq 10\text{nF/km}$, pour des tensions de ligne entre 20kV et 400kV. R est variable en fonction du courant nominal de la ligne (0.06Ω/km pour 300A). Pratiquement, R est négligeable par rapport à $L\omega$ en 400kV, et de l'ordre de $L\omega/10$ en 63 – 90kV.

L'équation des ondes suivie par la tension (et le courant) est :

$$\frac{d^2 \bar{v}}{dx^2}(x) = jC\omega(R + jL\omega)\bar{v}(x) = \bar{\gamma}^2 \bar{v}(x)$$

où $\bar{\gamma}$ est une constante de propagation. En posant $\bar{z}_c = \sqrt{(R + jL\omega)/jC\omega}$, la tension et le courant sont de la forme :

$$\bar{v}(x) = \bar{\alpha}e^{\bar{\gamma}x} + \bar{\beta}e^{-\bar{\gamma}x} \quad \bar{i}(x) = -\frac{1}{\bar{z}_c} (\bar{\alpha}e^{\bar{\gamma}x} - \bar{\beta}e^{-\bar{\gamma}x})$$

ce qui permet d'exprimer en fonction de la distance d les tension/courant en fonction de ceux de l'entrée.

$$\begin{bmatrix} \bar{v}(d) \\ \bar{i}(d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\bar{\gamma}d) & -\bar{z}_c \sinh(\bar{\gamma}d) \\ -\frac{1}{\bar{z}_c} \sinh(\bar{\gamma}d) & \cosh(\bar{\gamma}d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}(0) \\ \bar{i}(0) \end{bmatrix}$$

★ Dans le cas d'une ligne sans pertes de longueur quelconque ($R = 0$), la constante de propagation et l'impédance caractéristique sont :

$$\bar{\gamma} = j\omega\sqrt{LC} = j\frac{2\pi}{\lambda} \quad \bar{z}_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = Z_c$$

où λ désigne la longueur d'onde. Celle-ci est de l'ordre de $6000km$ pour une ligne aérienne, et la vitesse de propagation est celle de la lumière. Les relations tension/courant sont :

$$\begin{bmatrix} \bar{v}(d) \\ \bar{i}(d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{LC}\omega d) & -jZ_c \sin(\sqrt{LC}\omega d) \\ -\frac{j}{Z_c} \sin(\sqrt{LC}\omega d) & \cos(\sqrt{LC}\omega d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}(0) \\ \bar{i}(0) \end{bmatrix}$$

Si la ligne est à vide ($\bar{i}(d) = 0$), on a alors

$$\frac{\bar{v}(d)}{\bar{v}(0)} = \frac{1}{\cos(\sqrt{LC}\omega d)} = \frac{1}{\cos(2\pi/\lambda d)}$$

A vide, la tension en bout de ligne est infinie pour $d = \lambda/4$, soit $1500km$. En pratique, la longueur des lignes $400kV$ ne dépassent pas $500km$.

★ Dans le cas d'une ligne aérienne de faible longueur ($d < 250$ km), le développement limité au second ordre donne une approximation satisfaisante :

$$\begin{bmatrix} \bar{v}(d) \\ \bar{i}(d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + jC\omega(R + jL\omega)d^2/2 & -(r + jl\omega)d \\ -jC\omega d & 1 + jC\omega(R + jL\omega)d^2/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}(0) \\ \bar{i}(0) \end{bmatrix}$$

En posant :

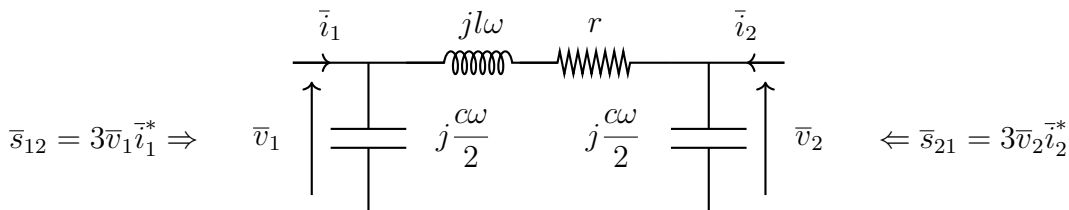
$$r = Rd \text{ } (\Omega) \quad l\omega = L\omega d \text{ } (\Omega) \quad c\omega = C\omega d \text{ } (\Omega^{-1})$$

où r, l, c sont la résistance, l'inductance et la capacité associée à la ligne de longueur d . On a alors :

$$\begin{bmatrix} \bar{v}(d) \\ \bar{i}(d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + j\frac{c\omega}{2}(r + jl\omega) & -(r + jl\omega) \\ -jc\omega & 1 + j\frac{c\omega}{2}(r + jl\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}(0) \\ \bar{i}(0) \end{bmatrix}$$

Schéma monophasé équivalent d'une ligne courte

Le quadripôle précédent est proche de celui d'un quadripôle en Π . Ainsi, le schéma équivalent usuel d'une ligne courte de longueur d est ce modèle en Π (représenté ci-dessous). r, l, c sont la résistance, l'inductance et la capacité associée à la ligne de longueur d .



La matrice de transfert du schéma en Π (convention récepteur des deux côtés) est :

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_2 \\ \bar{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + (r + j\omega)j\omega/2 & -(r + j\omega) \\ j\omega(1 + (r + j\omega)j\omega/4) & -(1 + (r + j\omega)j\omega/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{i}_1 \end{bmatrix}$$

Les courants aux deux extrémités de la ligne sont calculés en fonction des tensions via la matrice admittance :

$$\begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\frac{\omega}{2} + \frac{1}{r + j\omega} & -\frac{1}{r + j\omega} \\ -\frac{1}{r + j\omega} & j\frac{\omega}{2} + \frac{1}{r + j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix}$$

Une ligne est en première approximation une inductance (ligne inductive sans pertes) quand elle transporte une puissance conséquente (ligne chargée). Quand la puissance transportée est faible (ligne à vide), les capacités ne sont plus négligeables, et participent à l'élévation de tension de la ligne (effet Ferranti).

Les puissances apparentes de la ligne transportées de 1 vers 2 $\bar{s}_{12}$ et de 2 vers 1 $\bar{s}_{21}$ sont :

$$\begin{cases} \bar{s}_{12} = 3\bar{v}_1\bar{i}_1^* = -3j\frac{\omega}{2}|\bar{v}_1|^2 + 3\frac{r + j\omega}{r^2 + (l\omega)^2} \bar{v}_1 (\bar{v}_1 - \bar{v}_2)^* \\ \bar{s}_{21} = 3\bar{v}_2\bar{i}_2^* = -3j\frac{\omega}{2}|\bar{v}_2|^2 + 3\frac{r + j\omega}{r^2 + (l\omega)^2} \bar{v}_2 (\bar{v}_2 - \bar{v}_1)^* \end{cases}$$

La puissance apparente dans la ligne est :

$$\bar{s}_{12} + \bar{s}_{21} = -3j\omega \frac{|\bar{v}_1|^2 + |\bar{v}_2|^2}{2} + 3\frac{r + j\omega}{r^2 + (l\omega)^2} |\bar{v}_1 - \bar{v}_2|^2$$

Sa partie réelle correspond aux pertes Joule dans la ligne :

$$\Re(\bar{s}_{12} + \bar{s}_{21}) = 3\frac{r}{r^2 + (l\omega)^2} |\bar{v}_1 - \bar{v}_2|^2 \simeq 3\frac{r}{(l\omega)^2} |\bar{v}_1 - \bar{v}_2|^2$$

Echange de puissances pour une ligne inductive sans pertes ($r = 0 = j\omega$)

$$\bar{s}_{12} = j\frac{3}{l\omega} (|\bar{v}_1|^2 - \bar{v}_1\bar{v}_2^*) \quad \bar{s}_{21} = j\frac{3}{l\omega} (|\bar{v}_2|^2 - \bar{v}_2\bar{v}_1^*) \quad \bar{s}_{12} + \bar{s}_{21} = j3\frac{|\bar{v}_1 - \bar{v}_2|^2}{l\omega}$$

Soient θ_1 et θ_2 les phases de $\bar{v}_1$ et $\bar{v}_2$:

$$\bar{s}_{12} = p_{12} + jq_{12} = j3\frac{|\bar{v}_1|^2}{l\omega} \left(1 - \left|\frac{\bar{v}_2}{\bar{v}_1}\right| e^{-j(\theta_2 - \theta_1)}\right)$$

- les phases des tensions 1 et 2 déterminent le sens d'échange de la puissance active p_{12} (on parle alors pour $\theta_1 - \theta_2$ d'*angle de charge de la ligne*).
- les modules des tensions 1 et 2 déterminent le sens d'échange de la puissance réactive q_{12} (la puissance réactive est principalement liée au niveau des tensions).

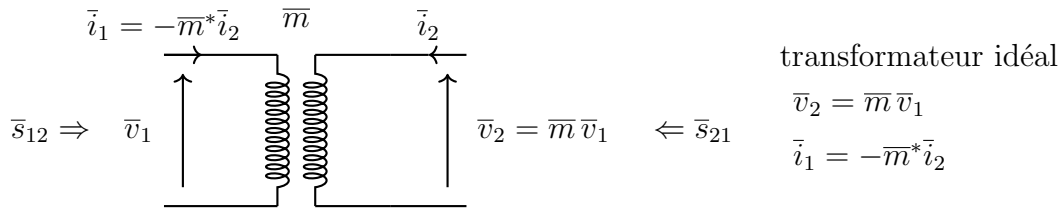
$$p_{12} = 3\frac{|\bar{v}_1||\bar{v}_2|}{l\omega} \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

$$q_{12} = 3\frac{|\bar{v}_1|^2}{l\omega} \left(1 - \left|\frac{\bar{v}_2}{\bar{v}_1}\right| \cos(\theta_2 - \theta_1)\right) \simeq 3\frac{|\bar{v}_1|}{l\omega} (|\bar{v}_1| - |\bar{v}_2|)$$

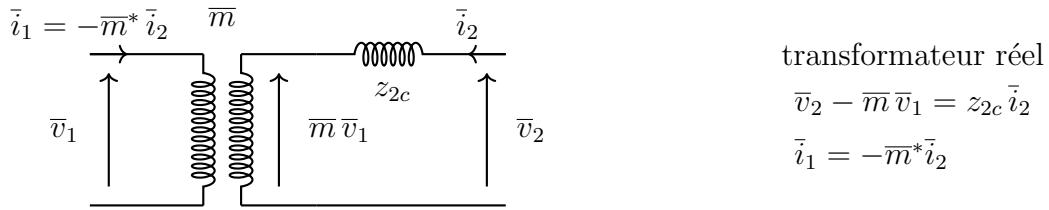
1.3 Les transformateurs

Un transformateur permet l'élévation ou l'abaissement des tensions afin que des éléments puissent cohabiter à des tensions différentes. Le principe du transformateur monophasé est celui d'une inductance couplée sans entrefer à deux enroulements. L'enroulement primaire noté 1 comporte n_1 spires et l'enroulement secondaire noté 2, n_2 spires. Le flux étant commun aux deux enroulements, les tensions des enroulements sont proportionnelles à leur nombre de spires. Le rapport de transformation est $m = \bar{v}_2/\bar{v}_1 = n_2/n_1$ pour un transformateur monophasé. L'utilisation du triphasé permet différentes combinaisons entre phases (des couplages), et le rapport de transformation $\bar{m} = \bar{v}_2/\bar{v}_1$ devient un complexe.

★ Un transformateur idéal de tension est défini par son rapport de transformation $\bar{m} = \bar{v}_2/\bar{v}_1$. Il conserve la puissance apparente : $\bar{s}_{12} + \bar{s}_{21} = 0 = 3(\bar{v}_1 \bar{i}_1^* + \bar{v}_2 \bar{i}_2^*)$. Les courants vérifient donc $\bar{i}_1 = -\bar{m}^* \bar{i}_2$.



★ Un transformateur réel de réseau comporte en plus une impédance de court-circuit $z_{2c} = r_{2c} + jx_{2c}$ (avec $r_{2c} \ll x_{2c}$ pour les fortes puissances).



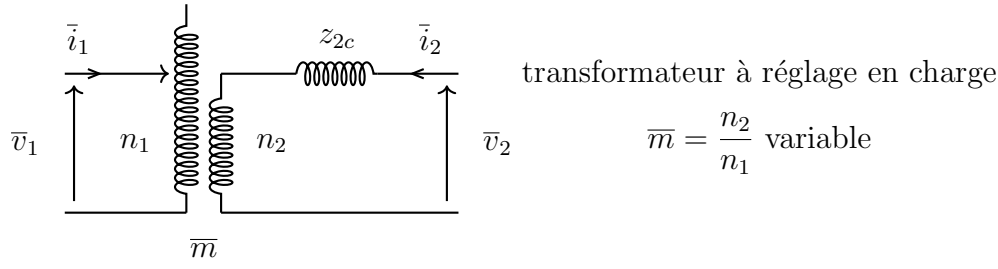
Les courants des deux côtés du transformateur sont calculés en fonction des tensions via la matrice admittance :

$$\begin{pmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{z_{2c}} \begin{pmatrix} |\bar{m}|^2 & -\bar{m}^* \\ -\bar{m} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{pmatrix}$$

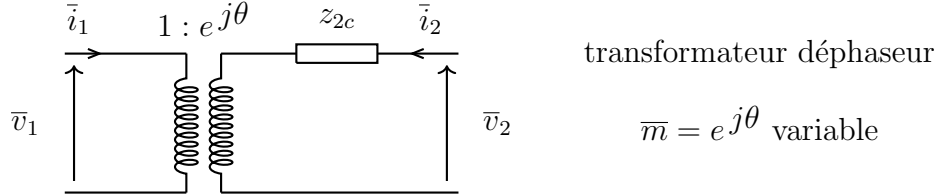
Les puissances apparentes (respectivement de 1 vers 2, de 2 vers 1, dans le transformateur) sont :

$$\bar{s}_{12} = 3 \frac{\bar{m} \bar{v}_1}{z_{2c}^*} (\bar{m} \bar{v}_1 - \bar{v}_2)^* \quad \bar{s}_{21} = 3 \frac{\bar{v}_2}{z_{2c}^*} (\bar{v}_2 - \bar{m} \bar{v}_1)^* \quad \bar{s}_{12} + \bar{s}_{21} = 3 \frac{|\bar{m} \bar{v}_1 - \bar{v}_2|^2}{z_{2c}^*}$$

★ Un transformateur à réglage en charge a pour rôle d'adapter la tension du réseau en fonction de la charge. Ainsi, son rapport de transformation $\bar{m}$ est réel et peut prendre différentes valeurs. Le nombre de spires du primaire n_1 est modifié (jusqu'à $\pm 15\%$) pendant le fonctionnement du transformateur pour permettre l'ajustement des tensions du réseau en aval du secondaire du transformateur à la tension nominale.



★ Un transformateur déphaseur permet de modifier l'échange de puissances actives entre deux points du réseau. Son rapport de transformation $\bar{m}$ est complexe et $|\bar{m}| = 1$. L'argument de $\bar{m} = \theta$ peut prendre différentes valeurs ($\pm 10^\circ$) suivant les demandes de puissance.



1.4 Répartition des puissances dans le réseau

Un producteur ou un consommateur d'électricité représente un nœud du réseau. Ces nœuds sont reliés par des branches qui comportent un ou plusieurs éléments (lignes et/ou transformateurs). A chaque nœud k est associée une tension $\bar{v}_k$ et un courant $\bar{i}_k$, et une puissance apparente $\bar{s}_k = 3 \bar{v}_k \bar{i}_k^*$.

A chaque branche est associée une matrice admittance élémentaire (exemples ci-dessus pour une ligne et un transformateur) :

$$\begin{pmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{pmatrix}$$

La matrice admittance (globale) $\mathcal{Y}$ associée au réseau relie les n courants des nœuds aux n tensions des nœuds.

$$\begin{pmatrix} \bar{i}_1 \\ \vdots \\ \bar{i}_n \end{pmatrix} = \mathcal{Y} \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{pmatrix}$$

Elle se détermine par assemblage des matrices admittances élémentaires de chaque branche du réseau (reliant les nœuds k et j).

Les puissances apparentes aux nœuds sont exprimées en fonction des tensions à l'aide de la matrice admittance :

$$\bar{s}_k = 3 \bar{v}_k \bar{i}_k^* = 3 \bar{v}_k \sum_{j=1}^n \mathcal{Y}_{kj}^* \bar{v}_j^*$$

Un exemple de construction $\mathcal{Y}$ pour 3 nœuds est donné :

La puissance apparente au nœud 2 est $\bar{s}_2 = 3 \bar{v}_2 (-y_{12} \bar{v}_1 + (y_{12} + y_{23}) \bar{v}_2 - y_{23} \bar{v}_3)^*$.

Pour connaître la répartition de puissances, il faut faire le bilan des données et des inconnues en fonction de la nature des nœuds :

Pour un nœud de production, la tension est celle de la génératrice associée, et la puissance apparente à fournir au réseau une inconnue. Pour un nœud de consommation, la puissance apparente soutirée au réseau (donc comptée négativement) est une donnée, la tension au nœud une inconnue.

$$\begin{array}{c}
1 \quad y_{12} \quad 2 \quad y_{23} \quad 3 \\
\bullet \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \bullet \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \bullet
\end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \\ \bar{i}_2 \\ \bar{i}_3 \end{pmatrix} = y_{12} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \\ \bar{i}_2 \\ \bar{i}_3 \end{pmatrix} = \mathcal{Y} \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{12} & -y_{12} & 0 \\ -y_{12} & y_{12} + y_{23} & -y_{23} \\ 0 & -y_{23} & y_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \end{pmatrix}$$

nœuds	production	consommation
données	$\bar{v}_k = \bar{e}_k$	$\bar{s}_k = -p_k - jq_k$
inconnues	$\bar{s}_k = p_k + jq_k$	$\bar{v}_k$

Le calcul de la répartition des puissances est conduit en trois étapes :

1. détermination des tensions aux nœuds de consommation connaissant les puissances apparentes soutirées à ces nœuds et les tensions aux nœuds de production
2. détermination des puissances fournies aux nœuds de production connaissant les tensions aux nœuds de production et de consommation
3. détermination des puissances transitées dans chaque ligne connaissant les tensions aux nœuds de production et de consommation

1.5 Références

- [1] J.P. Barret, P. Bornard et B. Meyer “Simulation des réseaux électriques”, Eyrolles, 1997.
- [2] V. Crastan “Les réseaux d’énergie électrique”, Hermes, 2006.

1.6 Exercices

1. Ligne triphasée 400kV

Soit une ligne sans pertes, de tension de ligne $U_N = 400kV$, de puissance apparente $S_N = 1650MVA$ et de longueur $d = 100km$. On suppose $l_0 = 1.275mH/km$ et $c_0 = 12.7nF/km$. La ligne est alimentée côté 1 à sa tension nominale. On utilisera le schéma équivalent en Π pour cet exercice.

- Calculer les éléments du schéma en Π équivalent.
- Calculer $\bar{V}_{20}$ la tension à vide en bout de ligne (côté 2), ainsi que la puissance apparente $\bar{S}_{10}$ fournie côté 1.
- La ligne est court-circuitée côté 2. Calculer z_{cc} l'impédance de court-circuit côté 1, et la puissance de court-circuit $\bar{S}_{cc}$.
- La ligne est chargée en 2 par une résistance R en parallèle avec une inductance L . Calculer $\bar{S}_2$ en fonction de U_N et des paramètres de ligne.
- On suppose $L \rightarrow \infty$. Tracer la courbe paramétrée $(|\bar{V}_2(R)|, P_2(R))$, à $|\bar{V}_1|$ fixé.
- On suppose $R \rightarrow \infty$. Tracer la courbe paramétrée $(|\bar{V}_2(L\omega)|, Q_2(L\omega))$, à $|\bar{V}_1|$ fixé.
- Déterminer les charges admissibles pour ne pas dépasser le courant nominal côté 2.
- Donner le modèle en Π équivalent de deux lignes en parallèle (de même caractéristique).
- Donner le modèle en Π équivalent de deux lignes en série (de même caractéristique).

2. Echanges de puissances par une ligne isolée

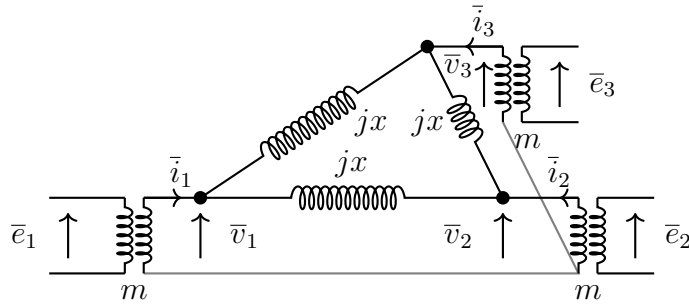
Soit une ligne triphasée 90kV de réactance $l\omega = 40\Omega$. La ligne est alimentée côté 1 à sa tension nominale. Commenter à chaque question les échanges de puissances.

- La ligne est alimentée côté 2 avec $\bar{e}_2 = \bar{e}_1 \exp(j\pi/24)$, puis $\bar{e}_2 = 1.1\bar{e}_1$, puis $\bar{e}_2 = 1.1\bar{e}_1 \exp(j\pi/24)$.
- On met côté 1 un transformateur de rapport de transformation $\bar{m}_1$, de réactance de court-circuit $x_{2c} = 5\Omega$. Calculer les courants et les puissances en 1 et 2 pour $\bar{m}_1 = \exp(j\pi/12)$ et $\bar{e}_2 = \bar{e}_1 \exp(j\pi/24)$.
- Sans calculs, expliquer l'effet d'une capacité en parallèle côté 2 sur l'échange de puissances. Faire de même si on insère une capacité en série avec la ligne.

3. Réseau à trois nœuds

Le réseau est constitué des nœuds 1 et 2 qui sont des nœuds de production ($\bar{e}_1 = 130V$ et $\bar{e}_2 = 140V$) et le nœud 3 de consommation. Les lignes reliant 1, 2 et 3 ont la même réactance $x = 10\Omega (= l\omega)$. Les transformateurs associés aux 3 nœuds ont pour rapport de transformation $m = 230/130 = 1.77$, et leur impédance de court-circuit est négligée dans un premier temps.

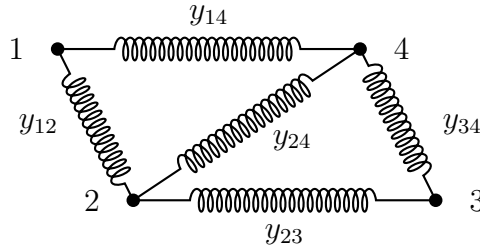
- Une impédance de charge $Z = 10(1 + j)$ est connectée à $\bar{e}_3$. Calculer la matrice admittance associée aux nœuds (1, 2, 3). En déduire la tension $\bar{v}_3$. Calculer la puissance apparente consommée par la charge et fournies par les nœud 1 et 2. En déduire la puissances apparentes fournies par les primaires des transformateurs 1 et 2.



b) Une puissance apparente $p_3 + jq_3 = 1100 + 900j$ est prélevée au nœud 3. Déterminer la tension au nœud 3.

c) L'impédance de court-circuit des transformateurs est $z_{2c} = j0.5\Omega$. Une impédance de charge $Z = 10(1 + j)$ est connectée à $\bar{e}_3$. Montrer qu'à l'aide de transformations triangle-étoile, on se ramène au cas a). Calculer alors les puissances apparentes fournies par les primaires des transformateurs 1 et 2.

4. Réseau à quatre nœuds



Le réseau est constitué des nœuds 1 et 3 qui sont des nœuds de production ($\bar{e}_1 = 240, \bar{e}_3 = 220$) et les nœuds 2 et 4 de consommation ($\bar{s}_2 = -500 - 250j, \bar{s}_4 = -1000 - 750j$).

a) Déterminer la matrice admittance ($y_{12} = y_{34} = 0.01 - 0.1j, y_{14} = 0.02 - 0.2j, y_{24} = 0.02 - 0.1j, y_{23} = 0.01 - 0.2j$).

b) Donner les équations et les inconnues en vue du calcul de la répartition des puissances.

c) Le réseau est renforcé par un nœud de production supplémentaire 5 relié à 1 et à 4. Calculer la nouvelle répartition de puissances ($\bar{e}_5 = 240, y_{15} = y_{45} = 0.01 - 0.1j$).

5. Modèle de ligne

Le modèle de ligne comporte une inductance et une capacité par mètre de longueur (la résistance est négligée). On suppose $L = 1.3mH/km$ et $C = 10nF/km$. 1 désigne l'entrée et 2 la sortie de la ligne.

a) Pour une longueur donnée de ligne d , exprimer $\mathcal{M}$ la matrice reliant les grandeurs de sortie à celles d'entrée de la ligne.

$$\begin{pmatrix} \bar{v}_2 \\ \bar{i}_2 \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{i}_1 \end{pmatrix}$$

b) Pour 100 puis 500 km, comparer la valeur de $\mathcal{M}$ avec celle qui serait obtenue par la mise en série de lignes de longueur 1 km.

c) Résoudre les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial \bar{i}}{\partial x}(x) = jC\omega \bar{v}(x) \\ -\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}(x) = jL\omega \bar{i}(x) \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{v}(0) = \bar{v}_1 \\ \bar{v}(d) = \bar{v}_2 \\ \bar{i}(0) = \bar{i}_1 \\ \bar{i}(d) = \bar{i}_2 \end{array} \right.$$

d) Comparer la matrice obtenue à la question c) aux deux autres.